

РЕГУЛЯРНОЕ И ХАОТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО КВАЗИАВТОНОМНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С КУЛОНОВЫМ И ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

Представлен новый подход к исследованию появления хаотических колебаний в нелинейных динамических системах, который основан на анализе блуждающих траекторий. Исследованы условия появления хаотических фрикционных колебаний квазиавтономного осциллятора, совершающего прямолинейные движения под действием нелинейной восстанавливающей силы по движущейся горизонтальной поверхности с кулоновым и вязким трением в условиях малого периодического возмущения. Продемонстрирована хорошая согласованность результатов исследования с аналитической хаотической границей, полученной с помощью метода Мельникова.

Введение

Хорошо известно, что хаотическое поведение нелинейных динамических систем может быть диагностировано с помощью вычисления показателей Ляпунова в гладких [1, 2] и негладких [3, 4] случаях. В работе [6] был предложен новый численный метод для обнаружения регулярной и хаотической динамики нелинейных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Этот подход тестировался на уравнении Дуффинга и системе Лоренца и был успешно применен к исследованию негладкой механической системы с трением с двумя степенями свободы. Среди прочих результатов было показано, что предложенный подход проще реализуется и требует гораздо меньших затрат вычислительного времени, чем хорошо известный алгоритм Вульфа [2].

Для предсказания начала хаотических фрикционных колебаний осциллятора с одной степенью свободы, находящегося в условиях очень слабого внешнего периодического воздействия, в статье [7] был применен метод Мельникова. Было показано, что с помощью аналитического исследования можно предсказать фрикционный хаос, соответствующий статическому и динамическому трению, используя очень малое внешнее возмущение. Были найдены критические хаотические граничные значения параметров системы, при которых бесконечно малые внешние периодические возмущения, приложенные к автономной системе, являются причиной возникновения хаотических колебаний. Достоверность применяемого подхода подтверждалась численным моделированием и отображениями Пуанкаре. Полученные аналитические результаты позволяют анализировать хаотическую фрикционную динамику и управлять ею.

В настоящей статье мы получили области хаотической фрикционной динамики вышеупомянутого осциллятора в плоскости управляющих параметров системы с помощью метода, основанного на анализе блуждающих траекторий, развитого в [5,6]. Аналитические и численные результаты сравниваются и обсуждаются. Нам удалось получить более точную оценку условий появления хаотических колебаний в исследуемой системе по сравнению с аналитическим предсказанием, полученным в [7].

Фрикционный осциллятор с внешним периодическим возмущением

Рассмотрим механическую систему, представляющую собой массу m , движущуюся по горизонтальной поверхности с кулоновым и вязким трением (как показано на рис. 1). Скорость движения поверхности – v_* . Масса m прикреплена к неподвижной точке с помощью пружины дуффинговского типа. k_1 и k_2 – коэффициенты жесткости пружины. Сила трения θ действует между массой m и движущейся поверхностью и зависит от относительной скорости. Дополнительно к массе m приложено малое периодическое внешнее возбуждение $\Gamma \cos \omega t$. Γ и ω – амплитуда и частота внешнего возбуждения соответственно. Эти фрикционные квазиавтономные колебания с одной степенью свободы описываются следующим дифференциальным уравнением второго порядка:

$$m\ddot{x} - k_1 x + k_2 x^3 = \varepsilon [\Gamma \cos \omega t - \theta(\dot{x} - v_*)],$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр возмущения. Сила кулонова и вязкого трения θ характеризуется следующей зависимостью от относительной скорости:

$$\theta(\dot{x} - v_*) = \theta_0 \operatorname{sign}(\dot{x} - v_*) - A(\dot{x} - v_*) + B(\dot{x} - v_*)^3.$$

Эта модель трения представлена на рис. 2. θ_0 , A , B – коэффициенты трения.

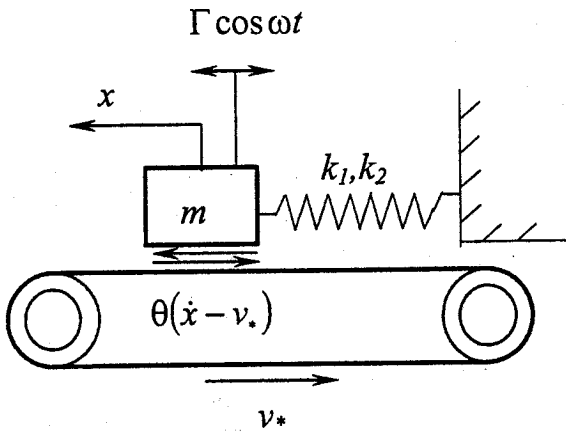


Рис. 1. Фрикционный квазиавтономный осциллятор с одной степенью свободы

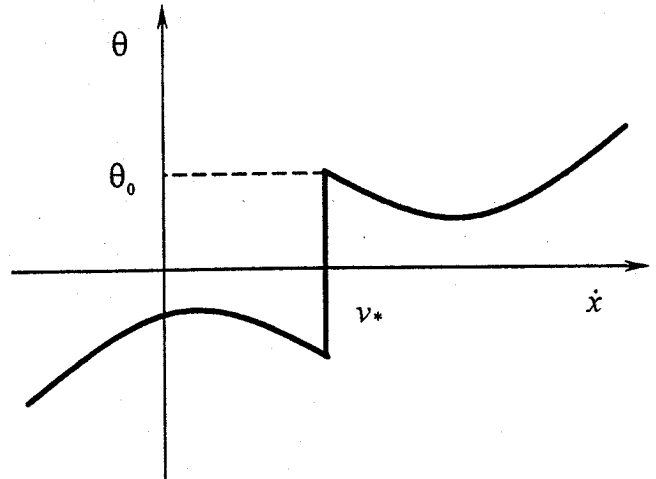


Рис. 2. Модель трения

Уравнение движения осциллятора можно переписать в безразмерной форме:

$$\ddot{x} - ax + bx^3 = \varepsilon[\gamma \cos \omega t - T(\dot{x} - v_*)], \quad (1)$$

где

$$T(\dot{x} - v_*) = T_0 \operatorname{sign}(\dot{x} - v_*) - \alpha(\dot{x} - v_*) + \beta(\dot{x} - v_*)^3$$

и

$$a = k_1/m, b = k_2/m, \gamma = \Gamma/m, T = \theta/m, T_0 = \theta_0/m, \alpha = A/m, \beta = B/m.$$

Функция Мельникова для механической системы (1) была получена в работе [7]. В результате вычисления соответствующих несобственных интегралов, критерий Мельникова был представлен следующим неравенством:

$$\begin{aligned} \pi\omega \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) > \frac{16}{35}\beta \frac{a^4}{b\sqrt{2ab}} - \frac{4}{3}(\alpha - 3\beta v_*^2) \frac{a^2}{\sqrt{2ab}} + \\ + \begin{cases} 2T_0 a \left[\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{b}{2a^2} v_*^2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{b}{2a^2} v_*^2}} \right] & \text{for } v_* < \frac{a}{\sqrt{2b}} \\ 0 & \text{for } v_* \geq \frac{a}{\sqrt{2b}} \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Это неравенство характеризует хаотическую границу для фрикционного квазиавтономного осциллятора (1). Его выполнение является необходимым условием появления хаотических колебаний в этой механической системе.

Анализ блуждающих траекторий

Хаотическое поведение нелинейных детерминированных систем предполагает блуждание траекторий движения вокруг различных положений равновесия, характеризующееся непредсказуемостью и чувствительной зависимостью от начальных условий. Анализируя траектории движения этих систем, можно выделить области хаотических колебаний в пространстве управляющих параметров.

Пусть динамическая система описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}), \quad (3)$$

где $\mathbf{x} \in R^n$ – вектор состояния в n -мерном фазовом пространстве, $f(t, \mathbf{x})$ определена в $R \times R^n$ и описывает производную по времени вектора состояния. Предполагается, что $f(t, \mathbf{x})$ – достаточно гладкая, чтобы гарантировать существование и единственность решения дифференциальной системы уравнений (3). Она может иметь разрывы при условии, что решение системы (3) остается непрерывным. Будем использовать свойство непрерывной зависимости решения системы (3) от начальных условий $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}(t_0)$:

для любых начальных условий $\mathbf{x}^{(0)}, \tilde{\mathbf{x}}^{(0)} \in R^n$, для любого сколь угодно большого числа $T > 0$ и любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $\delta > 0$, что если расстояние ρ между $\mathbf{x}^{(0)}$ и $\tilde{\mathbf{x}}^{(0)}$ $\rho(\mathbf{x}^{(0)}, \tilde{\mathbf{x}}^{(0)}) < \delta$ и $|t| \leq T$, то имеет место неравенство

$$\rho(\mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t)) < \varepsilon.$$

То есть, если начальные точки выбраны достаточно близко, то в течение наперед заданного сколь

удбно большого интервала времени $-T \leq t \leq T$ расстояние между одновременными положениями движущихся точек будет оставаться меньше заданного положительного числа ε .

Метрика ρ на R^n может быть задана различными способами, например $\rho_1(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_i)^2}$,

$\rho_2(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}_i|$ или $\rho_3(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - \tilde{x}_i|$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \in R^n$.

Будучи заинтересованы в исследовании хаотической и регулярной динамики, будем предполагать, что все траектории $\mathbf{x}(t)$ с течением времени остаются в замкнутой ограниченной области пространства R^n , то есть:

$$\exists C_i \in R : \max_t |x_i(t)| \leq C_i, \quad (i=1, 2 \dots n).$$

Заметим, что если траектория уходит на бесконечность, это может быть диагностировано.

Чтобы анализировать траектории движения системы (3), введем в рассмотрение характерные амплитуды колебаний A_i компонентов движения $x_i(t)$ ($i=1, 2 \dots n$):

$$A_i = \frac{1}{2} \left| \max_{t_1 \leq t \leq T} x_i(t) - \min_{t_1 \leq t \leq T} x_i(t) \right|, \quad (i=1, 2 \dots n).$$

Здесь $[t_1, T] \subset [t_0, T]$, $[t_0, T]$ – временной интервал, на котором рассматривается движение. $[t_0, t_1]$ – интервал времени, в течение которого затухают всякого рода переходные процессы. Характерные амплитуды колебаний A_i могут быть вычислены в процессе интегрирования траектории.

Несмотря на то, что метрика ρ на R^n может быть определена различными способами, для целей наших исследований будет удобнее рассматривать n -мерные параллелепипеды вместо гиперсфер с центром в точке \mathbf{x} . Это позволительно с точки зрения теоремы вложения, которая может быть сформулирована следующим способом:

если $S_\varepsilon(\mathbf{x}) = \{\tilde{\mathbf{x}} \in R^n : \rho(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) < \varepsilon\}$ – гиперсфера радиуса ε с центром в точке \mathbf{x} , а $P_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}(\mathbf{x}) = \{\tilde{\mathbf{x}} \in R^n : |x_i - \tilde{x}_i| < \varepsilon_i\}$ – n -мерный параллелепипед, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется параллелепипед $P_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}(\mathbf{x})$ такой, что $P_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}(\mathbf{x}) \subset S_\varepsilon(\mathbf{x})$. И обратно, для любого параллелепипеда $P_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}(\mathbf{x})$ можно указать $\varepsilon > 0$ такое, что $S_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset P_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}(\mathbf{x})$.

Выберем в параллелепипеде $P_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n}(\mathbf{x}^{(0)})$ две близкие начальные точки $\mathbf{x}^{(0)}$ и $\tilde{\mathbf{x}}^{(0)}$ такие, что $|x_i^{(0)} - \tilde{x}_i^{(0)}| < \delta_i$, где δ_i малы по сравнению с A_i ($i=1, 2 \dots n$). В случае регулярного движения ожидается, что ε_i в неравенствах $|x_i(t) - \tilde{x}_i(t)| < \varepsilon_i$ также малы по сравнению с A_i ($i=1, 2 \dots n$). Блуждающие траектории стремятся заполнить некоторую замкнутую область фазового пространства. И близкие в момент t_0 , с течением времени они экспоненциально расходятся. Поэтому модули разностей $|x_i(t) - \tilde{x}_i(t)|$ с течением времени могут принимать любые значения из интервала $[0, 2A_i]$, включая граничные значения этого интервала. Если модули разностей $|x_i(t) - \tilde{x}_i(t)|$ равны нулю в некоторые моменты времени $\{t_k^*\}$, ($t_k^* \in [t_1, T]$), то траектории $\mathbf{x}(t)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ либо пересекаются в эти моменты, либо совпадают. Очевидно, $2A_i$ – максимальные значения этих разностей, и для некоторых моментов времени эти значения вполне допустимы. Введем вспомогательный параметр α , $0 < \alpha < 1$. Пусть αA_i – мера расходимости наблюдаемых траекторий в направлениях обобщенных координат x_i ($i=1, 2, \dots n$). При анализе системы (3) и ее положений равновесия легко выбрать параметр α , $0 < \alpha < 1$ такой, что из истинности утверждения

$$\exists t^* \in [t_1, T] : |x_i(t^*) - \tilde{x}_i(t^*)| > \alpha A_i, \quad (i=1, 2, \dots n). \quad (4)$$

следует, что существует интервал времени или совокупность временных интервалов, на которых изображающие точки близких в начальный момент траекторий $\mathbf{x}(t)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, совершают движение вокруг различных положений равновесия, или эти траектории чувствительны к изменению начальных условий. Таким образом, эти траектории являются блуждающими. Действительно, как это уже упоминалось, все траектории находятся в ограниченной замкнутой области пространства R^n . С помощью параметра α задаются меры расходимости траекторий αA_i в направлениях обобщенных координат, которые являются недопустимыми в случае регулярного движения. Заметим, что этот выбор неоднозначен, и параметр α может принимать

различные значения из интервала $(0, 1)$. Ясно, однако, что, если α близко к 0 и $|x_i(t) - \tilde{x}_i(t)| < \alpha A_i$, когда $t \in [t_1, T]$, то траектории не расходятся, т.е. траектории регулярны. Существуют значения параметра α , которые заведомо соответствуют мерам расходимости траекторий αA_i ($i=1, 2, \dots, n$), недопустимым в смысле регулярности. Например, $\alpha \in \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right\}$. Могут быть приняты и другие значения. Если изображающие

точки наблюдаемых траекторий движутся хаотически, то при другом выборе α (из множества заведомо "подходящих" значений), расхождение траекторий будет зарегистрировано в другой момент времени t^* . Как показывают численные эксперименты, области хаотического поведения исследуемых систем, полученные при различных заведомо "подходящих" значениях параметра α , практически конгруэнтны. Поэтому в данной работе рисунки, соответствующие различным значениям α , не представлены.

Подобный неоднозначный выбор параметров свойственен и другим подходам к исследованию хаотических колебаний в нелинейных динамических системах. Например, согласно процедуре вычисления показателей Ляпунова, расстояние между траекториями $d(t)$ в момент времени t определяется равенством $d(t) = d_0 2^{\lambda t}$. Здесь λ – показатель Ляпунова, d_0 – мера начального расстояния между исходными точками.

Основание 2 выбрано для простоты. Во всех других отношениях параметр $\alpha > 1$ в соотношении $d(t) = d_0 \alpha^{\lambda t}$ произволен. То есть, параметр $\alpha > 1$ может принимать различные значения как, например, $\alpha \in \{2, 3, 4, 5\}$. Могут быть приняты также и другие значения. Вообще, специфика численных подходов такова, что все параметры должны быть конкретны, и большинство из них могут быть неоднозначными.

Параметр α может иметь другую физическую интерпретацию. Предположим, что для рассматриваемой нелинейной динамической системы можно определить положения равновесия. В случае, например, системы с одной степенью свободы, имеющей потенциал с двумя ямами, мы имеем два центра и одно седло. Внешнее периодическое воздействие, приложенное к такой системе, может быть причиной хаотического отклика. Хаос характеризуется непредсказуемыми перескоками изображающей точки фазовой траектории из одной потенциальной ямы в другую. Эта точка может блуждать вокруг всех трех сингулярных точек. Рассмотрим два соседних центра. В результате непредсказуемых перескоков, близкие в начальный момент изображающие точки фазовых траекторий, в последствии рано или поздно оказываются в различных потенциальных ямах.

Таким образом, α может быть выбрано из соотношения $\alpha A_i \cong \frac{1}{2} d$, где d – это расстояние между двумя центрами, разделенными седлом.

Варьируя параметры исследуемого пространства и проверяя условия (4), можно выделить области хаотических колебаний нелинейной динамической системы (включая переходной перемежающийся хаос) и области регулярных движений. Наш подход был успешно применен как в случае гладких, так и в случае негладких систем [5,6]. Исследовались также многочисленные хорошо изученные "тестовые" модели. Во всех случаях сравнение с исследованиями, основанными на других подходах, свидетельствует об очень хорошей согласованности результатов.

Замечание 1. Нет необходимости проверять все неравенства (4) в том случае, когда исследуемая система дифференциальных уравнений движения может быть приведена к нормальному виду. Это означает, что неравенства, имеющие отношение к скоростям $x_j = \dot{x}_i$, $i, j \in \overline{1, n}$, могут не проверяться. Другими словами, если траектории не расходятся в направлении обобщенных координат x_i , то они также не расходятся в направлении обобщенных координат $x_j = \dot{x}_i$. Здесь $i, j \in \overline{1, n}$.

Замечание 2. Оба подхода, и представленный в этой работе, и хорошо известный алгоритм Вульфа определения показателей Ляпунова [2], реализуются с помощью компьютерного моделирования. Согласно алгоритму Вульфа, вычисление показателя Ляпунова λ как меры расходимости траекторий начинается с выбора опорной траектории $\mathbf{x}^*(t, \mathbf{x}^{(0)})$. На каждом временном шаге t_k динамическая система (3) интегрируется снова с какой-нибудь соседней точкой $\mathbf{x}^*(t_k) + \eta$ в качестве начального условия. Таким образом, для определения λ уравнения движения (3) и соответствующие уравнения в вариациях $\dot{\eta} = \mathbf{A} \cdot \eta$, где \mathbf{A} – матрица частных производных $\nabla f(\mathbf{x}^*(t_k))$, решаются N раз (где N – число шагов по времени). Для получения надежного значения λ изменения расстояний между траекториями усредняются в течение длительного времени. Для реализации подхода, представленного в этой работе, достаточно для каждой выбранной траектории решать систему (3) лишь два раза.

Сравнение аналитических и численных результатов

Механическая система (1) была исследована и с помощью метода Мельникова [7], и с помощью подхода, основанного на анализе блуждающих траекторий. Результаты исследования плоскости (ν, γ) при фиксированных значениях параметров $a = b = 1, \alpha = \beta = T_0 = 0.3, \omega = 2, x(0) = 1, \nu(0) = 0.4$ представлены на рис. 3. Области фрикционной хаотической динамики механической системы (1), полученные на основе анализа блуждающих траекторий, маркированы точками. Условие (4) для этой системы имеет вид

$$\exists t^* \in [t_1, T]: |x(t^*) - \tilde{x}(t^*)| > \alpha A.$$

Здесь $A = \frac{1}{2} \left| \max_{t_1 \leq t \leq T} x(t) - \min_{t_1 \leq t \leq T} x(t) \right|$.

Сплошная кривая $\gamma(\nu_*)$ представляет собой хаотическую границу, соответствующую аналитическому предсказанию (2), полученному на основе метода Мельникова. Хаос может появляться выше этой линии, потому что вблизи нее пересекаются устойчивые и неустойчивые многообразия.

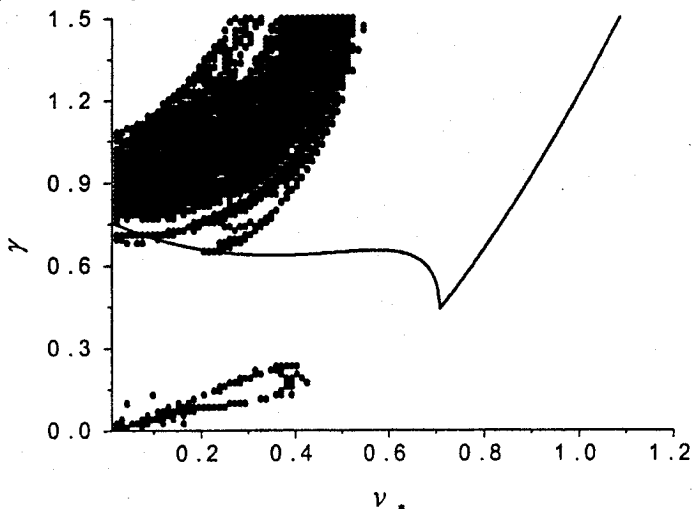


Рис. 3. Области хаотических фрикционных колебаний в плоскости (ν, γ) $a = b = 1, \alpha = \beta = T_0 = 0.3, \omega = 2, x(0) = 1, \nu(0) = 0.4$. Сплошная линия представляет собой хаотическую границу, которая получена с помощью метода Мельникова.

Интервал времени $[t_0, T]$, на котором рассматривается движение, равен 300 безразмерным единицам времени. В процессе вычислений принято, что половина этого интервала соответствует временному интервалу $[t_0, t_1]$, в течение которого затухают переходные процессы. Шаг интегрирования – 3×10^{-3} безразмерных единиц времени. Плоскость (ν, γ) равномерно дискретизирована в прямоугольнике $(0 < \nu \leq 1.1; 0 < \gamma \leq 1.5)$ с помощью 100×100 узловых точек. Начальные условия близких траекторий отличаются на 0,5 процента по отношению к характерной амплитуде колебаний A . Параметр α равен $1/3$.

Полученные результаты демонстрируют хорошую согласованность аналитической хаотической границы и численного моделирования. Согласно подходу, представленному в этой статье, хаотическое

движение осциллятора наблюдается перед точкой возврата $\nu_* = \frac{a}{\sqrt{2b}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$. Рис. 3 свидетельствует о

принципиальном уточнении области хаотических колебаний осциллятора по сравнению с аналитической границей.

На рис. 4 изображены фазовые портреты и отображения Пуанкаре хаотических траекторий осциллятора при значениях управляющих параметров (а) $\nu_* = 0.14, \gamma = 0.98$ и (б) $\nu_* = 0.33, \gamma = 1.13$, которые соответствуют области хаотических колебаний (рис. 3).

На рис. 5 изображены фазовые портреты и отображения Пуанкаре траекторий осциллятора при значениях (а) $\nu_* = 0.1626, \gamma = 0.0845$ и (б) $\nu_* = 0.3915, \gamma = 0.1739$. В случае (а) траектория с течением времени садится на периодическую орбиту. Наблюдается учетверение периода. В случае (б) отображение Пуанкаре представляет собой замкнутую кривую, что указывает на движение осциллятора с несоизмеримыми частотами.

На рис. 6 изображены фазовые портреты и отображения Пуанкаре периодических траекторий осциллятора при значениях управляющих параметров (а) $\nu_* = 0.115, \gamma = 1.37$, (б) $\nu_* = 0.7, \gamma = 1.0$ и (в) $\nu_* = 0.2, \gamma = 0.45$, которые соответствуют областям регулярных движений осциллятора. Аналитическая хаотическая граница дает необходимое, но не достаточное условие появления хаоса. Случай (а) соответствует параметрам, находящимся выше хаотической аналитической границы, однако движения при этих условиях являются периодическими, что подтверждается исследованиями, основанными на анализе блуждающих траекторий.

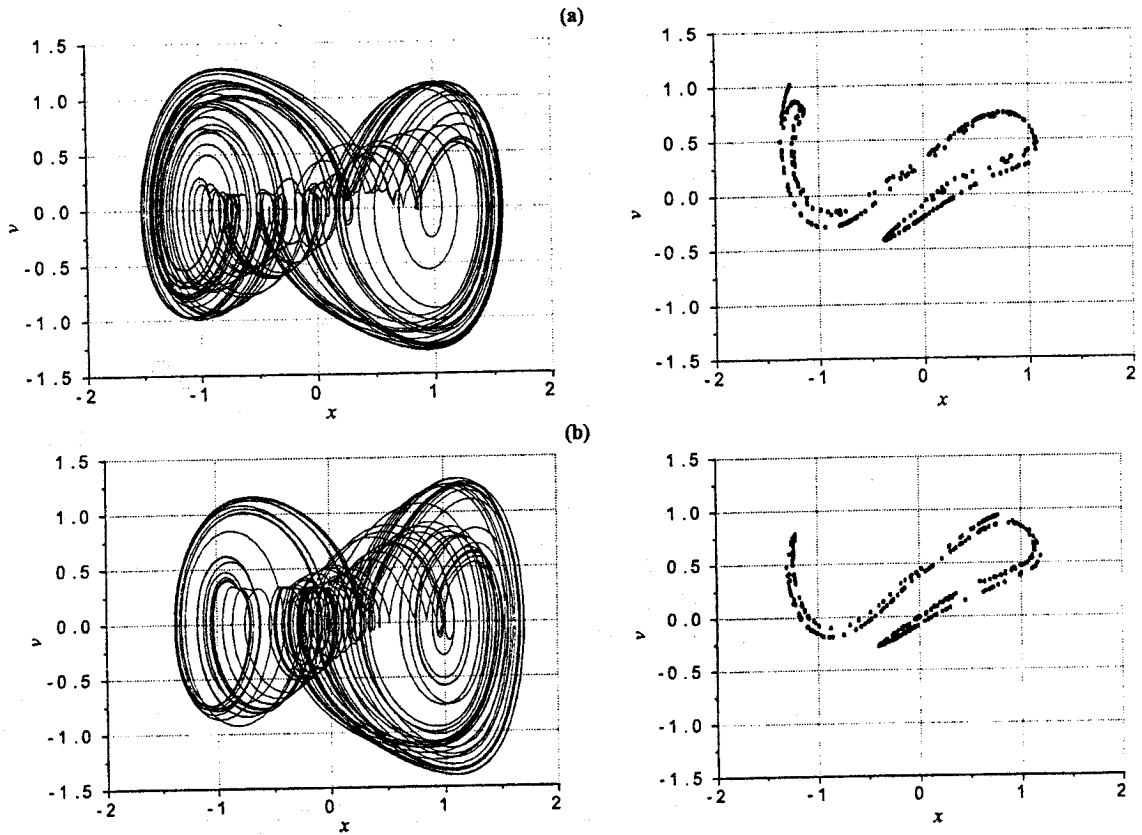


Рис. 4. Фазовые портреты и отображения Пуанкаре хаотических траекторий осциллятора (а) $\nu^*=0.14, \gamma=0.98$; (б) $\nu^*=0.33, \gamma=1.13$

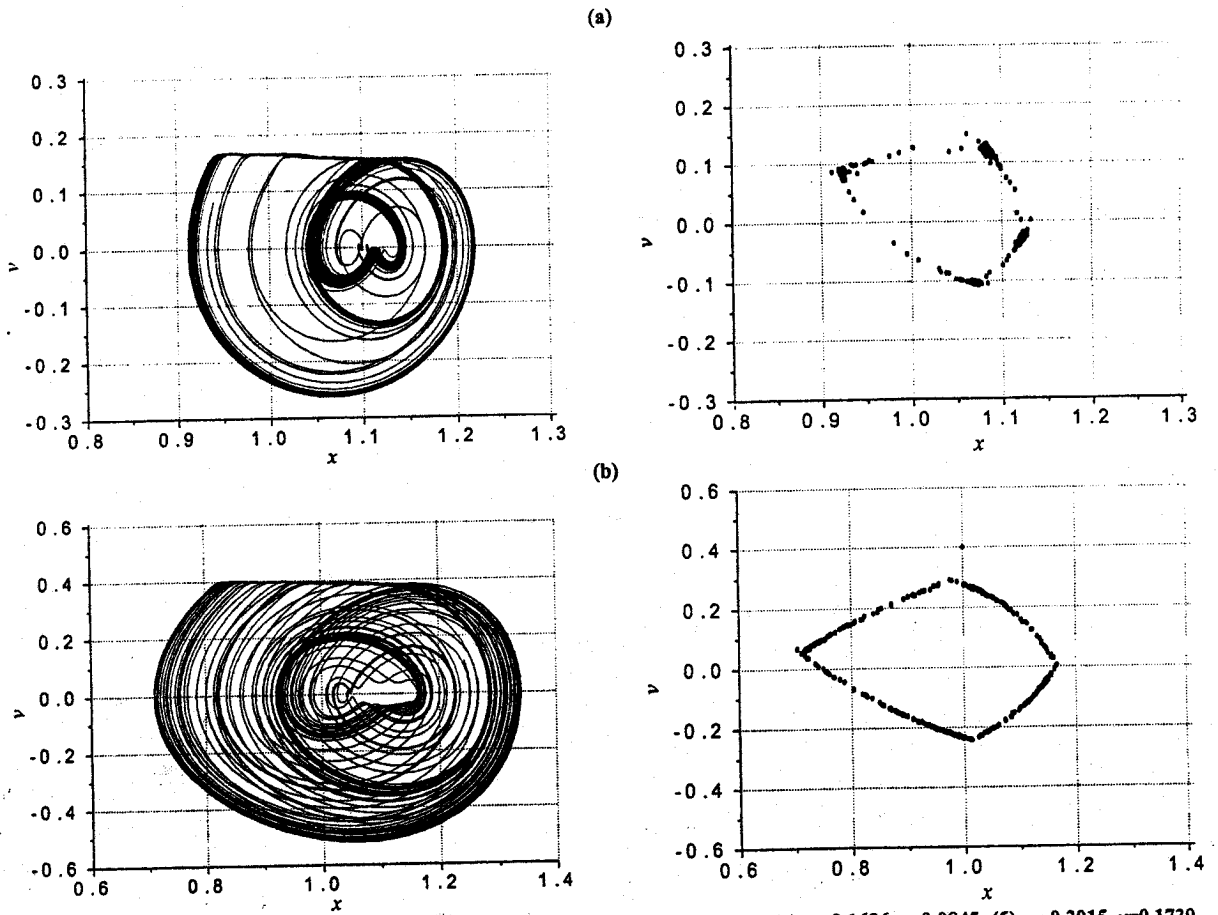


Рис. 5. Фазовые портреты и отображения Пуанкаре траекторий осциллятора (а) $\nu=0.1626, \gamma=0.0845$; (б) $\nu=0.3915, \gamma=0.1739$

Выводы

Системы с трением не являются гладкими и часто вызывают некоторые трудности как при теоретическом, так и при численном исследовании. С применением нового подхода, основанного на анализе блуждающих траекторий, нам удалось получить в плоскости управляющих параметров системы более точные области хаотической фрикционной динамики осциллятора с одной степенью свободы, находящегося в условиях очень слабого внешнего периодического возмущения. Сравнение с аналитическим предсказанием, полученным на основе метода Мельникова [7], демонстрирует хорошую согласованность результатов.

Стандартные численные методы, в частности прямое вычисление показателей Ляпунова, широко используются в литературе, однако они требуют больших затрат компьютерного времени. Представленный подход эффективен, не сложен в реализации, требует гораздо меньше вычислительного времени по сравнению с другими подходами и может быть применен к исследованию широкого класса задач. Согласно этому подходу для каждой выбранной траектории требуется интегрирование управляющих уравнений лишь два раза, а характерные амплитуды колебаний A_i вычисляются в процессе интегрирования траектории.

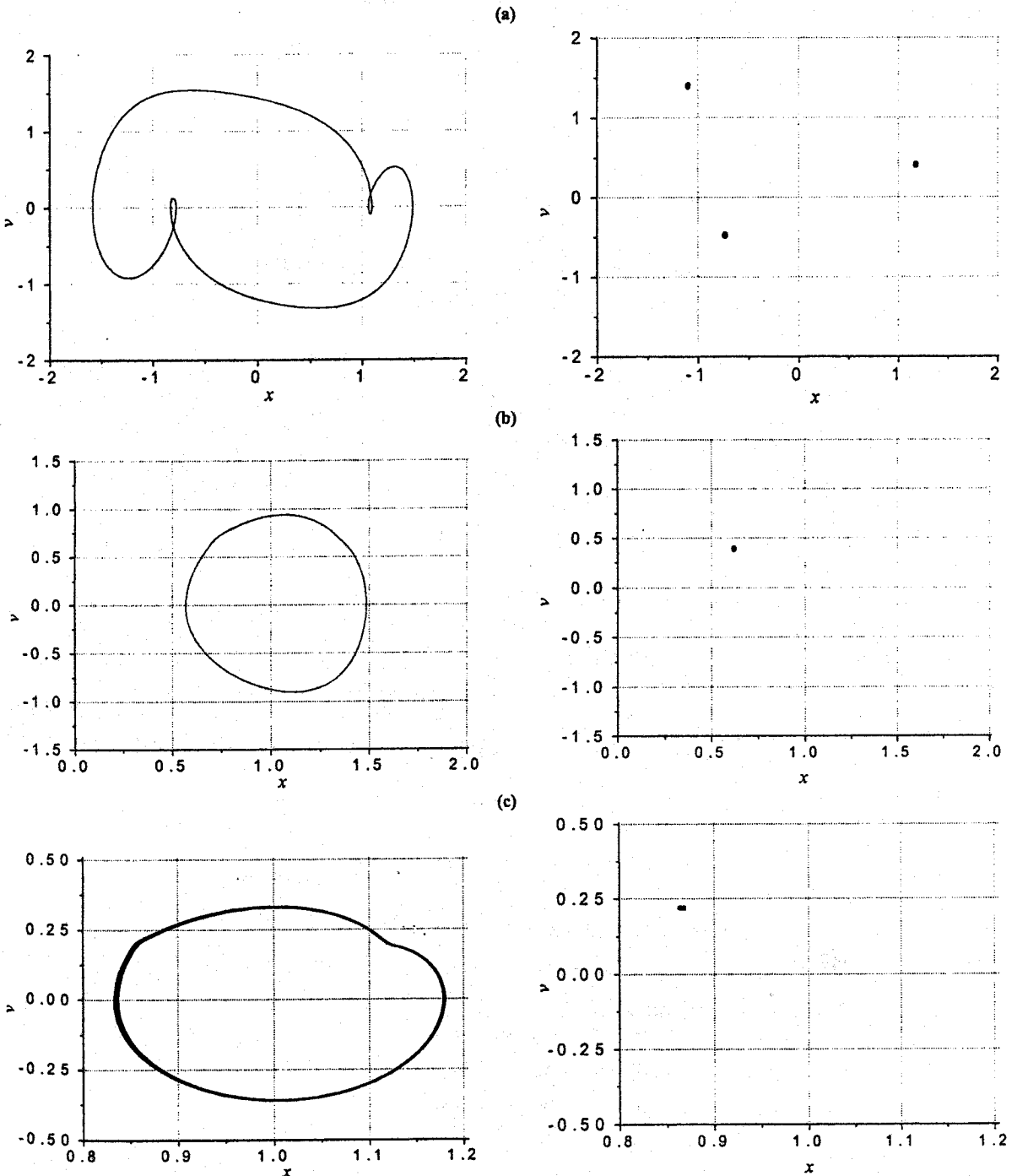


Рис. 6. Фазовые портреты и отображения Пуанкаре периодических траекторий осциллятора
 (а) $\nu=0.115, \gamma=1.37$; (б) $\nu=0.7, \gamma=1.0$; (в) $\nu=0.2, \gamma=0.45$.

Литература

1. Oseledec, V. I [1968] "A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems," *Trans. Moscow Math. Soc.* 19, 197-231.
2. Wolf, A., Jack, B., Swinney, H. L., Vastano, J. A [1985] "Determining Lyapunov exponents from a time series," *Physica* 16D, 285-317.
3. Oden, J. T., Martins J. C. A [1985] "Models and computational methods for dynamics friction phenomena," *Comp. Met. App. Mech. Eng.* 52, 527-634.
4. Brogliato, B [1996] *Nonsmooth Impact Mechanics*, Springer-Verlag, London.
5. Awrejcewicz, J., Dzyubak, L [2003] "Stick-slip chaotic oscillations in a quasi-autonomous mechanical system," *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation* 4 (2), 155-160.
6. Awrejcewicz, J., Dzyubak, L. "Quantifying smooth and non-smooth regular and chaotic dynamics," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, to appear.
7. Awrejcewicz, J. & Holicke, M. M [1999] "Melnikov's Method and Stick-Slip Chaotic Oscillations in Very Weekly Forced Mechanical systems", *International Journal of Bifurcation and Chaos* 9 (3), 505-518.