

# O WPLYWIE ZUZYCIA NA DYNAMIKE TLUMIKA DRGAN

Jan AWREJCEWICZ\*, Yuriy PYRYEV\*

\* Katedra Automatyki i Biomechaniki, Wydział Mechaniczny, Politechnika Łódzka, ul. Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź

[awrejcew@p.lodz.pl](mailto:awrejcew@p.lodz.pl), [yupyryev@p.lodz.pl](mailto:yupyryev@p.lodz.pl)

**Streszczenie:** W pracy zaproponowano i dokonano analizy modelu matematycznego dynamicznego tłumika drgań z tarciem suchym z uwzględnieniem zjawiska zużycia materiału trących się ciał. W szczególności oszacowano wpływ parametrów zużycia na charakter ruchu okresowego badanego układu w oparciu o rozwiązania analityczne i symulacje numeryczne.

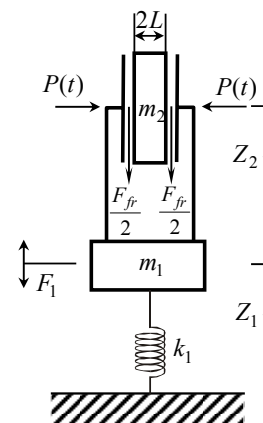
## 1. WPROWADZENIE

Tłumiki dynamiczne należą do jednych z najwcześniej wynalezionych tłumików drgań skrętnych, o czym świadczy np. szeroko opisywany w literaturze tłumik Lanchestera (Den Hartog, 1971; Giergiel, 1990). Składa się on z dwóch połączonych tarcz pracujących jako koła zamachowe i z możliwością realizacji swobodnych obrotów w łożyskach wału. Pomiedzy nimi znajduje się sztywno połączona z wałem piasta. Z kolei do tej piasty przymocowane są okładziny hamulcowe, a do nich tarcze mogą być dociskane za pomocą np. sprężyn, co w konsekwencji prowadzi do pojawienia się momentu sił tarcia suchego. Już wcześniej zauważono (Den Hartog, 1971), że przy spełnieniu określonego warunku podczas rezonansu amplituda drgań w rozpatrywanych modelach matematycznych układu (równania różniczkowe zwyczajne) jest nieskończoną dużą. Ostatnie wyniki prac w tym obszarze teorii drgań konstrukcji (Awrejcewicz i Pyryev, 2006) pokazują jednak, że uwzględnienie procesów wytwarzania ciepła generowanego przez tarcie suche prowadzi do zniknięcia rezonansu, co odpowiada rzeczywistej dynamice rozpatrywanego tłumika. W niniejszej pracy w odróżnieniu od powszechnie stosowanych metod analizy modeli matematycznym tłumika z tarciem suchym uwzględniono również zjawisko zużycia materiałów trących się ciał.

## 2. MODEL MATEMATYCZNY

Na rysunku 1 przedstawiono model dynamicznego tłumika drgań układu Lanchestera z tarciem suchym (Giergiel, 1990). Ciało o masie  $m_1$  modeluje układ podstawowy (wał, łożyska). Drgania układu są wymuszone harmoniczną wymuszającą siłą  $F_1 = F_0 \sin \omega_0' t$ . Wprowadzamy następujące oznaczenia:  $m_1$  – masa,  $k_1$  – współczynnik sprężystości więzów układu głównego,  $F_0$ ,  $\omega_0'$  – odpowiednio amplituda i częstość siły wymuszającej. Do rozpatrywanego układu dodano tłumik (dwie połączone tarcze) o masie  $m_2$  połączone z ciałem o masie  $m_1$  poprzez układ dociskający, w wyniku czego występuje siła tarcia suchego  $F_{fr}$  oraz zużycie ciała. Niech analizowanym elementem trącym będzie sprężysta płyta w kształcie prostopadłościanu ( $2L \times b_1 \times b_2$ ), która może

poruszać się w kierunku  $Z_2$  wzdłuż ścian układu głównego. Początkowa wartość odległości pomiędzy ścianami jest równa grubości płyty  $2L$ . Następnie odległość ta zmniejsza się o wartość  $2U_0 h_U(t)$  (po skręceniu śrub). Uważamy, że funkcja  $h_U(t)$  jest nam znana i ma właściwości:  $h_U(0)=0$ ,  $h_U(t) \rightarrow 1$ ,  $t \rightarrow \infty$ . W wyniku tego procesu na ścianach prostopadłościanu  $X = \pm L$  pojawia się ciśnienie kontaktowe  $P(t)$  i tarcie suche określone funkcją  $F_{fr}(V_r)$ , przy czym  $V_r$  jest prędkością względną płyty i ścian, tzn.  $V_r = \dot{Z}_1 - \dot{Z}_2$ . Przyjmujemy również, że zgodnie z założeniami Amontonsa siła tarcia jest równa  $F_{fr} = 2f(V_r)P$ , gdzie  $f(V_r)$  oznacza współczynnik tarcia kinetycznego. Zakładamy, że  $f(V_r) = f_s \operatorname{sgn}(V_r)$ .



Rys. 1. Model dynamicznego tłumika drgań

W wyniku działania sił tarcia na powierzchni kontaktu  $X = \pm L$  dochodzi do frykcyjnej generacji ciepła i zużycia (Awrejcewicz i Pyryev 2002). Praca sił tarcia przekształca się w energię cieplną i dyssypację mechaniczną. Zakładamy, że pomiędzy płytą i ścianami zachodzi wymiana ciepła zgodnie z założeniami Newtona. Powierzchnie płyty niebędące w kontakcie ze ścianami są izolowane i posiadają wymiary  $L/b_1 \ll 1$ ,  $L/b_2 \ll 1$ . Założenia te pozwalają na przyjęciu modelu jednowymiarowego. Dynamiczne równania ruchu dla układu pokazanego na rysunku 1 mają postać (Giergiel, 1990; Awrejcewicz i Pyryev, 2006):

$$m_1 \ddot{Z}_1 + k_1 Z_1 + 2f(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2)P(t) = F_1, \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{Z}_2 - 2f(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2)P(t) = 0. \quad (2)$$

Aby rozwiązać układ równań (1), (2) musimy dysponować ciśnieniem kontaktowym  $P(t)$ . Dlatego w przyjętym modelu jednowymiarowym rozwiązujemy równania opisujące naprężenia cieplne w płycie (Nowacki, 1970) o postaci

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{\partial U(X,t)}{\partial X} - \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} T(X,t) \right] = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 T(X,t)}{\partial X^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T(X,t)}{\partial t}, \quad X \in (-L, L), \quad (4)$$

przy następujących mechanicznych warunkach brzegowych

$$U(\mp L, t) = \pm U_0 h_U(t) \mp U^w(t), \quad (5)$$

warunkach brzegowych cieplnych

$$\mp \lambda \frac{\partial T(\mp L, t)}{\partial X} + \alpha^T T(\mp L, t) = (1-\eta) f(V_r) V_r P(t), \quad (6)$$

oraz zerowych warunkach początkowych, gdzie  $\nu$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha^T$  są to odpowiednio współczynniki Poissona, przewodnictwa cieplnego, wyrównywania temperatury (dyfuzyjność cieplna), liniowej rozszerzalności cieplnej płyty i przejmowania ciepła od ściany do płyty,  $\eta$  jest częścią mocy sił tarcia traconej na zużycie  $\eta \in [0, 1]$ ,  $U(X, t)$  jest przemieszczeniem w kierunku  $X$ , natomiast  $T(X, t)$  oznacza temperaturę płyty.

W dalszych rozważaniach dla prędkości zużycia ciernego wykorzystujemy równanie (Goryacheva, 1998)

$$\dot{U}^w(t) = K^w |V_r|^m P^n(t), \quad (7)$$

gdzie  $K^w$  oznacza współczynnik zużycia, a  $m$ ,  $n$  są parametrami. Współczynniki  $K^w$ ,  $m$ ,  $n$  zależą od właściwości materiałów, frykcyjnych parametrów sprzężenia, temperatury i innych parametrów.

Naprężenie normalne w płycie można wyznaczyć przy pomocy zależności (Nowacki, 1970)

$$\sigma_{XX}(X, t) = \frac{E}{1-2\nu} \left[ \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\partial U(X, t)}{\partial X} - \alpha T(X, t) \right], \quad (8)$$

gdzie  $E$  jest modułem sprężystości płyty, a  $P(t) = -\sigma_{XX}(\pm L, t)$  oznacza ciśnienie kontaktowe. Wielkości  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $k_1$ ,  $P$ ,  $F_1$  wyrażone są na jednostkę powierzchni kontaktu  $S = b_1 \times b_2$  płyty i ściany.

Całkowanie równania (3) z uwzględnieniem (5), (8) prowadzi do wyznaczenia ciśnienia kontaktowego

$$P(t) = \frac{E(1-\nu) [U_0 h_U(t) - U^w(t)]}{(1+\nu)(1-2\nu)L} + \frac{E\alpha}{(1-2\nu)L} \frac{1}{2} \int_{-L}^L T(\xi, t) d\xi. \quad (9)$$

Temperaturę płyty znajdujemy z rozwiązywania zagadnienia (4) – (6) wykorzystując transformację Laplace'a. Ostateczne w postaci bezwymiarowej rozpatrywane zagadnienie sprowadza się do rozwiązywania równań

$$\ddot{z}_1 + z_1 + f_{fr}(\dot{z}_1 - \dot{z}_2, z_1) = \sin(\omega_0 \tau), \quad (10)$$

$$\mu \ddot{z}_2 - f_{fr}(\dot{z}_1 - \dot{z}_2, z_1) = 0, \quad (11)$$

$$f_{fr}(v_r, z_1) = \begin{cases} f_{slip}, & v_r \neq 0, \\ f_{stick}, & v_r = 0, \end{cases},$$

$$v_r = \dot{z}_1 - \dot{z}_2, \quad f_{slip} = \varepsilon F(v_r) p(\tau), \quad (12)$$

$$f_{stick} = \min \left( \frac{\mu}{1+\mu} |\sin(\omega_0 \tau) - z_1|, \varepsilon p(\tau) \right) \text{sgn}(\sin(\omega_0 \tau) - z_1),$$

$$p(\tau) = h_U(\tau) - u^w(\tau) + \quad (13)$$

$$+ \Omega_1 \int_0^\tau F(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) p(\xi) (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) \dot{G}_p(\tau - \xi) d\xi,$$

$$u^w(\tau) = k^w \int_0^\tau |\dot{z}_1 - \dot{z}_2| p(\xi) d\xi. \quad (14)$$

Temperaturę wyznaczamy ze wzoru

$$\theta(x, \tau) = \Omega_1 \int_0^\tau F(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) p(\xi) (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) \dot{G}_\theta(x, \tau - \xi) d\xi, \quad (15)$$

gdzie

$$\{G_p(\tau), G_\theta(\pm 1, \tau)\} = \frac{1}{\tau_T Bi} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\{2Bi, 2\mu_m^2\} \exp(-\tau_T \mu_m^2 \tau)}{\tau_T \mu_m^2 (Bi(Bi+1) + \mu_m^2)}, \quad (16)$$

przy czym  $\mu_m$  ( $m=1, 2, 3, \dots$ ) są pierwiastkami równania charakterystycznego  $\tan(\mu) = Bi/\mu$ . Powyżej zostały wprowadzone parametry bezwymiarowe

$$x = \frac{X}{L}, \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad \theta = \frac{T}{T_*}, \quad p = \frac{PS}{N_*}, \quad z_n = \frac{Z_n}{L_*}, \quad n = 1, 2,$$

$$\varepsilon = \frac{2N_* f_s}{F_0 S}, \quad Bi = \frac{\alpha^T L}{\lambda}, \quad \tau_T = \frac{t_*}{t_T}, \quad l = \frac{L_*}{L}, \quad \gamma = \frac{E\alpha a}{(1-2\nu)\lambda},$$

$$\Omega_1 = \gamma l, \quad \omega_0 = \omega'_0 / \omega_{01}, \quad \mu = m_2 / m_1, \quad (17)$$

$$\omega_{01} = \sqrt{k_1 / m_1}, \quad t_T = L^2 / a, \quad f(L_* t_*^{-1} v_r) = f_s F(v_r),$$

a w powyższych równaniach wykorzystano następujące parametry:

$$t_* = \frac{1}{\omega_{01}} [\text{s}], \quad L_* = \frac{F_0}{k_1} [\text{m}], \quad N_* = \frac{E(1-\nu)U_0 S}{(1+\nu)(1-2\nu)L} [\text{N}],$$

$$T_* = \frac{(1-\nu)U_0}{\alpha(1+\nu)L} [^\circ\text{C}]. \quad (18)$$

### 3. ANALIZA PROCESU

Analiza numeryczna rozpatrywanego zagadnienia została przeprowadzona przy wykorzystaniu metody Rungego-Kutty i metody kwadratur (Awrejcewicz, Pyryev, 2002) dla funkcji  $h_U(\tau)=0$ ,  $\tau \leq 0$ ,  $h_U(\tau)=1$ ,  $\tau > 0$ ,  $m=n=1$ . Dynamiczny tłumik drgań z tarciem suchym może nie

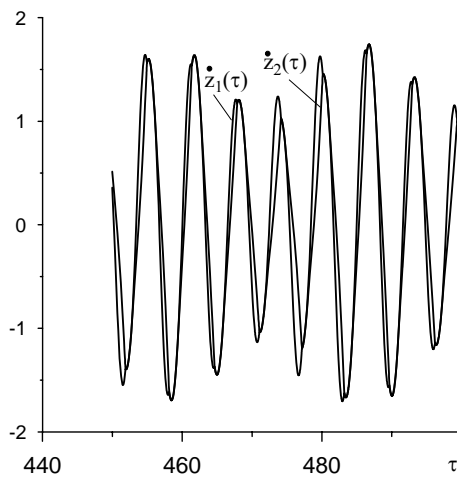
spełniać swego przeznaczenia (Den Hartog, 1971). Jak dowiedziono w pracy (Awrejcewicz i Pyryev, 2007), uwzględnienie wytwarzania ciepła na powierzchni kontaktu tłumika i ciała drgającego oraz rozszerzenie cieplne tłumika w modelu matematycznym tłumika dynamicznego powoduje zniknięcie zjawiska rezonansu. Układ rzeczywisty podlega samoregulacji (dobiera optymalne ciśnienie kontaktowe wskutek tarcia i rozszerzenia cieplnego). Rolę regulatora odgrywa termosprężysta płyta rozszerzająca się odpowiednio do warunków prędkości ślizgania i warunków wymiany ciepła. Uwzględnienie zjawiska zużycia prowadzi do zużycia płyty.

W pracy dokonano analizy wpływu wartości współczynnika zużycia  $k^w$  na ruch układu z dynamicznym tłumikiem drgań z tarcieniem suchym. Zostały wprowadzone następujące bezwymiarowe parametry układu:  $\mu=0.8$ ,  $\varepsilon=0.4$ . Dla bezwymiarowej częstości  $\omega_0=1$  bez uwzględnienia wytwarzania cieplnego i zużycia w układzie pojawia się rezonans (Awrejcewicz, Pyryev, 2007) przy spełnieniu warunków

$$\varepsilon_0 < \varepsilon, \sqrt{\omega_+} < \omega_0 < \sqrt{\omega_-}, \quad (19)$$

gdzie

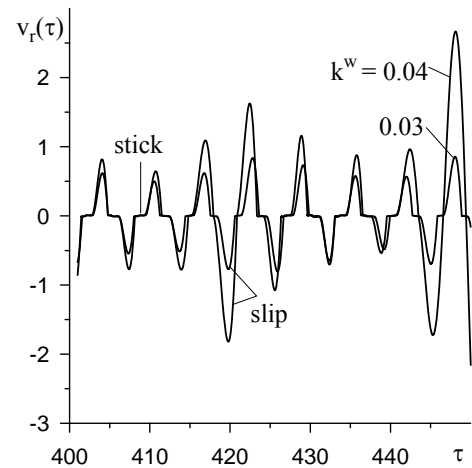
$$\varepsilon_0 = \frac{\pi\mu}{4(1+\mu)}, \quad \omega_{\pm} = \frac{\varepsilon}{(1+\mu)(\varepsilon \pm \varepsilon_0)}. \quad (20)$$



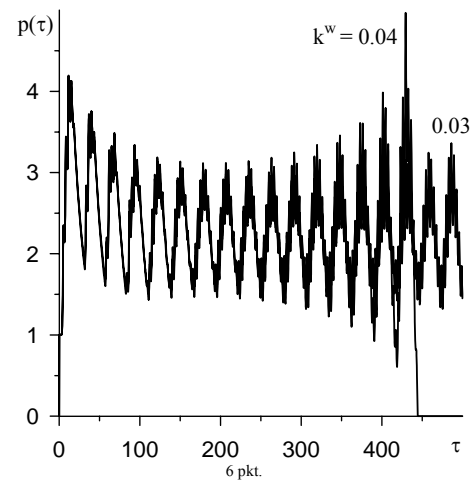
Rys. 2. Ewolucja w czasie bezwymiarowej prędkości

Uwzględnienie rozszerzalności cieplnej płyty ( $\Omega_1=0.1$ ,  $\tau_f=0.1$ ,  $Bi=1$ ) prowadzi do zniknięcia rezonansu. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 2-7 dla różnych parametrów zużycia  $k^w$ . Na rysunku 2 pokazano zależność bezwymiarowej prędkości  $\dot{z}_1(\tau)$  i  $\dot{z}_2(\tau)$  od bezwymiarowego czasu  $\tau=t/t_*$  dla bezwymiarowego parametru zużycia  $k^w=0.03$ .

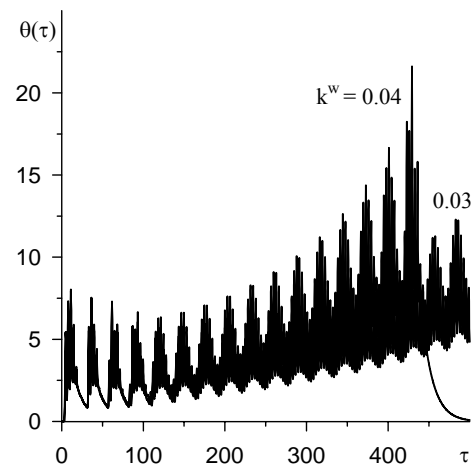
Zależność bezwymiarowej prędkości względnej  $v_r(\tau)$ , bezwymiarowego ciśnienia kontaktowego  $p(\tau)$  i temperatury powierzchni kontaktu  $\theta(\tau)$  od bezwymiarowego czasu  $\tau=t/t_*$  pokazano odpowiednio na rysunkach 3, 4 i 5 ( $k^w=0.03$  i  $k^w=0.04$ ).



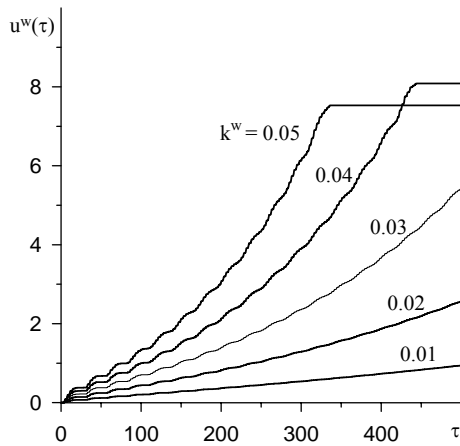
Rys. 3. Ewolucja w czasie bezwymiarowej prędkości względnej dla różnych wartości parametru zużycia



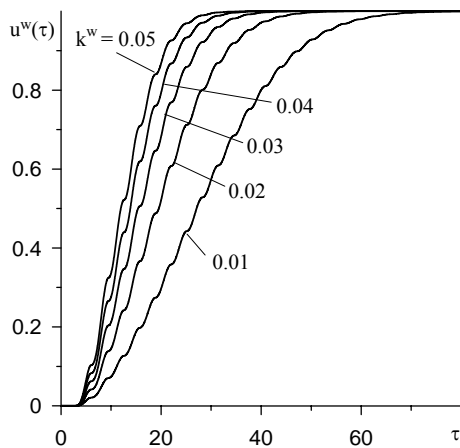
Rys. 4. Ewolucja w czasie ciśnienia kontaktowego dla różnych wartości parametru zużycia



Rys. 5. Ewolucja w czasie bezwymiarowej temperatury powierzchni kontaktu dla różnych wartości parametru zużycia



Rys. 6. Ewolucja w czasie bezwymiarowego zużycia dla różnych wartości parametru zużycia z uwzględnieniem rozszerzalności cieplnej płyty ( $\Omega_1 = 0.1$ )



Rys. 7. Ewolucja w czasie bezwymiarowego zużycia bez uwzględnienia rozszerzalności cieplnej płyty ( $\Omega_1 = 0$ ).

Również na rysunkach 6 i 7 przedstawiono wykresy zależności bezwymiarowego zużycia  $u^w(\tau)$  od bezwymiarowego czasu  $\tau$  dla różnych wartościach bezwymiarowego parametru zużycia ( $k^w=0.01-0.05$ ).

#### 4. WNIOSKI

Dla małej wartości współczynnika zużycia ( $k^w=0.01$ ) zużycie rośnie prawie liniowo (rys. 6). Układ przebywa w stanie drgań samowzbudnych dla wartości współczynnika zużycia  $k^w=0.01-0.03$ . Układ drga z częstotliwością  $T_0 \approx 2\pi/\omega_0 = 2\pi$ . Zmiany w czasie ciśnienia kontaktowego oraz temperatury na powierzchni kontaktu posiadają okres  $T_1 \approx T_0/2 = \pi$  (rys. 4, 5). Dla bezwymiarowego czasu  $\tau \in (445, 500)$  analiza wykresów przedstawionych na rysunkach 2 i 3 prowadzi do wniosku, że stan szepienia (stick) kontaktujących się ciał okresowo przechodzi w stan poślizgu (slip). W tym przypadku, wartość zużycia jest mniejsza od wartości rozszerzenia cieplnego płyty i czas przebywania układu w kontakcie jest „nieograniczony”. Zużycie rośnie (rys. 6), ale temperatura również wzrasta i kompensuje zużycie (rys 5,  $k^w=0.03$ ). W przypadku  $k^w > 0.03$ , gdy wartość zużycia płyty jest większa od wartości jej rozszerzenia cieplnego czas przebywania

układu w kontakcie jest ograniczony (rys. 4 dla  $k^w=0.04$  i rys. 6 dla  $k^w=0.04, 0.05$ ), a następnie mamy do czynienia ze zjawiskiem rezonansu. Na rysunku 3 dla  $k^w=0.04$  widzimy początek nieograniczonego wzrostu amplitudy prędkości względnej. Analiza wykresów na rysunku 6 prowadzi do wniosku, że przy uwzględnieniu rozszerzalności cieplnej płyty wartość zużycia jest większa ze względu na wartość wstępnego ściśnięcia płyty (bezwymiarowa wartość wynosi 1). Po zużyciu płyty ciśnienie kontaktowe osiąga wartość zerową (rys 4,  $k^w=0.04$ ) i temperatura płyty spada do zera (rys 5,  $k^w=0.04$ ).

Zużycie płyty w przypadku nie uwzględnienia generacji cieplnej ( $\Omega_1=0$ ) przedstawiono na rysunku 7. Wzrost współczynnika zużycia prowadzi do zmniejszenia czasu przebywania układu w kontakcie.

#### LITERATURA

1. **Awrejcewicz J., Pyryev Yu.** (2002), Thermoelastic contact of a rotating shaft with a rigid bush in conditions of bush wear and stick-slip movements, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 40, 1113-1130.
2. **Awrejcewicz J., Pyryev Yu.** (2004), Contact phenomena in braking and acceleration of bush-shaft system, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 27, No 5, 433-454.
3. **Awrejcewicz J., Pyryev Yu.** (2005), Thermo-mechanical model of frictional self-excited vibrations, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 47, 1393-1408.
4. **Awrejcewicz J., Pyryev Yu.** (2006), On the heat transfer influence on dynamical damper self-vibrations, *Proceedings of the 22nd International Conference on Vibrations in Physical Systems, Poznań-Będlewo, Poland, April 18-22, 2006*, 65-72.
5. **Awrejcewicz J., Pyryev Yu.** (2007), Dynamical damper of vibration with thermo-elastic contact, *Archive of Applied Mechanics* (to appear).
6. **Den Hartog J. P.** (1971), *Drgania mechaniczne*, PWN, Warszawa.
7. **Giergiel J.** (1990), *Tłumienie drgań mechanicznych*, PWN, Warszawa.
8. **Goryacheva I. G.** (1998), *Contact mechanics in tribology (Solid mechanics and its applications)*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
9. **Nowacki W.** (1970), *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa.

#### ON THE WEAR INFLUENCE ON A DAMPER DYNAMICS

**Abstract:** A novel mathematical model of a dynamic vibration damper taking into account wear of contacting bodies is proposed and studied. Both analytical and numerical approaches are applied to analyze the system behavior of various parameters. In particular, influence of wear on a periodic dynamics of the system is reported.

Pracę wykonano w ramach realizacji projektu badawczego nr 4 TO7C 044 29 finansowanego ze środków na naukę w latach 2005-2008 Ministerstwa Edukacji i Nauki.