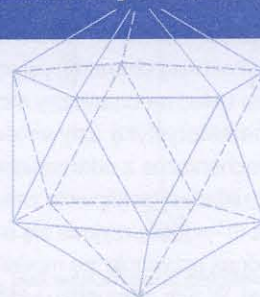




Osiągnięcia Nauki i Techniki Kierunki Rozwoju i Metody

KONWERSATORIUM POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
Wkładka nr 11 do Miesięcznika Politechniki Warszawskiej nr 4/2007

Redaktor merytoryczny — Stanisław Janeczko



Dynamika regularna i chaotyczna w układach technicznych z tarciem i uderzeniami

Na podstawie odczytu wygłoszonego w dniu 14 grudnia 2006 roku

Jan Awrejcewicz i Grzegorz Kudra

Katedra Automatyki i Biomechaniki
Politechnika Łódzka
awrejcew@p.lodz.pl, grekudra@p.lodz.pl

W fizyce i technice spotykamy wiele układów, które można opisać jako pracujące w różnych procesach, przy czym czas przejścia z jednego reżimu do innego jest bardzo krótki w porównaniu z czasem pracy układu w poszczególnych procesach. W takich przypadkach zwykle możliwe jest przyjęcie, że przejście z jednego reżimu do drugiego jest natychmiastowe i dyskretne. W ten sposób obiekt taki modeluje się jako układ dynamiczny kawałkami gładki (PWS) z pewnymi rodzajami nieciągłości, którego dynamikę można opisać równaniem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

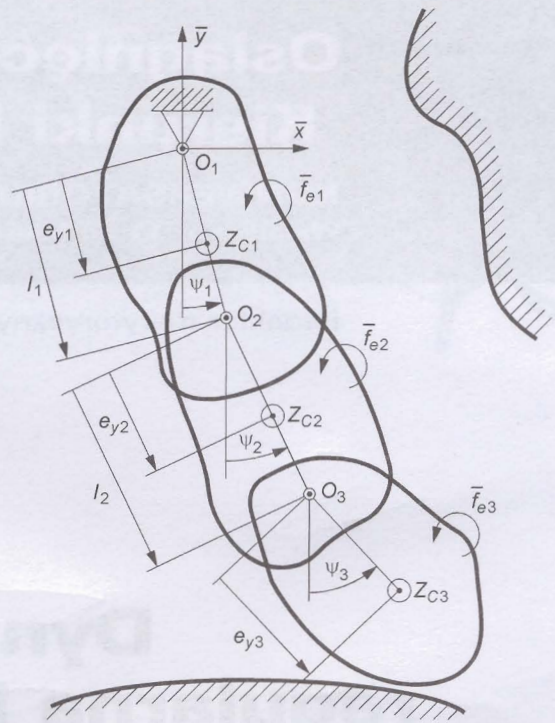
gdzie $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ reprezentuje stan układu w chwili t , natomiast odwzorowanie $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją kawałkami gładką, czyli przestrzeń fazowa $D \in \mathbb{R}^n$ jest podzielona na skończoną ilość podobszarów V_i (we wnętrzu których funkcja \mathbf{f} jest gładka) rozdzielonych $(n-1)$ -wymiarowymi hiperpowierzchniami $\Sigma_{i,j}$, również co najmniej kawałkami gładkimi.

Gdy ruch układu odbywa się we wnętrzu jednego z obszarów V_i , to układ zachowuje się jak układ gładki. Natomiast gdy orbita przecina jedną z powierzchni $\Sigma_{i,j}$, układ wykazuje zachowanie nieciągłe. W zależności od stopnia nieciągłości, układy dynamiczne kawałkami gładkie (PWS) możemy podzielić na trzy grupy:

- I. Układy z nieciągłym Jakobianem $D\mathbf{f}$, z ciągłym lecz niegładkim polem wektorowym \mathbf{f} oraz z gładkim stanem układu \mathbf{x} (funkcja \mathbf{f} jest klasy C^0).
- II. Układy z nieciągłym polem wektorowym \mathbf{f} oraz z ciągłym lecz niegładkim wektorem stanu \mathbf{x} .
- III. Układy z nieciągłym wektorem stanu \mathbf{x} . W tym przypadku za każdym razem, gdy układ wchodzi w kontakt z jedną z powierzchni nieciągłości $\Sigma_{i,j}$, jego stan doznaje skoku $\mathbf{x}^+ = \mathbf{g}(\mathbf{x}^-)$, gdzie \mathbf{x}^- oznacza stan układu bezpośrednio przed kontaktem z powierzchnią $\Sigma_{i,j}$, \mathbf{x}^+ jest stanem układu bezpośrednio po kontakcie, natomiast $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ jest funkcją co najmniej kawałkami gładką na powierzchniach $\Sigma_{i,j}$.

Układy dynamiczne kawałkami gładkie (PWS) grupy II (również grupy I jako podklasy) są też nazywane **układami Filippowa**, dla których istnieje osobna teoria. Układy elektroniczne z elementami posiadającymi charakterystyki, które mogą być traktowane jako nieciągłe (diody, tranzystory itp.) często są modelowane jako układy dynamiczne kawałkami gładkie (PWS). Wśród układów mechanicznych często spotyka się układy z tarciami suchymi, które można modelować jako układy o skokowej charakterystyce tłumienia (grupa II). Poza tym układ mechaniczny może posiadać także nieciągłą charakterystykę sztywności. W szczególności układy mechaniczne z uderzeniami mogą być modelowane jako układy o gwałtownie zmieniającej się sztywności (grupa II) — jeśli przyjmie się model ciał podatnych. Zwykle jednak przyjmuje się model sztywnych zderzających się ciał. W tym przypadku układ jest układem dynamiczne kawałkami gładkie (PWS) grupy III, gdyż podczas kontaktu układu z powierzchnią $\Sigma_{i,j}$ następuje skokowa zmiana prędkości odpowiednio do prawa Newtona opartego na współczynniku restytucji. Układ taki jest faktycznie układem o więzach jednostronnych opisanych nierównościami algebraicznymi. Należy zauważyć, że jest to równoważne impulsowi funkcji \mathbf{f} typu delty Diraca po jednej ze stron powierzchni $\Sigma_{i,j}$. Jednak jak już wielokrotnie zostało pokazane, model podatnych zderzających się ciał jest zbieżny do modelu zderzeń opartego na współczynniku restytucji, gdy sztywność ciał rośnie do nieskończoności. Ponadto w pewnych układach mogą występować jednocześnie różne rodzaje nieciągłości. Przykładem może być układ mechaniczny, w którym występują jednocześnie uderzenia i tarcie suche. Oba te zjawiska mogą być od siebie niezależne lub model uderzeń może uwzględniać zjawiska tarcia suchego na powierzchni zderzających się ciał.

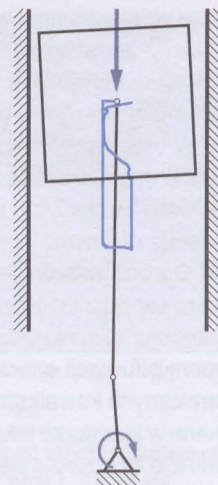
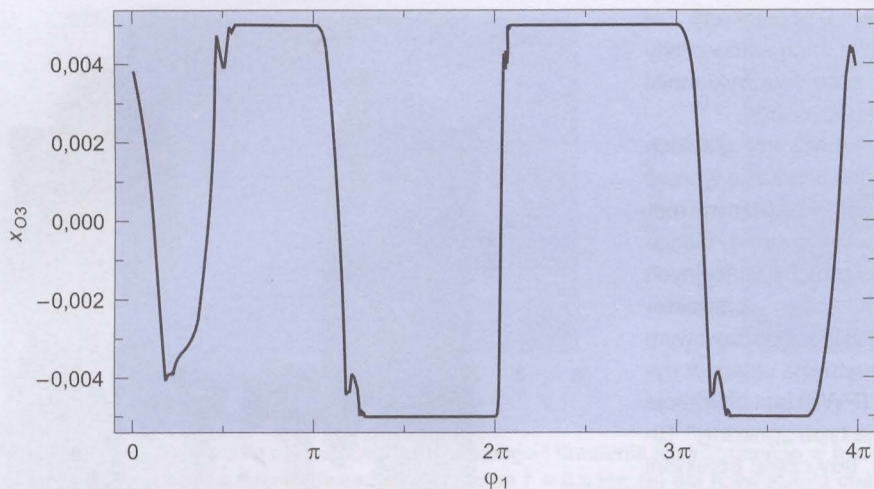
Po zdefiniowaniu modelu matematycznego, następnym problemem do rozwiązania jest uzyskanie rozwiązania numerycznego tak określonych równań PWS, czyli symulacja układu. Zauważmy, że można to zrobić „sklejając” rozwiązania gładkie, otrzymane metodami klasycznymi pomiędzy kolejnymi punktami niegładkości i wykrywając te punkty niegładkości. W każdym z tych punktów możliwe jest też wprowadzenie odwzorowania stanu układu do innego stanu poprzez funkcję \mathbf{g} . Jeśli ilość punktów niegładkości jest skończona w skończonym czasie, to taka aproksymacja jest wystarczająca. Może jednak się zdarzyć, że rozwiązanie w pewnym czasie nie opuszcza określonej powierzchni $\Sigma_{i,j}$ i wtedy konieczna jest redukcja formalnego rzędu problemu w tym przedziale lub też problem redukuje się do zagadnienia opisanego za pomocą równań algebraiczno-różniczkowych (DAEs). Zanim pojawi się stan trwałego pokrycia trajektorii i powierzchni nieciągłości $\Sigma_{i,j}$, może dojść także do nieskończenia wielu przebiegów tej powierzchni przez trajektorię. W celu aktywnego rozwiązania tego zagadnienia numerycznie można „ustalić sztucznie” pewien najkrótszy czas pomiędzy kolejnymi



Rysunek 1. Model potrójnego wahadła fizycznego

przebiegami, po przekroczeniu którego następuje trwały kontakt trajektorii i powierzchni $\Sigma_{i,j}$.

Opisane podejście autorzy zastosowali przy modelowaniu i analizie numerycznej płaskiego potrójnego wahadła ze sztywnymi ogranicznikami ruchu [1–3], pokazanego na rysunku 1. Układ został „zamodelowany” jako układ III typu. Przeszkody stanowią powierzchnie niegładkości w przestrzeni stanów, a przebiecie jednej z nich przez trajektorię jest wykrywane i stan układu doznaje skoku realizowanego poprzez funkcję \mathbf{g} . Funkcja \mathbf{g} określa prawo uderzenia układu o przeszkodę o zadanej powierzchni, przy czym przyjęto, że powierzchnia przeszkody jest gładka, czyli nie występuje tarcie suche. Oznacza to, że impuls uderzenia jest prostopadły do powierzchni uderzenia. Wspomniany warunek oraz dodatkowe równanie określające zmianę wektora prędkości w kierunku prostopadłym do powierzchni uderzenia pozwalają, zgodnie z definicją współczynnika restytucji, określić prędkości po uderzeniu o pojedynczą przeszkodę. Uwzględniono również możliwość pojawienia się trwałego kontaktu układu z jedną lub większą liczbą przeszkód — bardzo często poprzedzonego „zagęszczeniem” w czasie do nieskończoności ilości zderzeń. Problem ten został rozwiązany w sposób opisany powyżej. Kontakt trwały układu z przeszkodą wymagał także określenia takiej reakcji przeszkody, która zapewni ten kontakt. Zgodnie z przedstawionymi założeniami autorzy zbudowali model układu korbowego silnika spalinowego czterosurowowego (będącego szczególnym przypadkiem potrójnego wahadła), w którym tłok w cylindrze porusza się z luzem i dochodzi do uderzeń [3]. Rysunek 2 przedstawia wynik symulacji takiego układu

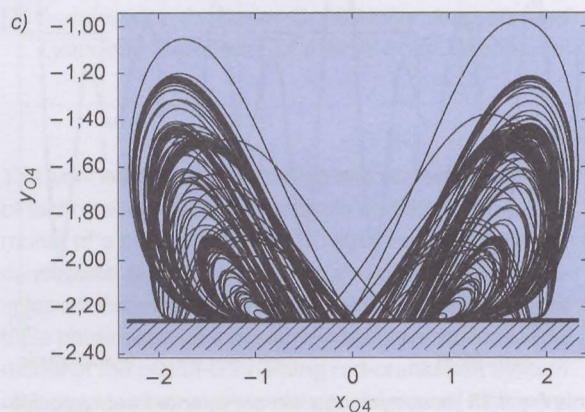
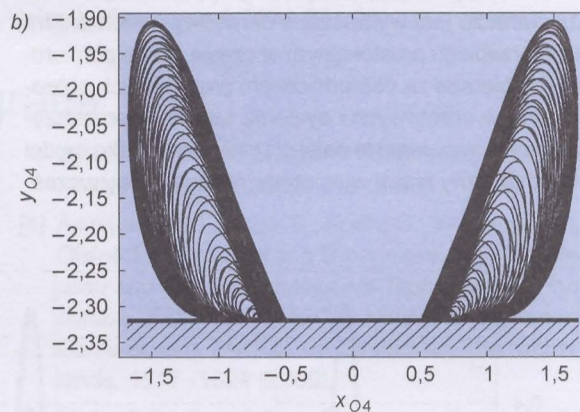
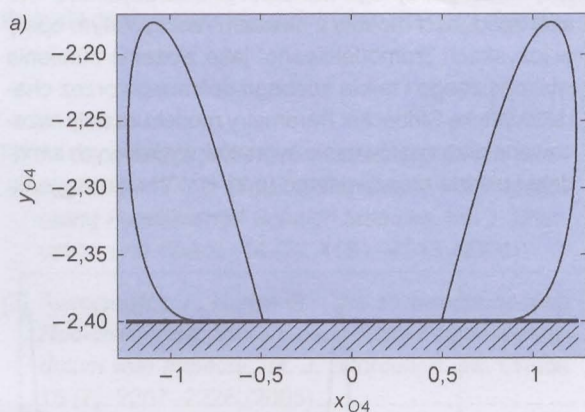


Rysunek 2. Odpowiedź układu korbowego dla parametrów współczynnika restytucji $e = 0,5$ (x_{O3} jest współrzędną położenia osi sworznia tłokowego wzdłuż osi prostopadłej do osi cylindra, φ_1 jest położeniem kątowym wału korbowego)

dla współczynnika restytucji 0,5. Jest to rozwiązanie okresowe opisujące typowe zachowanie się tłoka, polegające na jego sześciokrotnym przechodzeniu z jednej strony cylindra na drugą w czasie jednego cyklu pracy silnika.

Kolejnym krokiem było badanie stabilności orbit w tego typu układach. Ponieważ są to układy kawałkami gładkie, to na każdym odcinku, na którym trajektoria jest gładka, również zaburzenia rozchodzą się według typowych równań otrzymanych z linearyzacji równań układu wokół badanej orbity. Natomiast w punktach nie-

gładkości należy odpowiednio przekształcić stan zaburzenia [1–3, 5] w zależności od Jakobianów Dg i Dh (gdzie $h = 0$ wyznacza powierzchnię przeszkody). Podejście takie pozwala na stosowanie klasycznych metod do obliczania wykładników Lapunowa, badania stabilności orbit okresowych i badania klasycznych bifurkacji orbit okresowych w układzie mechanicznym ze sztywnymi ogranicznikami ruchu. Na rysunku 3 zostały przedstawione przykładowe rozwiązania okresowe, quasi-okresowe i chaotyczne w układzie potrójnego wahadła z harmonicznym wymuszeniem pierwszego wahadła

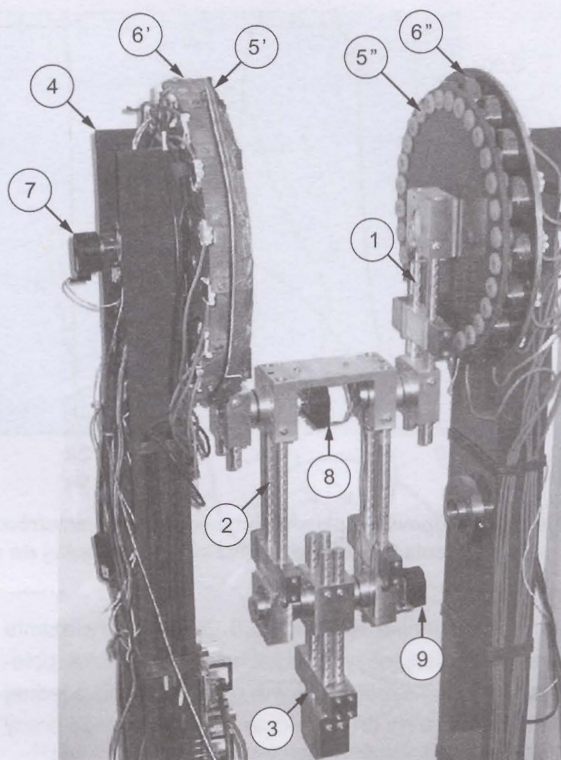


Rysunek 3. Rozwiązanie okresowe (a), quasi-okresowe (b) i chaotyczne (c) w układzie potrójnego wahadła z wymuszeniem okresowym i poziomą przeszkodą (x_{O4} i y_{O4} są współrzędnymi końcówki trzeciego wahadła w prostokątnym układzie współrzędnych umieszczonym w płaszczyźnie ruchu wahadła). Wykładniki Lapunowa: (b) — 0,00, 0, -0,10, -1,05, -2,0, $-\infty$, $-\infty$; (c) — 0,01, 0, -0,12, -0,74, -1,92, $-\infty$, $-\infty$. Współczynnik restytucji $e = 0$

i przy wprowadzeniu tylko z poziomej przeszkody. Zauważmy, że ze względu na istnienie segmentów orbity o trwałym kontakcie z przeszkodą, po dwa wykładniki Lapunowa są równe minus nieskończoności.

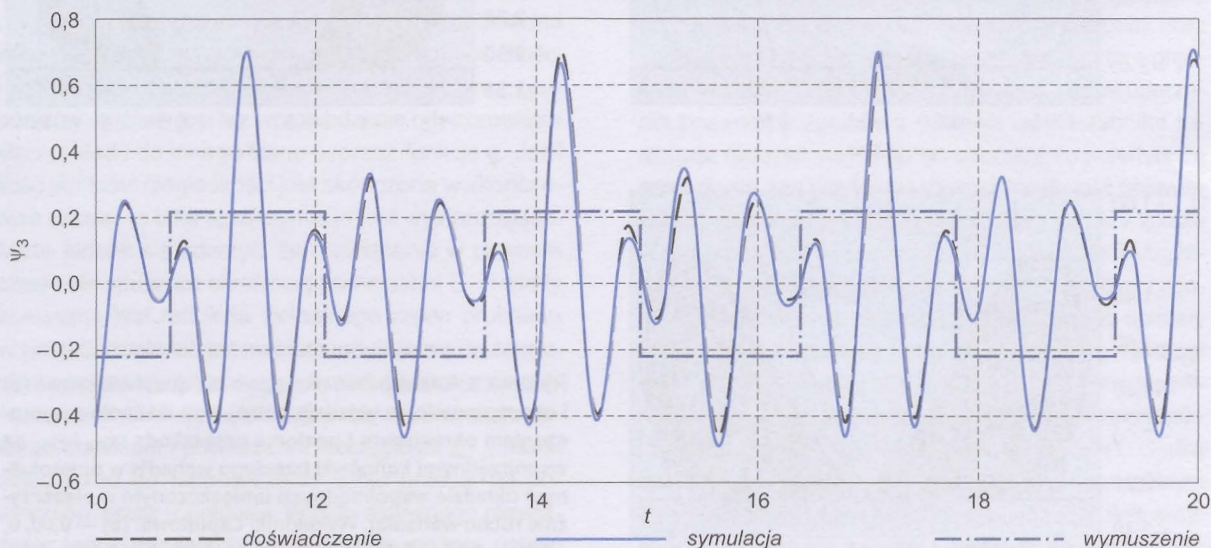
W układach dynamicznych kawałkami gładkimi (PWS) mogą występować wszystkie bifurkacje typowe dla układów gładkich i można je badać klasycznymi metodami z pewnymi, wcześniej omówionymi modyfikacjami. Oprócz wspomnianych rozwiązań bifurkacyjnych mogą się pojawić jeszcze inne bifurkacje — charakterystyczne tylko dla układów nieregularnych. Podstawowym typem bifurkacji charakterystycznym dla układów dynamicznych kawałkami gładkimi (PWS) jest bifurkacja znana w literaturze jako **bifurkacja typu „grazing”**. Bifurkacja ta pojawia się wówczas, gdy część trajektorii (np. orbity okresowej, quasi-okresowej lub innej) staje się styczna do jednej z powierzchni nieciągłości (gdy powolnej zmianie ulega parametr bifurkacyjny). Istnieje bardzo szczególna cecha bifurkacji typu „grazing” odróżniająca ją od klasycznych bifurkacji lokalnych gładkich pól wektorowych. Nie można jej przewidzieć obserwując Jakobian bezpośrednio przed bifurkacją, ponieważ trajektoria zachowuje się tak jak orbita układu gładkiego i nie ma żadnej informacji o tym, kiedy nastąpi kontakt z powierzchnią nieciągłości, co może prowadzić nieraz do dramatycznych zmian jakościowych zachowania się układu.

Oprócz badań numerycznych potrójnego wahadła autorzy prowadzą równoległe badania eksperymentalne [4]. W lutym 2005 roku w Katedrze Automatyki i Biomechaniki zakończono budowę i uruchomiono stanowisko potrójnego wahadła fizycznego (rysunek 4). Pierwsze wahadło jest wymuszane okresowym momentem siły o przebiegu prostokątnym w czasie. Dane pomiarowe są zbierane za pośrednictwem precyzyjnych potencjometrów obrotowych i systemu LabView, przekazywane do komputera i tu dalej przetwarzane. Jako model matematyczny został wykorzystany zbudowany wcześ-

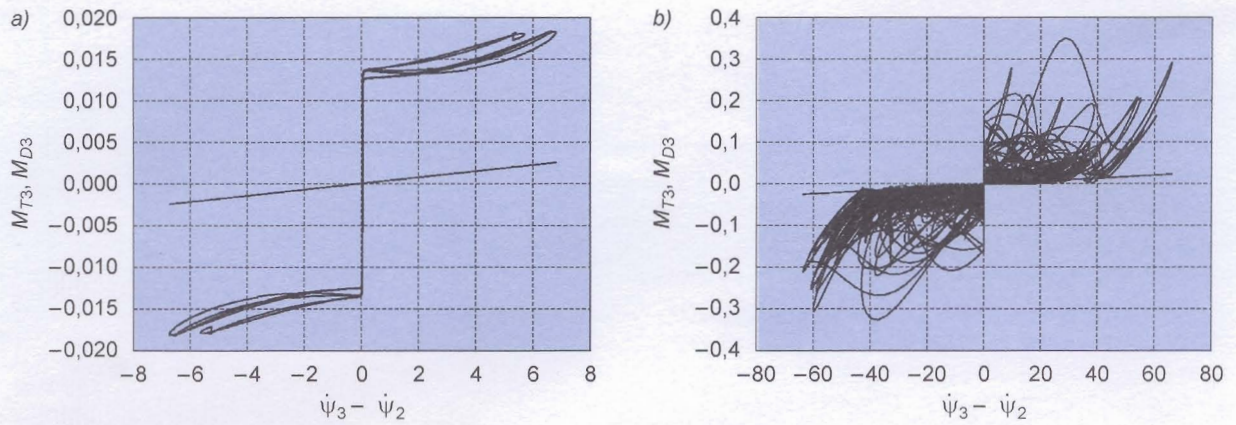


Rysunek 4. Potrójne wahadło fizyczne — model doświadczalny: 1, 2, 3 — ogniw; 4 — statyw; 5', 5'' — tarcze wirników (tarcza 5' niewidoczna); 6', 6'' — tarcze stojanów (tarcza 6' z optycznym komutatorem); 7, 8, 9 — przetworniki położenia kąowego ogniw

niej model potrójnego wahadła. W celu uzyskania lepszej zgodności modelu z układem rzeczywistym opory w łożyskach „zamodelowano” jako złożenie tłumienia wiskotycznego i tarcia suchego opisanego przez charakterystykę Stribeck. Parametry modelu zostały oszacowane przez porównanie sygnałów wyjściowych z modelu i układu rzeczywistego (przy tym samym sygnale



Rysunek 5. Rozwiązanie okresowe dla częstotliwości wymuszenia $f = 0,35$ Hz otrzymane z eksperymentu i numerycznie



Rysunek 6. Charakterystyki momentów tarcia suchego i tłumienia wiskotycznego w trzecim przegubie: (a) dla rozwiązania okresowego przy częstotliwości wymuszenia $f = 0,6$ Hz; (b) dla rozwiązania chaotycznego przy $f = 0,73$ Hz

wejściowym), a jako kryterium dopasowania przyjęto sumę kwadratów odchyłek między sygnałami w kolejnych punktach próbkowania. Do minimalizacji kryterium (dla kilku rozwiązań okresowych) użyta została metoda sympleksów, z tym, że wraz z parametrami oszacowania podlegały również warunki początkowe rozwiązania numerycznego.

Na rysunku 5 przedstawiono porównanie rozwiązań otrzymanych z eksperymentu i z modelu matematycznego, a na rysunku 6 — charakterystyki momentów tarcia suchego i tłumienia wiskotycznego w trzecim przegubie dla przykładowych rozwiązań — okresowego i chaotycznego. Z zaprezentowanych rysunków wynika, że otrzymano bardzo dobrą zgodność eksperymentu i wyników otrzymanych z modelu numerycznego [4]. Wykryte zostały numerycznie różne obszary chaosu,

których istnienie zostało następnie potwierdzone eksperymentalnie. Potwierdzenie to dotyczy zarówno granic poszczególnych obszarów, jak i pewnych jakościowych własności rozwiązań chaotycznych — np. pełnych obrotów wykonywanych przez poszczególne wahadła. Prowadzi to do wniosku, że zastosowany model matematyczny wahadła wraz z parametrami może służyć jako narzędzie do szybkiego wyszukiwania i wyjaśniania różnorodnych zjawisk występujących w układzie rzeczywistym.

Na koniec tego krótkiego streszczenia do wykładu wygłoszonego w ramach „Konwersatorium” należy podkreślić, że prezentowane tu wyniki uzyskano dzięki wsparciu finansowemu Ministerstwa Edukacji i Szkolnictwa Wyższego w latach 2005–2008 w ramach projektu badawczego 4 T07A 031 28.

Bibliografia

- [1] Awrejcewicz J., Kudra G., Lamarque C.-H.: *Investigation of Triple Physical Pendulum with Impacts Using Fundamental Solution Matrices*. *Int. J. Bifurcation and Chaos* **14** (2), 4191–4213 (2004).
- [2] Awrejcewicz J., Kudra G.: *The Piston-connecting Rod-crankshaft System as a Triple Physical Pendulum with Impacts*. *Int. J. Bifurcation and Chaos* **15** (7), 2207–2226 (2005).
- [3] Awrejcewicz J., Kudra G.: *Stability Analysis and Lyapunov Exponents of a Multi-body Mechanical System with Rigid Unilateral Constraints*. *Nonlinear Analysis* **63** (5–7), 909–918 (2005).
- [4] Awrejcewicz J., Supeł B., Kudra G., Wasilewski G., Olejnik P.: *Numerical and Experimental Study of Regular and Chaotic Behaviour of Triple Physical Pendulum*. *Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference, ENOC2005, Eindhoven, The Netherlands, 1817–1824* (2005).
- [5] Müller P.C.: *Calculation of Lyapunov Exponents for Dynamic Systems with Discontinuities*. *Chaos, Solitons and Fractals* **5**, 1671–1691 (1995).

Abstract

The work is devoted to modeling and numerical analysis of technical systems with impacts and dry friction. The model of a mechanical system subjected to unilateral constraints, together with the model of stability, are developed. Examples of analysis are presented for plane triple physical pendulum with rigid limiters motions. The model of the piston-connecting rod-crankshaft system of the combustion engine, as a special case of triple pen-

dulum, is also build and gives results conforming experiments. Then an experimental rig of the triple physical pendulum with the first body periodically forced is built. A mathematical model of the real pendulum is created, where friction in joints is modeled as a composition of dry friction and damping. Good agreement between model and real system is obtained.