ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
Nr 424 MECHANIKA, z. 66 1983

JAN AWREJCEWICZ
Instytut Mechaniki Stosowanej

ANALIZA DRGAŃ SAMOWZBUDNYCH WYWOŁANYCH TARCIEM NIELINIOWYM W UKŁADZIE O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Opiniodawca: **doc. dr hab. Mirosław Roszkowski**

Maszynopis dostarczono 2 VI 1982 r.

Zjawisko drgań samowzbudnych od strony jakościowej zbadane zostało poprzez analizę pochodnej energii układu względem czasu. Analiza ta pozwoliła stwierdzić, że dla rzeczywistych charakterystyk tarcia suchego istnieją stateczne i niestateczne położenia równowagi. Wskazuje również ona na istnienie cykli granicznych. Stosując metodę linearyzacji harmonicznej znaleziono rozwiązanie analityczne zarówno w przypadku stanu ustalonego jak i nieustalonego.

Równanie ruchu układu przedstawionego na rysunku 1, na którym przyjęto oznaczenia: 1 - ciało o masie m, 2 - sprężyna o sztywności k, 3 - taśma przesuwająca się z prędkością v_0, ma postać

$$m\ddot{x} + kx = T(w), \tag{1}$$

gdzie $T(w)$ jest nieliniową zależnością siły tarcia od prędkości względnej trących się ciał (rys. 2), aproksymowaną za pomocą wielomianów równaniem

$$T(w) = T_0 \operatorname{sgn} w - \alpha w + \beta w^3. \tag{2}$$

gdzie: $w = v_0 - \dot{x}$,

T_0 - wartość tarcia dla $w = 0$,

α, β - stałe współczynniki, przy czym $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$.

Początek układu Ox (rys. 1) odpowiada takiemu położeniu masy, w którym sprężyna jest nienapięta. Mierzymy drgania od położenia równowagi statycznej (w układzie $O'\xi$); równanie ruchu wyrazi się zależnością

$$m\ddot{\xi} + k\xi = Q(\dot{\xi}), \tag{3}$$

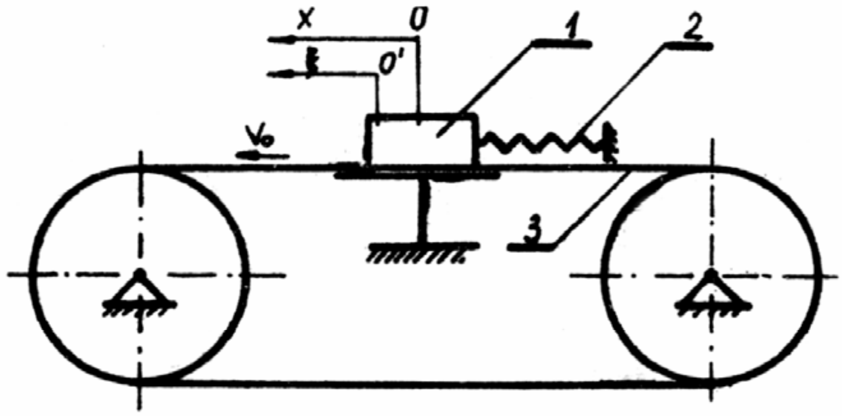
gdzie: $Q(\dot{\xi}) = T(w) - T(v_o)$,

$x = \xi + \frac{1}{k}T(v_o)$.

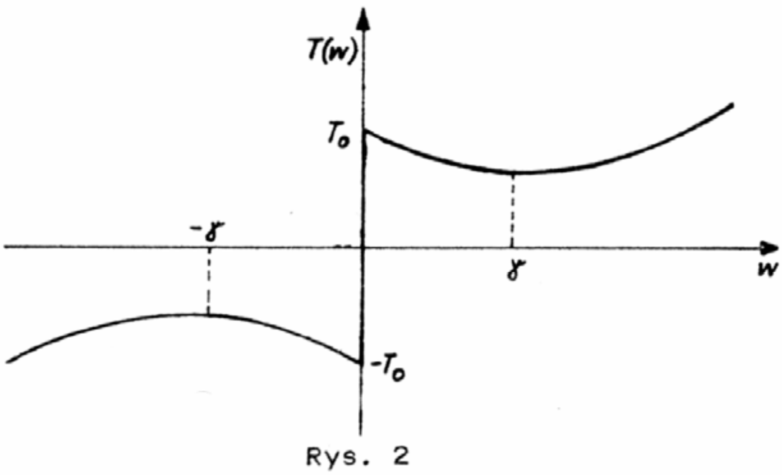
Mnożąc obydwie strony równości (3) przez v i uwzględniając równość $\dot{x} = \dot{\xi} = v$ otrzymujemy

$$\frac{d}{dt}(E + V) = Q(v)v, \tag{4}$$

gdzie: $E = \frac{mv^2}{2}$, $V = \frac{k\xi^2}{2}$.

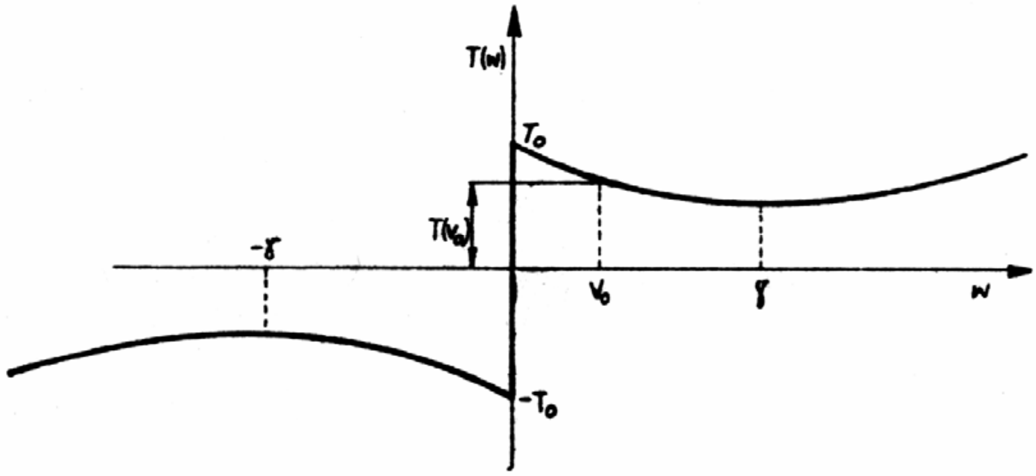


Rys. 1

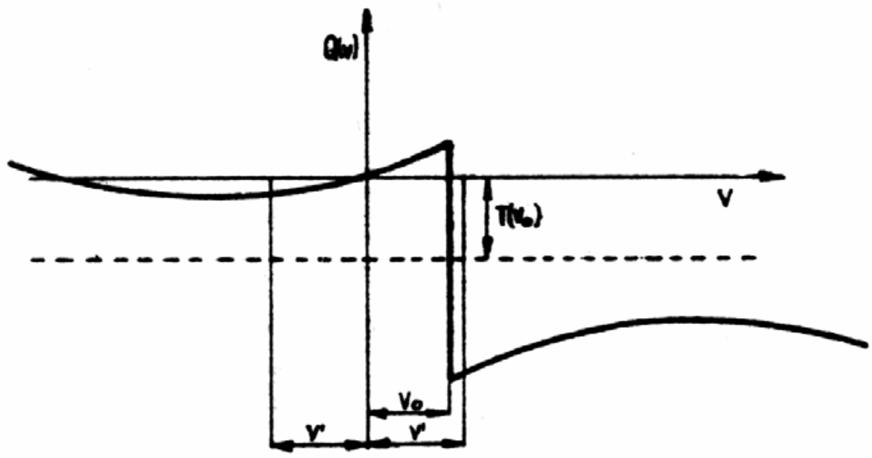


Rys. 2

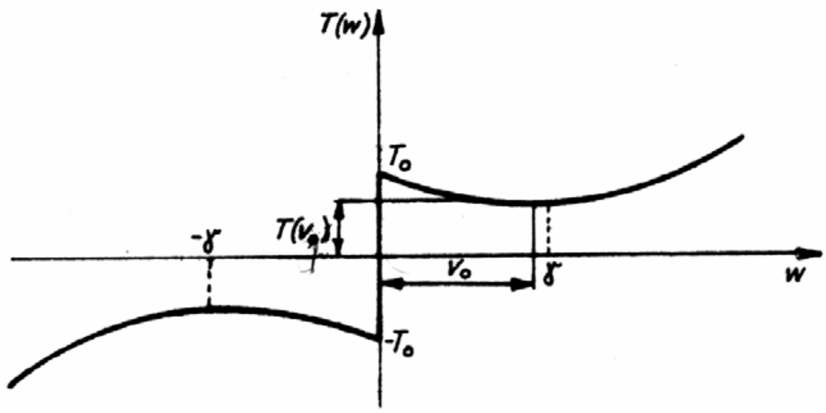
Analiza jakościowa oparta na równaniu (4) przeprowadzona zostanie na podstawie rysunków 3, 4 i 5. Z rysunków 3 i 4 wynika, że położenie równowagi dla tych przypadków jest niestateczne, bowiem energia w otoczeniu tego punktu jest doprowadzana dla układu ($Q_v > 0$). Różnica między nimi polega na tym, że dla pierwszego przypadku (rys. 3) cykl graniczny pojawi się dla $A\Omega > v_o$, a dla drugiego (rys. 4) dla $A\Omega < v_o$ (A - amplituda drgań, Ω - częstość kołowa drgań). Położenie równowagi dla przypadku przedstawionego na rysunku 5 jest stateczne.



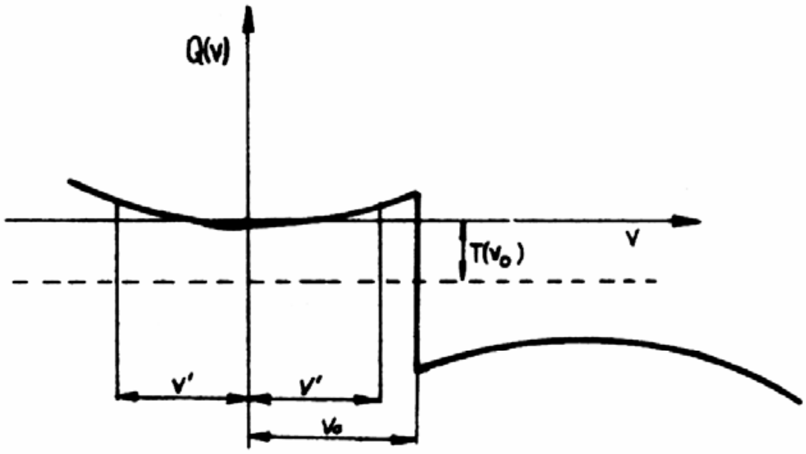
Rys. 3a



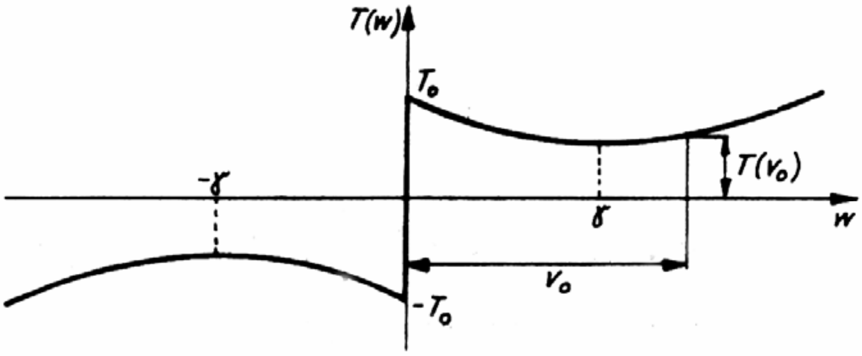
Rys. 3b



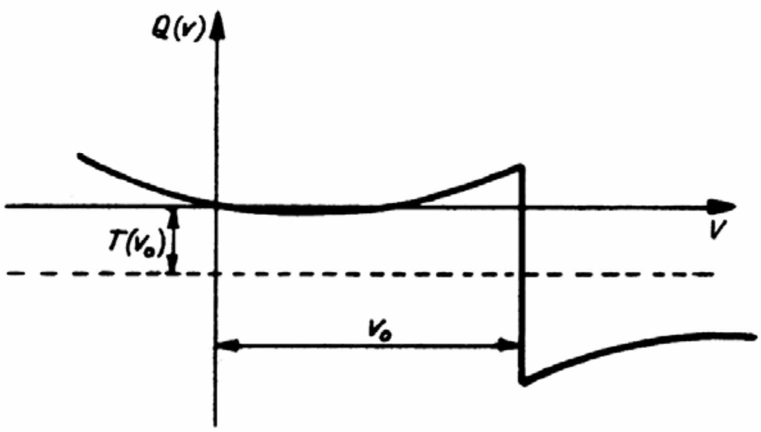
Rys. 4a



Rys. 4b



Rys. 5a



Rys. 5b

Analizy ilościowej dokonano wykorzystując metodę linearyzacji harmonicznej, przy czym rozpatrzono dwa przypadki.

Przypadek 1 ($v_o > A\Omega$)

Ze względu na niesymetryczną charakterystykę $Q(\dot{\xi})$ rozwiązania równania (3) poszukujemy o postaci

$$\xi = \xi^o + \xi^*, \tag{5}$$

gdzie: ξ^o - składowa aperiodyczna,

$\xi^* = a\cos\omega t$, przy czym a jest amplitudą, ω - częstością drgań.

Współczynnik linearyzacji harmonicznej wyrazi się wzorem

$$q' = \frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi}\left\{T_o - \alpha(v_o + a\omega\sin\psi) + \beta(v_o + a\omega\sin\psi)^3\right\}\sin\psi d\psi =$$

$$= -\alpha\omega + 3\beta v_o^2\omega + \frac{3}{4}\beta a^2\omega^3. \tag{6}$$

Równanie zlinearyzowane ruchu zapisane w dziedzinie częstotliwościowej ma postać

$$(mp^2 + k)\xi - F^o + \left(\frac{q'}{\omega}p\xi\right) = 0, \tag{7}$$

gdzie

$$F_o = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[T_o - \alpha w + \beta w^3\right]d\psi - T(v_o) =$$

$$= T_o - \alpha v_o + \beta v_o^3 + \frac{3}{2}\beta a^2\omega^2 v_o - T(v_o).$$

Równanie (7) po uwzględnieniu równania (5) rozłożono na dwa równania:

$$k\xi^o = F^o, \tag{8}$$

$$mp^2\xi^* + k\xi^* - \frac{q'}{\omega}p\xi^* = 0.$$

Będziemy poszukiwać drgań ustalonych ($a = A$, $\omega = \Omega$), więc $p = i\Omega$ i ostatecznie z równania (8) otrzymujemy trzy równania algebraiczne nieliniowe (9) do wyznaczania trzech wielkości A, Ω, ξ^o:

$$k\xi^o = T_o - \alpha v_o + \beta v_o^3 + \frac{3}{2}\beta v_o A^2\Omega^2 - T(v_o),$$

$$-m\Omega^2 + k = 0,$$

$$\alpha - 3\beta v_o^2 - \frac{3}{4}\beta A^2\Omega^2 = 0. \tag{9}$$

Po uwzględnieniu $\beta = \frac{\alpha}{3\gamma^2}$ (γ - wartość prędkości, dla której $T(w)$ osiąga minimum) z dwóch ostatnich równań układu (9) otrzymujemy:

$$\Omega^2 = \frac{k}{m}, \tag{10}$$

$$A^2 = \frac{4(\gamma^2 - v_o^2)}{\Omega^2};$$

jak łatwo zauważyć równania mają sens dla $\gamma > v_o$.

Składową aperiodyczną po uwzględnieniu

$$T(v_o) = T_o - \alpha v_o + \beta v_o^3 \tag{11}$$

można przedstawić za pomocą związku

$$\xi^o = \frac{2\alpha v_o}{k}\left[1 - \left(\frac{v_o}{\gamma}\right)^2\right]. \tag{12}$$

Wielkość ξ^o jest uchybem wynikającym z przesunięcia środka drgań i mierzonym od położenia równowagi statycznej.

<u>Przypadek 2</u> ($A\Omega > v_o$)

Postępując analogicznie otrzymujemy układ trzech równań algebraicznych (13), których rozwiązanie daje nam poszukiwane wartości ξ^o, A, Ω:

$$k\xi^o = \frac{2T_o}{\pi}\arcsin\frac{v_o}{A\Omega} - \alpha v_o + \beta v_o^3 + \frac{3}{2}\beta v_o A^2\Omega^2 - T(v_o),$$

$$-m\Omega^2 + k = 0, \tag{13}$$

$$\frac{4T_o}{\pi A\Omega}\sqrt{1 - \left(\frac{v_o}{A\Omega}\right)^2} - \alpha + 3\beta v_o^2 + \frac{3}{4}\beta A^2\Omega^2 = 0.$$

<u>Badanie stanu nieustalonego</u>

Dla przypadku $v_o > a\omega$ poszukajmy stanu oscylacyjnego nieustalonego. Rozwiązania poszukujemy o postaci $\xi^* = a(t)\cos\psi(t)$, przy czym:

$$\frac{da}{dt} = a\,\sigma(a), \tag{14}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(a).$$

Po podstawieniu $p = \sigma + i\omega$ do drugiego równania układu 8 i rozdzieleniu równania na część rzeczywistą i urojoną otrzymujemy:

$$\begin{aligned} m\sigma^2 - m\omega^2 + k - \alpha\sigma + 3\beta v_o^2\sigma + \frac{3}{4}\beta a^2\omega^2\sigma &= 0, \\ 2m\sigma\omega - \left(\alpha\omega - 3\beta v_o^2\omega + \frac{3}{4}\beta a^2\omega^3\right) &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Ponieważ σ jest małe, to przyjmujemy $\sigma^2 = 0$. Rozwiązując układ równań (15) z uwzględnieniem $\beta = \frac{\alpha}{3\gamma^2}$ otrzymujemy:

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

$$\sigma = \frac{\alpha(4\gamma^2 m - 4mv_o^2 - ka^2)}{8\gamma^2 m^2}. \tag{16}$$

Dla $\sigma = 0$ otrzymujemy wzór (10), co świadczy o prawidłowości rozwiązania. Mamy więc:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\alpha k}{8\gamma^2 m^2} a^3 - \frac{\alpha(v_o^2 - \gamma^2)}{2\gamma^2 m} a, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \sqrt{\frac{k}{m}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Po wykonaniu całkowania przy założeniu, że dla $t = 0$ jest $a = a_o$ amplituda wyraża się wzorem

$$a^2 = \frac{4a_o^2\left[\frac{\alpha}{m}(\gamma^2 - v_o^2)\right]\exp\left(\frac{\alpha}{m}\frac{\gamma^2 - v_o^2}{\gamma^2}t\right)}{4\frac{\alpha}{m}(\gamma^2 - v_o^2) + \frac{\alpha}{m}a_o^2\omega^2\left[\exp\left(\frac{\alpha}{m}\frac{\gamma^2 - v_o^2}{\gamma^2}t\right) - 1\right]}. \tag{18}$$

Rozwiązanie powyższe pokrywa się z rozwiązaniem znalezionym metodą KBM (Kryłow-Bogoliubov-Mitropolskij) po przyjęciu wartości $\varepsilon = \frac{\alpha}{m}$.

LITERATURA

[1] Popow E. P., Paltow I. P.: Przybliżone metody badań nieliniowych układów automatycznych. WNT, Warszawa 1964.

[2] Stoker J. J.: Nonlinear vibrations in mechanical and elektrical systems. New York 1950.

АНАЛИЗ АВТОКОЛЕБАНИЙ ОБУСЛОВЛЕННЫХ СУХИМ ТРЕНИЕМ В СИСТЕМЕ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

К р а т к о е   с о д е р ж а н и е

Явление автоколебаний с качественной стороны испытано с помощью анализа производной энергии по времени. Этот анализ позволяет установить, что для действительных характеристик сухого трения существуют устойчивые и неустойчивые положения равновесия. Также указывает он на существование циклов устойчивых и неустойчивых. Употребляя метод гармонической линеаризации найдено аналитическое решение в случае стационарного устойчивого режима и нестационарного неустойчивого режима.

Łódź, Политехнический Институт
Институт Прикладной Механики

ANALYSIS OF SELF-EXCITED VIBRATION DUE TO NONLINEAR FRICTION IN ONE DEGREE-OF-FREEDOM SYSTEM

S u m m a r y

In this work qualitative analysis of the existence of stable and unstable states of equilibrium and of limit cycles was made. The quantitative analysis was made by using sinusoidal-input describing function method. The solution was found for steady-state and transient oscillations.

Łódź, Technical University
Institute of Applied Mechanics