

**УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ
СИСТЕМАХ**

УДК 531.36; 62-50

**ЭКСПЕРИМЕНТ ПО РАСКАЧИВАНИЮ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА
УПРАВЛЕНИЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ***

© 2012 г. Я. Аврейцевич¹, Г. Василевский¹, Г. Кудра¹, С. А. Решмин²

¹Польша, Лодзь, Лодзинский технический ун-т

²Россия, Москва, ИПМех РАН

Поступила в редакцию 28.10.11 г., после доработки 14.11.11 г.

Представлены результаты эксперимента по раскачиванию двойного маятника при помощи релейного управляющего момента сил, создаваемого в точке подвеса. В ходе эксперимента управление по обратной связи выводит двойной маятник в окрестность верхнего положения равновесия. Алгоритм достаточно прост и основан на методе декомпозиции.

0. Введение. В литературе по теории управления часто рассматриваются системы, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями, имеющими лагранжеву форму [1–7]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = U_i + Q_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (0.1)$$

здесь q_i – обобщенные координаты системы, U_i – управляющие обобщенные силы, Q_i – все прочие обобщенные силы, включая неконтролируемые возмущения, n – число степеней свободы системы, t – время, точкой обозначаются производные по времени,

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle A(q) \dot{q}, \dot{q} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

– кинетическая энергия системы, заданная в виде симметрической положительно-определенной квадратичной формы от обобщенных скоростей \dot{q}_i ; через q и \dot{q} обозначаются n -мерные векторы обобщенных координат и скоростей соответственно, а скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов. Предполагается, что на управляющие воздействия в каждый момент времени наложены геометрические ограничения вида

$$|U_i| \leq U_i^0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (0.2)$$

где U_i^0 – заданные постоянные.

Основные проблемы, возникающие при решении задач управления рассматриваемой системой (0.1), обусловлены тем, что она представляет собой существенно нелинейную динамическую систему высокого порядка. Ее отличает наличие динамического взаимодействия между различными степенями свободы, которое характеризуется элементами $a_{jk}(q)$ матрицы кинетической энергии $A(q)$. Ситуация еще более осложняется, если некоторые из констант U_i^0 в (0.2) равны нулю, т.е. имеет место дефицит управляющих параметров.

Необходимость рассмотрения задач управления системой (0.1) именно в нелинейной постановке (без перехода к упрощенному линеаризованному описанию) связана с несколькими причинами. Так, управление, построенное для линеаризованной системы, часто оказывается неэффективным при применении в нелинейной системе. Кроме того, при изменении цели управления изменяются как структура, так и параметры алгоритмов управления. Указанные причины также затрудняют синтез универсальных систем управления.

* Работа выполнена по гранту Министерства Науки и Высшего Образования Польши (0040/V/T02/2010/38), в рамках гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (НШ-64817.2010.1) и при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00378; 11-08-00435; 11-01-12110).

В этой ситуации оказывается целесообразным использовать метод декомпозиции. Различные варианты метода декомпозиции были предложены ранее в [4, 5] для построения субоптимального управления в лагранжевых системах. Суть этих методов состоит в преобразовании исходной нелинейной системы (0.1) с n степенями свободы к совокупности n независимых линейных подсистем вида

$$\ddot{x}_i = u_i + v_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (0.3)$$

Здесь x_i – новые (преобразованные) обобщенные координаты, u_i – новые управляющие воздействия, v_i – возмущающие силы, включающие как внешние силы Q_i , так и нелинейные члены, описывающие взаимодействие различных степеней свободы в системе (0.1). Возмущения v_i в системе (0.3) трактуются как неопределенные, но ограниченные воздействия, которые можно рассматривать как противодействие противника.

Исходные ограничения (0.2) на управляющие силы и некоторые дополнительные ограничения, наложенные на обобщенные силы Q_i и кинетическую энергию системы, при определенных условиях сводятся к следующим нормализованным ограничениям на управления u_i и возмущения v_i :

$$|u_i| \leq 1, \quad |v_i| \leq \rho_i, \quad \rho_i < 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (0.4)$$

Если к системе (0.3) с ограничениями (0.4) применить подход теории дифференциальных игр [8], то для синтеза гарантированного управления получим выражения $u_i(x_i, \dot{x}_i)$, решающие поставленную задачу при $\rho_i < 1$. Предлагаемые методы построения не приводят к оптимальному синтезу, но включают ряд процедур оптимизации времени процесса. Поэтому их можно называть субоптимальными.

В [9] дано развитие метода декомпозиции для построения управления нелинейными лагранжевыми системами в случае, когда число управляющих обобщенных сил меньше числа степеней свободы системы. Вводится в рассмотрение система гладких нелинейных функций обобщенных координат, число функций равно числу управляющих обобщенных сил. Цель управления – выведение системы за конечное время на терминальное множество, заданное множествами уровня выбранных функций, причем требуется, чтобы движение в терминальный момент происходило вдоль множеств уровня.

В настоящей статье на основе указанного подхода предложено простое управление по обратной связи для выведения перевернутого двойного маятника в окрестность верхнего положения равновесия с малой угловой скоростью. В качестве управления выступает момент сил, создаваемый в точке подвеса. Постановка задачи формально не подпадает под постановку задачи в [9] и является более сложной. Однако основные идеи способа управления остаются такими же. При этом незначительно изменяется структура закона управления и значительно усложняется его математическое обоснование [10]. Работоспособность алгоритма подтверждена экспериментом по раскачиванию двойного маятника. На примере управления данной системой показаны потенциальные возможности использования метода декомпозиции в сложных системах с дефицитом управляющих параметров.

Управлению маятниковыми системами посвящены многочисленные публикации. Часто на таких, хорошо всем известных системах испытываются новые методы управления, демонстрируется их работа и эффективность. В [11–13] приведена задача стабилизации вертикального неустойчивого положения равновесия двойного маятника, точка подвеса которого неподвижна. В [14] задача стабилизации многозвенного перевернутого маятника решается путем горизонтальных перемещений точки подвеса. Некоторые другие методы, применимые к управлению двойным маятником, разработаны в [15–22]. Отметим, что отличительная особенность управления, предложенного в настоящей статье для раскачивания двойного маятника, заключается в использовании игрового подхода.

1. Раскачивание двойного маятника. Рассматривается механическая двузвенная система (рис. 1), состоящая из неподвижного основания B_0 и двух абсолютно жестких звеньев B_1, B_2 . Элементы конструкции соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами O_1, O_2 таким образом, что оба звена могут совершать движения только в вертикальной плоскости. Центр масс C_1 звена B_1 лежит на луче O_1O_2 . Положение центра масс C_2 звена B_2 не

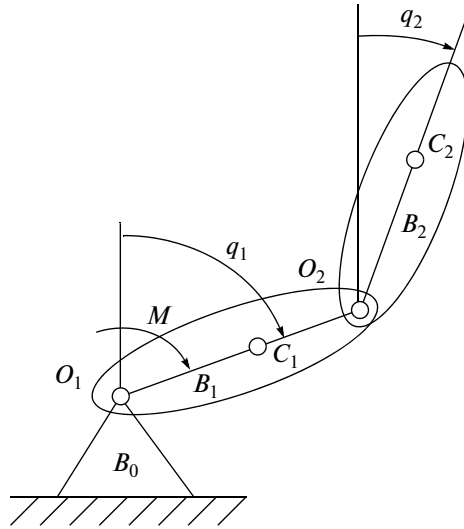


Рис. 1. Двойной маятник

совпадает с положением шарнира O_2 . Система управляется моментом сил M , создаваемым в шарнире O_1 .

Уравнения Лагранжа, описывающие движение системы, имеют вид

$$\begin{aligned} (m_2 L^2 + I_1) \ddot{q}_1 + m_2 l_2 L \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_2 - m_2 l_2 L \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_2^2 &= M + G_1 + v_1, \\ m_2 l_2 L \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_1 + I_2 \ddot{q}_2 + m_2 l_2 L \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1^2 &= G_2 + v_2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$G_1 = g(m_1 l_1 + m_2 L) \sin q_1, \quad G_2 = g m_2 l_2 \sin q_2.$$

Здесь введены следующие обозначения: q_i – угол между прямой $O_i C_i$ и вертикальной осью, l_i – длина отрезка $O_i C_i$, L – длина отрезка $O_1 O_2$, m_i – масса звена B_i , I_i – момент инерции звена B_i относительно оси шарнира O_i , G_i – момент, создаваемый силой тяжести в i -м шарнире, v_i – момент, создаваемый возмущающими силами (например, силами трения) в i -м шарнире, $i = 1, 2$, g – ускорение свободного падения. На управляющий момент накладывается ограничение

$$|M| \leq M^0, \quad (1.2)$$

где M^0 – заданная постоянная. Известны предельные возможности возмущений

$$|v_1| \leq v_1^0, \quad |v_2| \leq v_2^0, \quad (1.3)$$

где $v_1^0 \geq 0$, $v_2^0 \geq 0$ – постоянные.

Перейдем к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} t' = \left(\frac{M^0}{m_2 l_2 L} \right)^{1/2} t, \quad M' = \frac{M}{M^0}, \quad G_i' = \frac{G_i}{M^0} = G_i^0 \sin q_i, \quad G_1^0 = \frac{g(m_1 l_1 + m_2 L)}{M^0}, \\ G_2^0 = \frac{g m_2 l_2}{M^0}, \quad v_i' = \frac{v_i}{M^0}, \quad v_i^{0'} = \frac{v_i^0}{M^0}, \quad \alpha = \frac{I_1 + m_2 L^2}{m_2 l_2 L}, \quad \beta = \frac{I_2}{m_2 l_2 L}. \end{aligned}$$

Если у новых переменных t' , M' , G_i' , v_i' , $v_i^{0'}$ опустить штрих, то уравнения (1.1) и ограничение (1.2) примут вид

$$\alpha \ddot{q}_1 + \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_2 = M + G_1 + \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_2^2 + v_1, \quad (1.4)$$

$$\cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_1 + \beta \ddot{q}_2 = G_2 - \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1^2 + v_2, \quad (1.5)$$

$$|M| \leq 1, \quad (1.6)$$

а запись ограничений (1.3) останется без изменений.

З а д а ч а. Требуется построить управление $M(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$, удовлетворяющее ограничению (1.6) и переводящее систему (1.4), (1.5) из заданного начального состояния

$$q_1(t_0) = \pi, \quad q_2(t_0) = \pi, \quad \dot{q}_1(t_0) = 0, \quad \dot{q}_2(t_0) = 0 \quad (1.7)$$

в окрестность верхнего положения равновесия

$$\begin{aligned} |q_1 - 2\pi k| < \varepsilon, \quad |q_2 - 2\pi m| < \varepsilon, \quad k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ |\dot{q}_1| < \varepsilon', \quad |\dot{q}_2| < \varepsilon', \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\varepsilon, \varepsilon'$ – заданные величины, которые могут быть сколь угодно малыми.

В [10] поставленная задача решается в предположении о том, что максимально возможный управляющий момент достаточно велик по сравнению с максимальными моментами силы тяжести в шарнирах, а максимальные возмущения, наоборот, малы. Соответствующие ограничения на константы $G_1^0, G_2^0, v_1^0, v_2^0$ наложены в процессе решения. Раскачивающее управление M , зависящее от двух положительных параметров X, f , задается в виде

$$M = \begin{cases} \text{sign}(\dot{x} - \tilde{\psi}), & \dot{x} \neq \tilde{\psi}; \\ \text{sign}\dot{x}, & \dot{x} = \tilde{\psi}, \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\tilde{\psi}(x, \tilde{x}) = \psi(x - \tilde{x}), \quad \psi(\cdot) = -(2X|\cdot|)^{1/2} \text{sign}(\cdot), \quad (1.10)$$

$$x = q_2 - q_1, \quad \dot{x} = \dot{q}_2 - \dot{q}_1, \quad (1.11)$$

$$\tilde{x} = \begin{cases} f & \text{при } \dot{q}_1 \leq 0; \\ -f & \text{при } \dot{q}_1 > 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Оно релейно и принимает свои предельно допустимые значения $M = \pm 1$. Кривая переключений $\dot{x} = \tilde{\psi}(x, \tilde{x})$, где x – угол между осями звеньев, состоит из двух параболических ветвей, которые симметричны относительно точки $(\tilde{x}, 0)$.

Доказано (см. [10]), что предложенное выше управление может быть использовано для решения задачи. Получена система неравенств (ограничений) для определения допустимых параметров X, f .

З а м е ч а н и е. Если подставить соотношения (1.11) в уравнение (1.5), то оно примет вид

$$(\beta + \cos x)\ddot{q}_1 = G_2^0 \sin(q_1 + x) - \sin x \dot{q}_1^2 + v_2. \quad (1.13)$$

При $x(t) \equiv \text{const}$ и $v_2(t) \equiv \text{const}$ уравнение (1.13) имеет первый интеграл

$$\exp(q_1 \text{tg} \varphi) \left[\dot{q}_1^2 + \frac{G_2^0 \cos(q_1 + x + \varphi) \sin \varphi - v_2}{\sin x} \right] = \text{const}, \quad \varphi = \arctg \left(\frac{2 \sin x}{\beta + \cos x} \right). \quad (1.14)$$

Доказательство того, что амплитуда колебаний во время раскачивания увеличивается, основано на анализе найденного первого интеграла.

Управление (1.9) обеспечивает постепенное увеличение амплитуды раскачивания и стремится поддерживать конфигурацию маятника, сохраняя угол x между осями звеньев равным \tilde{x} . Однако величина \tilde{x} , согласно (1.12), меняет знак синхронно с раскачиваниями маятника, а, точнее, одновременно с угловой скоростью \dot{q}_1 его первого звена. Поэтому весь процесс разделяется на чередующиеся стадии, на которых $x = \tilde{x}$ (координированный режим) или $x \neq \tilde{x}$ (переходный режим). Во время координированного режима звенья маятника движутся как единое целое. Во время переходного режима угол между осями звеньев маятника меняется на противоположный, причем за конечное время. При достаточно малых значениях f темп раскачивания маятника невелик. Анализ первого интеграла (1.14) показывает, что амплитуда колебаний увеличивается на каждой стадии с координированным режимом движения. Влияние стадий с переходным режимом незначительно. В результате наступит момент, когда маятник окажется вблизи верхнего положения равновесия с достаточно малыми скоростями движения звеньев. Иными словами, исходная система (1.4), (1.5) окажется в окрестности положения равновесия (1.8).

Ниже представлены результаты эксперимента на реальной модели двойного маятника, подтверждающие работоспособность алгоритма.

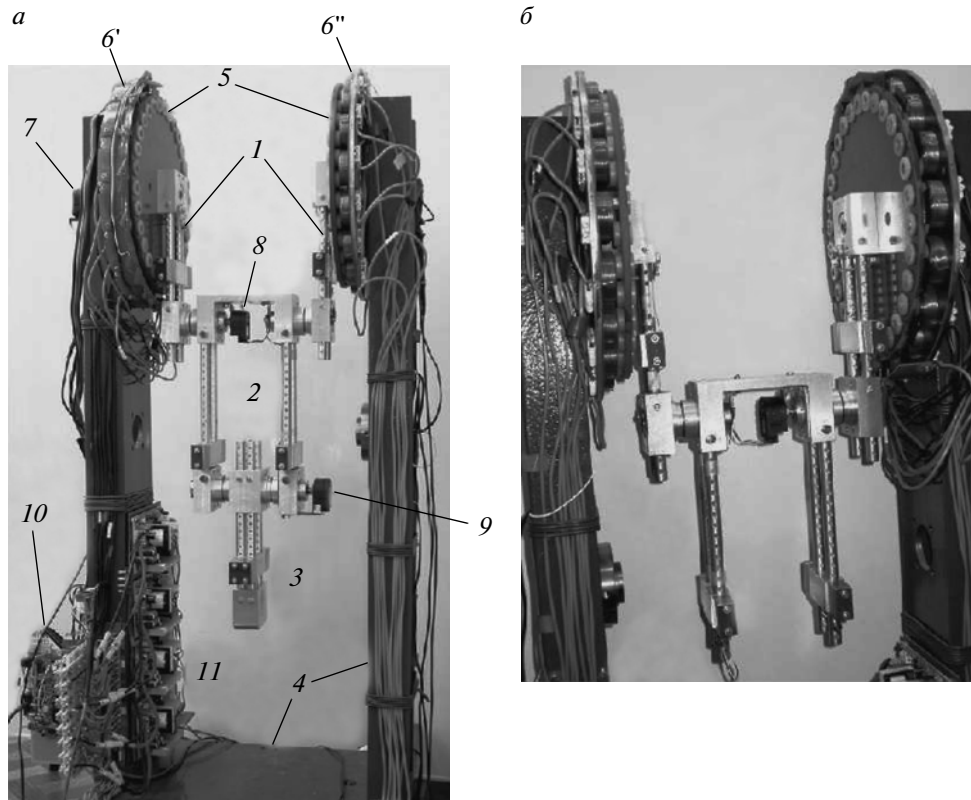


Рис. 2. Экспериментальная установка: *а* – тройной маятник, *б* – двойной маятник; 1 – первое звено (B_1), 2 – второе звено (B_2), 3 – третье звено, 4 – основание, 5 – ротор двигателя, 6, 6'' – статоры двигателя, 7–9 – ротационные потенциометры, 10 – электронная система управления электропитанием двигателя, 11 – импульсные фидеры

2. Экспериментальная установка. В январе 2005 г. в Отделе автоматки и биомеханики Лодзинского технического университета (Польша) был создан тройной маятник (рис. 2). Первоначально маятник использовался для изучения хаотических движений, возникающих в нем при приложении периодического управляющего момента в точке подвеса. Описание этого маятника и результаты экспериментов с ним можно найти в [23, 24]. Двойной маятник был получен из тройного путем удаления третьего звена. Получившийся двойной маятник был использован для проведения эксперимента: раскачивания и приведения в окрестность верхнего положения равновесия с малой скоростью. Управление в системе имеет релейный характер, так как момент может принимать только два значения: $M = \pm 1.718 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Система управления позволяет также отключить момент в точке подвеса (т.е. положить $M = 0$), но эта возможность в эксперименте не использовалась.

Для того чтобы оценить параметры маятника, были записаны экспериментальные данные о свободных движениях маятника двух различных типов. После этого оценка параметров была произведена с помощью специальной программы, которая выдала следующие результаты: $L = 174 \text{ мм}$, $m_1 = 3.68 \text{ кг}$, $m_2 = 1.565 \text{ кг}$, $l_1 = 60.2 \text{ мм}$, $l_2 = 89.9 \text{ мм}$, $I_1 = 0.0403 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_2 = 0.0140 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Процедура идентификации параметров разрабатывалась первоначально для тройного маятника. Однако она может быть успешно использована и для рассматриваемого в статье двойного маятника. Для получения дополнительной информации о математической модели, параметрах и процедуре оценки параметров см. работы [23, 24], где изучался тройной маятник.

3. Реализация управления в среде LabView. Специальная программа была разработана с использованием среды LabView, которая управляла двойным маятником, согласно алгоритму, представленному в разд. 1, но с незначительной модификацией [25]. Сигналы напряжения с ротационных потенциометров попадали прямо на измерительную плату фирмы National Instruments типа PXI-6052E.

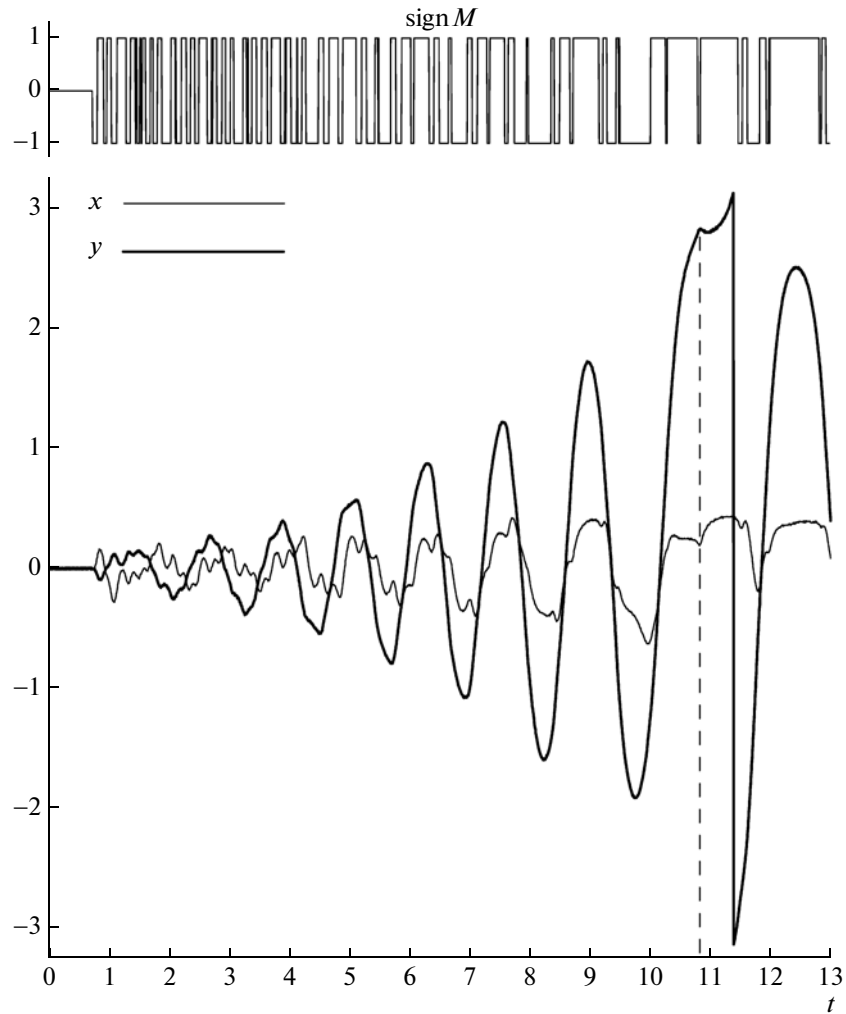


Рис. 3. Экспериментальные данные во время процесса раскачивания

Для того чтобы раскачать маятник (перевести его из нижнего устойчивого положения равновесия в окрестность верхнего неустойчивого положения равновесия с малой скоростью), был выполнен эксперимент. На рис. 3 представлены данные о процессе управления в зависимости от времени. Для удобства на рис. 3 показано угловое отклонение первого звена от его начального положения:

$$y = 2\pi \left\{ \frac{q_1}{2\pi} \right\} - \pi,$$

где $\{\cdot\}$ — дробная часть числа, вместо q_1 (толстая кривая на нижнем графике). Постепенное увеличение амплитуды раскачивания первого звена наблюдалось в эксперименте до момента 11.4 с, когда звено перешло через верхнее вертикальное положение, а затем продолжило вращение. В этот момент стабилизация системы в верхнем положении равновесия не происходила. Угол между осями звеньев во время движения практически не превышал по модулю величины 0.45 рад (тонкая кривая на нижнем графике); только один раз в момент 10.0 с достигнул 0.63 рад. Абсолютная величина управляющего момента во время эксперимента была постоянной и равной 1.718 Н · м. Задержка в контуре управления составляла 7.3 мс. Кривая на верхнем графике характеризует знак управляющего момента M . Маятник практически остановился в окрестности верхнего положения равновесия в момент 10.8 с (штриховая линия на нижнем графике). При этом оказалось, что $x = 0.19$ рад, $y = 2.82$ рад. Эксперимент показал, что алгоритм управления в ряде случаев способен обеспечить раскачивание даже при сильно ограниченном управляющем моменте, когда требования к его допустимой амплитуде, предъявляемые в [10], не выполнены.

Заключение. Отметим особенности предложенного способа управления. Для любых параметров звеньев маятника построено управление $M(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$ с обратной связью. Оно мало чувствительно к вариациям параметров системы и учитывает влияние различного рода возмущений и помех во время движения. Также допускается незначительная задержка в контуре управления. Управление релейно. Учитываются геометрические ограничения, наложенные на создаваемый в точке подвеса управляющий момент. Однако при этом требуется достаточно большая его амплитуда. Построение алгоритма и обоснование его работы основаны на методе декомпозиции, использующем игровой подход. На некоторых этапах движение происходит в скользящем режиме. Структура алгоритма достаточно проста для его практической реализации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пятницкий Е.С.* Синтез управления манипуляционными роботами на принципе декомпозиции // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1987. № 3.
2. *Пятницкий Е.С.* Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2.
3. *Матюхин В.И., Пятницкий Е.С.* Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов // АиТ. 1989. № 9.
4. *Черноусько Ф.Л.* Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6.
5. *Черноусько Ф.Л.* Синтез управления нелинейной динамической системой // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2.
6. *Ананьевский И.М.* Два подхода к управлению механической системой с неизвестными параметрами // Изв. РАН. ТиСУ. 2001. № 2.
7. *Решмин С.А., Черноусько Ф.Л.* Синтез управления в нелинейной динамической системе на основе декомпозиции // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 1.
8. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
9. *Решмин С.А.* Метод декомпозиции в задаче управления лагранжевой системой с дефицитом управляющих параметров // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 1.
10. *Решмин С.А.* Метод декомпозиции в задаче управления перевернутым двойным маятником с использованием одного управляющего момента // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 6.
11. *Формальский А.М.* О стабилизации двойного перевернутого маятника при помощи одного управляющего момента // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 3.
12. *Формальский А.М.* О глобальной стабилизации двойного перевернутого маятника с управлением в межзвенном шарнире // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 5.
13. *Aoustin Ya., Formal'skii A.M., Martynenko Yu.* Stabilisation of unstable equilibrium postures of a two-link pendulum using a flywheel // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2006. V. 45. № 2.
14. *Schaefer I.F., Cannon R.F.* On the Control of Unstable Mechanical Systems // IFAC 3rd Congress. London, 1996.
15. *Absil P., Sepulchre R.* A hybrid control scheme for swing-up acrobatics // Proc. 5th European Control Conf. Porto. Portugal, 2001.
16. *Fantoni I., Lozano R., Spong M.W.* Energy based control of the pendubot // IEEE Transactions Automatic Control. 2000. V. 45.
17. *Rubi J., Rubio A., Avello A.* Swing-up control problem for a self-erecting double inverted pendulum // IEE Proceedings – Control Theory and Applications. 2002. V. 149.
18. *Sanfelice R.G., Teel A.R.* A “throw-and-catch” hybrid control strategy for robust global stabilization of nonlinear systems // Proc. 26th American Control Conf. N.Y. USA, 2007.
19. *Formalskii A.M.* Stabilization of Unstable Mechanical Systems // JOTA. 2010. V. 144. № 2.
20. *Aoustin Ya., Formal'skii A., Martynenko Yu.* Pendubot: combining of energy and intuitive approaches to swing up, stabilization in erected pose // Multibody Syst. Dyn. 2011. V. 25. № 1.
21. *Палов В.Е.* Исследование динамики двойного маятника со следящей и консервативной силами // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 3.
22. *Крутько П.Д., Палов В.Е.* Стабилизация состояний равновесия двойного маятника, нагруженного следящей и консервативной силами // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 2.
23. *Awrejcewicz J., Kudra G., Wasilewski G.* Chaotic zones in triple pendulum dynamics observed experimentally and numerically // Applied Mechanics and Materials. 2008. V. 9.
24. *Awrejcewicz J., Kudra G., Wasilewski G.* Experimental observations and simulations of a triple physical pendulum // Proc. 1st Polish Congr. of Mechanics. Warsaw, 2007.
25. *Awrejcewicz J., Reshmin S.A., Wasilewski G. et al.* Swing up a double pendulum by simple feedback control // Proc. 6th EUROMECH Nonlinear Oscillations Conf. St.Petersburg, 2008.