

JAN AWREJCWICZ

Instytut Mechaniki Stosowanej

**MATEMATYCZNY MODEL MECHANICZNEGO UKŁADU DRGAJĄCEGO  
PODCZAS WZGLĘDNEGO RUCHU PROWADNIKA I PROWADNICZY  
W OBRABIARKACH**

Opiniodawca: prof. dr hab. Michał E. Niegodziński

Maszynopis dostarczono 2 VI 1982 r.

W artykule wskazano na szkodliwość zjawiska drgań samowzbudnych wywołanych tarciem w zespołach ruchu posuwowego obrabiarek. Przy dotychczas stosowanej analizie zjawiska stosowano model uproszczony przyjmując układ o jednym stopniu swobody.

Autor przyjął model bardziej zbliżony do rzeczywistości poprzez zastąpienie styków miejscowych stykami dyskretnymi oraz wydzieleniu z bryły sztywnej masowych elementów trących. Ponadto założono w modelu, że nie zajdzie zjawisko przeskoku, tj. zjawiska zaniku kontaktu pewnych powierzchni przy jednoczesnym wejściu do pracy powierzchni innych, oraz że masowe elementy trące są zawsze dociskane do powierzchni styku i drgają tylko w kierunku ruchu posuwowego.

Dynamikę układu ujęto w zapisie macierzowym z opisem tworzenia poszczególnych macierzy występujących w równaniach ruchu.

**1. WPROWADZENIE**

Drgania samowzbudne obrabiarek są opisane szeroko w literaturze [3, 4, 5, 7, 8, 9, 15]. Do drgań takich dochodzi między narzędziami skrajającymi i obrabianym przedmiotem albo są one generowane w zespołach ruchu posuwowego. Te ostatnie mogą być typu relaksacyjnego lub prawie-harmonicznego. Drgania relaksacyjne są charakterystyczne głównie dla

obrabiarek o dużej dokładności i małym posuwie - rzędu mm, a nawet w szlifierkach rzędu  $\mu\text{m}$  na minutę [1, 10], natomiast drgania prawie harmoniczne zachodzą nawet przy dużych prędkościach w obrabiarkach ciężkich [10, 11].

Drgania takie są zdecydowanie szkodliwe ze względu na jakość obrabianego materiału, jak również niepotrzebne zużycie źródła energii. Najpełniejszą analizę tych drgań zawiera monografia [11]. Ograniczono się w niej do badania układu o jednym stopniu swobody przy przyjęciu liniowej zależności siły tarcia od prędkości względnej trących się ciał.

Jednakże (jak wykazują badania eksperymentalne) rzeczywisty kontakt elementu ruchowego (prowadnika) z elementem nieruchomym (prowadnicą) w obrabiarkach, nawet przy bardzo wysokiej gładkości powierzchni, ma charakter miejscowy [2, 6, 12, 19]. Styki miejscowe są zastępowane sztywnościami dyskretnymi zaczepionymi w środkach ciężkości pól odkształceń. Sztywność stykowa była badana od dawna. Jej wartość można przyjmować z cytowanych w literaturze danych empirycznych lub wyznaczać doświadczalnie w wyniku badań statycznych odpowiednich modeli [13, 16].

## 2. ZAŁOŻENIA PRZYJĘTE DO OKREŚLENIA MODELU

Adekwatne odzwierciedlenie zjawisk zachodzących podczas drgań samowzbudnych wywołanych tarciem nieliniowym przy ruchu względnym prowadnika i prowadnicy w obrabiarkach - ze względu na ich złożoność - jest postulatem trudnym do zrealizowania. Przyjęto odpowiednie założenia uproszczające, które umożliwiły określenie modelu.

1. Powierzchnie prowadnicy i prowadnika ze względu na nieuniknione błędy kształtu, falistości i chropowatości stykają się tylko w pewnych miejscach. Przyjęto, że podczas ruchu smar nie oddziela w pełni współpracujących powierzchni (przepływa bowiem do miejsc słabiej obciążonych) i kontakt jest również bezpośredni.

2. Dyskretne podpory skupiające sprężystość styków o linii działania siły przechodzącej przez środek ciężkości pól odkształceń i prostopadłej do powierzchni styku zaczepia się do masowych elementów trących o powierzchnię odpowiadającą rzeczywistej powierzchni styku, które z bryłą sztywną są połączone poprzez elementy sprężysto-tłumiące, przenoszące siłę równoległą do kierunku ruchu posuwowego. Własności sprężyste bryły sztywnej są bowiem zawarte w stykach i na odkształcenia stykowe warstw wierzchnich przypada około 90% i więcej całego przemieszczenia.

3. Elementy podatne są nieważkie i liniowe, czyli siły pozycyjne w nich występujące są proporcjonalne do różnicy przemieszczeń końców elementu. Siły pochodzące od tłumienia są proporcjonalne do różnicy prędkości przemieszczeń końców elementu tłumiącego. Obserwacje empiryczne

dowodzą, że sztywność stykowa przy drganiach i statycznych deformacjach jest jednakowa i nie zależy od częstości drgań.

4. Podczas drgań współpracować będą zawsze te same powierzchnie połączeń i nie zajdzie zjawisko przeskoku, tj. zaniku kontaktu pewnych powierzchni przy jednoczesnym wejściu do pracy powierzchni innych. Trące elementy masowe są zawsze dociskane do powierzchni styku i drgają tylko w kierunku ruchu posuwowego. Objętości materiału ulegającej deformacji w kierunku pionowym do powierzchni styku (wynikającej z podatności stykowej) i poziomym (wynikającej z podatności stycznej) odpowiada masa elementu trącego.

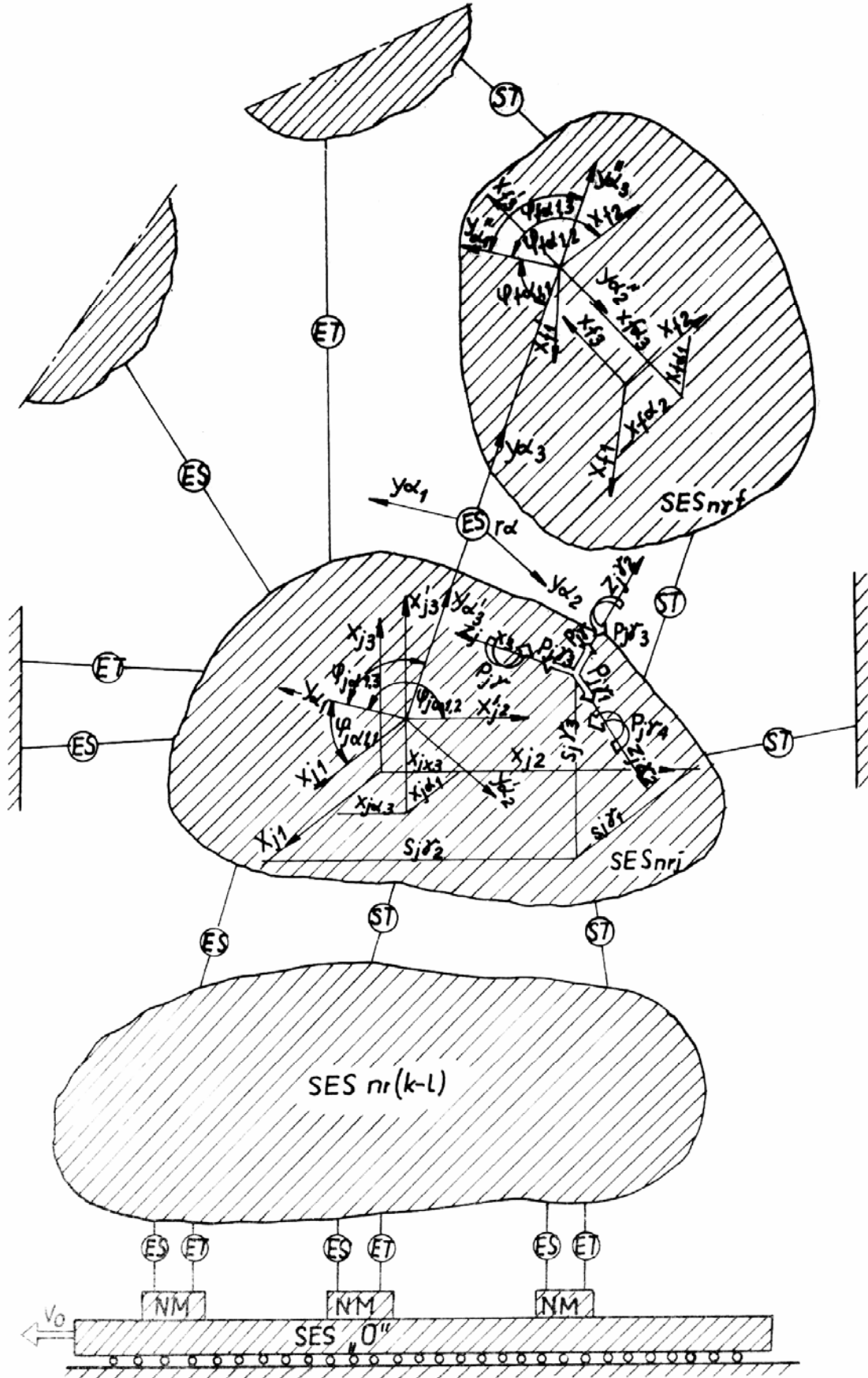
Przyjęty model obliczeniowy (rys. 1) składa się ze skończonej liczby nieodkształconych brył sztywnych połączonych elementami sprężystymi ES i elementami tłumiącymi ET oraz z masowych elementów trących NM.

Bryły sztywne są scharakteryzowane przez masy i masowe momenty bezwładności, natomiast bezmasowe liniowe elementy sprężyste i tłumiące poprzez współczynniki sztywności i tłumienia. Desygnatem obiektów masowych w przypadku dużych ciężkich obrabiarek (np. wiertarko-frezarki) mogą być sanie wzdłużne, sanie poprzeczne, stół obrotowy, przedmiot obrabiany, które to zachowują się podczas drgań jak ciała doskonale sztywne (rys. 2). Elementom sprężysto-tłumiącym mogą odpowiadać te miejsca, w których koncentruje się więźność odkształceń (miejsca stykowe, miejsca mocowania czy miejsca o małej sztywności będące wynikiem wymogów konstrukcyjnych). Tak opisany układ mechaniczny wykonuje ruch względem ostoi (przez parę kinematyczną śruba pociągowa-nakrętka posuw jest przenoszony na sanie wzdłużne i elementy z nimi związane) ze stałą prędkością  $v_0$ . Z uwagi na względność ruchu i fakt, że drgania są generowane przez siły tarcia występujące pomiędzy elementami NM i ciałem SES „0” na rysunku 1 przyjęto, że ciało sztywne SES „0” porusza się z prędkością  $v_0$ .

Elementy NM, których ilość odpowiada ilości miejscowych styków prowadnicy i prowadnika, generują siłę zależną od przemieszczenia i prędkości w kierunku prostopadłym do powierzchni styku oraz zależną od prędkości uogólnionej, przyporządkowanej ciału NM.

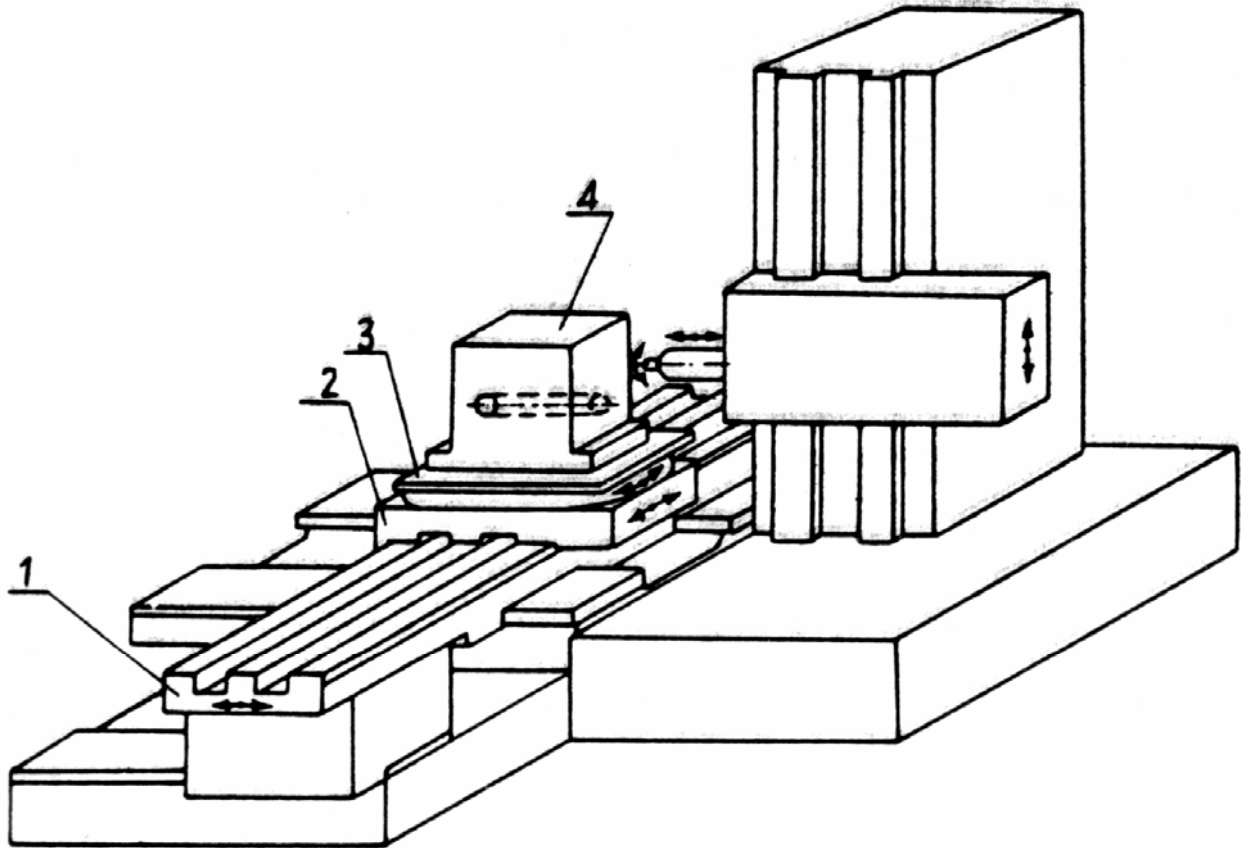
Schematycznie charakter nieliniowości przedstawia rysunek 3. Wektory sił tarcia podczas ruchu są równoległe do jego kierunku. Działają one na masowe elementy trące, które zaczynają drgać, a siły poprzez sztywności styczne są przenoszone dalej na bryły sztywne.

Każdemu SES (sztywny element skończony) i każdemu ES i ET przyporządkowano nieruchome prawoskrętne układy współrzędnych prostokątnych, przy czym w stanie równowagi statycznej pokrywają się one z głównymi centralnymi osiami bezwładności obiektu masowego i z głównymi osiami elementu sprężysto-tłumiącego. Każdy SES ma w ogólnym przypadku sześć stopni swobody, a więc jego ruch musi być opisany przez sześć niezależ-



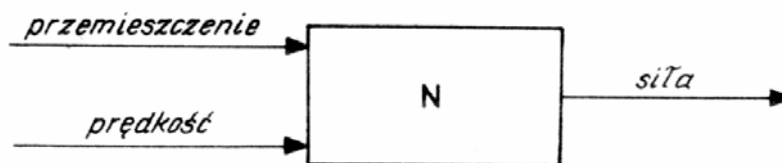
Rys. 1. Model obliczeniowy układu mechanicznego

nych współrzędnych uogólnionych. Jako współrzędne uogólnione przyjęto przemieszczenia środka masy SES w kierunkach głównych centralnych osi bezwładności oraz obroty wokół tych osi mierzone od położenia równowagi statycznej.



Rys. 2. Schemat wiertarko-frezarki

1 - sanie wzdłużne, 2 - sanie poprzeczne, 3 - stół obrotowy, 4 - obrabiany przedmiot



Rys. 3. Schemat zależności siły nieliniowej od prędkości i przemieszczenia

### 3. MATEMATYCZNY MODEL MECHANICZNEGO UKŁADU DRGAJĄCEGO

Równania ruchu układu przedstawionego na rysunku 1 zostaną wyprowadzone z równania Lagrange'a drugiego rodzaju, które w zapisie macierzowo-wektorowym dla małych drgań mają postać

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (3.1)$$

gdzie:  $E$  - całkowita energia kinetyczna układu,  
 $V$  - całkowita energia potencjalna układu,  
 $\mathbf{q}$  - wektor współrzędnych uogólnionych,  
 $\dot{\mathbf{q}}$  - wektor prędkości uogólnionych, otrzymany przez zróżniczkowanie wektora  $\mathbf{q}$  względem czasu,  
 $\mathbf{Q}$  - wektor sił uogólnionych,  
 $D$  - funkcja dyssypacji energii układu.

Wielkości skalarne są formami kwadratowymi wyrażonymi wzorami

$$E = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.2)$$

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad (3.3)$$

$$D = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.4)$$

gdzie:  $\mathbf{M}$  - macierz blokowa bezwładności układu,  
 $\mathbf{K}$  - macierz blokowa sztywności układu,  
 $\mathbf{C}$  - macierz blokowa tłumienia układu,  
 $\mathbf{q}^T$  - transponowana macierz  $\mathbf{q}$ ,  
 $\dot{\mathbf{q}}^T$  - transponowana macierz  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Wyznamy wielkości będące składnikami równania (3.1)

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}) \right] = \frac{1}{2} [2 \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}] = \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.5)$$

i podobnie

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.7)$$

Różniczkując względem czasu równania (3.5) otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}, \quad (3.8)$$

gdzie  $\ddot{\mathbf{q}}$  - pochodna wektora prędkości uogólnionej względem czasu.

Po podstawieniu równań (3.6), (3.7), (3.8) do (3.1), równanie ruchu układu przyjmie postać

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Q(q, \dot{q}). \quad (3.9)$$

Należy jeszcze opisać macierze i wektory występujące w równaniu (3.9). Niech  $k$  oznacza ilość brył sztywnych w układzie (rys. 1), przy czym każda z nich ma  $\nu$  stopni swobody. W ogólnym przypadku  $\nu = b$ , a dla elementów NM, których jest 1,  $\nu = 1$ . Wektor współrzędnych uogólnionych

$$q = \text{col} \{q_1, \dots, q_j, \dots, q_k\}, \quad (3.10)$$

przy czym blok

$$q_j = \text{col} \{q_{j1}, \dots, q_{j6}\} \quad \text{dla} \quad 1 \leq j \leq k - 1,$$

$$q_j = \{q_{j2}\} \quad \text{dla} \quad k - 1 < j \leq k.$$

Współrzędne  $q_{j1}, q_{j2}, q_{j3}$  są przemieszczeniami translacyjnymi wzdłuż odpowiednio trzech prostopadłych osi układu kartezjańskiego  $X_{j1}, X_{j2}, X_{j3}$  przyjętego w środku ciężkości bryły sztywnej i pokrywającego się przy równowadze statycznej z głównymi centralnymi osiami bezwładności ciała. Współrzędne uogólnione  $q_{j4}, q_{j5}, q_{j6}$  odpowiadają obrotom wokół odpowiednio osi pierwszej, drugiej i trzeciej układu.

Macierz bezwładności (3.11) jest macierzą diagonalną, w której blokami niezerowymi są tylko bloki leżące na głównej przekątnej

$$M = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & \dots & j & \dots & k \\ \hline M_1 & & & & & \\ \hline & M_2 & & & & \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline & & & M_j & & \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline & & & & & M_k \\ \hline & & & & & k \end{array} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Dla  $1 \leq j \leq k - 1$  blok współczynników bezwładności bryły o numerze „j” ma postać

$$M_j = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} m_{j1} & 0 & 0 & & & \\ 0 & m_{j2} & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & m_{j3} & & & \\ \hline & & & I_{j4} & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 & I_{j5} & 0 \\ & & & 0 & 0 & I_{j6} \end{array} \right] \quad (3.12)$$

a dla  $k - 1 < j \leq 1$

$$M_j = [m_j], \quad (3.13)$$

gdzie  $m_{j1} = m_{j2} = m_{j3} = m_j$  jest masą sztywnej bryły o numerze „j”, a  $I_{j4}$ ,  $I_{j5}$ ,  $I_{j6}$  oznaczają momenty bezwładności bryły, odpowiadające współrzędnym uogólnionym  $q_{j4}$ ,  $q_{j5}$ ,  $q_{j6}$ .

Macierz sztywności jest macierzą symetryczną przedstawioną poniżej (3.14)

$$K = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} & 1 & 2 & \dots & k & \\ \hline & K_{1,1} & K_{1,2} & & K_{1,k} & 1 \\ \hline & & K_{2,2} & & K_{2,k} & 2 \\ \hline & & & & & \vdots \\ \hline & & & & & \vdots \\ \hline & \text{SYM.} & & & K_{k,k} & k \\ \hline \end{array} \right] \quad (3.14)$$

Blok macierzowy  $K_{jj}$  zawiera wszystkie elementy sprężyste dołączone do bryły „j”, natomiast  $K_{jf}$  jest zbiorem wszystkich sztywności łączących bryły „j” i „f”. Pojedynczy blok ma wymiar  $\nu \times \nu$ , przy czym

$$K_{jj} = \sum_{\alpha=1}^{n_j} E_{j\alpha}^T S_{\alpha} E_{j\alpha}, \quad (3.15)$$

gdzie:  $E_{j\alpha} = G_{j\alpha} H_{j\alpha}$  - blok transformacji przemieszczeń, (3.16)

$\alpha$  - numer elementu sprężystego,

$n_j$  - ilość elementów sprężystych dołączonych do ciała „j”,

$S_{\alpha}$  - blok współczynników sztywności elementu  $\alpha$

$$S_{\alpha} = \text{diag} [k_{\alpha i}], \quad i = 1, 2 \dots 6. \quad (3.17)$$



Wielkości  $K_{\alpha 1}, K_{\alpha 2}, K_{\alpha 3}$  są współczynnikami sztywności translacyjnej wzdłuż osi  $Y_{\alpha 1}, Y_{\alpha 2}, Y_{\alpha 3}$ , natomiast  $K_{\alpha 4}, K_{\alpha 5}, K_{\alpha 6}$  są współczynnikami sztywności rotacyjnej względem osi  $Y_{\alpha 1}, Y_{\alpha 2}, Y_{\alpha 3}$ . Układ kartezjański  $Y_{\alpha 1}, Y_{\alpha 2}, Y_{\alpha 3}$  pokrywa się w stanie równowagi statycznej z głównymi osiami elementu sprężystego  $\alpha$ .

$H_{j\alpha}$  jest blokiem współrzędnych zamocowania elementu  $\alpha$  do bryły sztywnej o numerze „j”

$$H_{j\alpha} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & X_{j\alpha 3} & -X_{j\alpha 2} \\ 0 & 1 & 0 & -X_{j\alpha 3} & 0 & X_{j\alpha 1} \\ 0 & 0 & 1 & X_{j\alpha 2} & -X_{j\alpha 1} & 0 \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (3.18)$$

gdzie  $X_{j\alpha 1}, X_{j\alpha 2}, X_{j\alpha 3}$  są współrzędnymi zamocowania elementu  $\alpha$  we współrzędnych  $X_{j1}, X_{j2}, X_{j3}$  związanych z ciałem „j” (rys. 1).

$G_{j\alpha}$  jest blokiem współczynników kierunkowych takim, że

$$G_{j\alpha} = \left[ \begin{array}{c|c} \bar{G}_{j\alpha} & 0 \\ \hline 0 & \bar{G}_{j\alpha} \end{array} \right], \quad (3.19)$$

gdzie

$$\bar{G}_{j\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{j\alpha 1,1} & \cos \varphi_{j\alpha 1,2} & \cos \varphi_{j\alpha 1,3} \\ \cos \varphi_{j\alpha 2,1} & \cos \varphi_{j\alpha 2,2} & \cos \varphi_{j\alpha 2,3} \\ \cos \varphi_{j\alpha 3,1} & \cos \varphi_{j\alpha 3,2} & \cos \varphi_{j\alpha 3,3} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

jest macierzą współczynników kierunkowych między osiami układu  $Y_{\alpha 1}, Y_{\alpha 2}, Y_{\alpha 3}$  i osiami układu  $X_{j1}, X_{j2}, X_{j3}$ , przy czym  $\varphi_{j\alpha ab}$ ,  $a = 1, 2, 3$ ,  $b = 1, 2, 3$  jest kątem zawartym między osią  $Y_{\alpha a}$  i osią  $Y_{\alpha b}$ .

Bloki macierzowe  $K_{jf}$  są częścią wspólną - patrz (3.14) - pasma poziomego o numerze j, z pasmem pionowym o numerze f

$$K_{jf} = \sum_{\alpha=1}^{njf} K_{jf\alpha} = - \sum_{\alpha=1}^{njf} E_{j\alpha}^T S_{\alpha} E_{f\alpha} \quad \text{dla } j < f, \quad (3.21)$$

gdzie:  $njf$  - liczba elementów sprężystych łączących bryły „j” i „f”,

$S_{\alpha}$  - blok współczynników sztywności  $\alpha$  tego elementu sprężystego łączącego „j” i „f”,  
 $E_{j\alpha}$  i  $E_{f\alpha}$  - bloki transformacji przemieszczeń określone jak (3.16).

Bloki macierzowe  $K_{fj}$  ( $j > f$ ) wyznaczamy ze związku

$$K_{fj} = K_{jf}^T \quad (3.22)$$

Macierz tłumienia jest określona analogicznie do macierzy sztywności

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k & \\ \hline C_{11} & C_{12} & & C_{1,k1} & C_{1,k} & 1 \\ \hline & C_{22} & & C_{2,k1} & C_{2,k} & 2 \\ \hline & & & & & \vdots \\ \hline \text{SYM.} & & & C_{z-1,k-1} & C_{k-\alpha} & k-1 \\ \hline & & & & C_{kk} & k \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Bloki

$$C_{jj} = \sum_{\beta=1}^{r_j} E_{j\beta}^T T_{\beta} E_{j\beta} \quad (3.24)$$

gdzie:  $\beta$  - numer elementu tłumiącego,

$E_{j\beta}$  - blok transformacji przemieszczeń,

$T_{\beta}$  - blok współczynników tłumienia,

$r_j$  - liczba elementów tłumiących połączonych z ciałem j.

Blok współczynników tłumienia

$$T_{\beta} = \text{diag} [C_{\beta i}], \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.25)$$

Współczynniki  $C_{\beta i}$  są określone analogicznie do  $k_{\alpha i}$ . Pierwsze trzy są współczynnikami tłumienia translacyjnego, pozostałe współczynnikami tłumienia rotacyjnego. Definiujemy je odpowiednio jako stosunek siły wywołującej prędkość przemieszczenia translacyjnego do wartości tej prędkości i jako stosunek momentu siły wywołującego prędkość obrotową do jej wartości. Bloki

$$C_{jf} = \sum_{\beta=1}^{jf} C_{jf\beta} \quad \text{dla } j > f, \quad (3.26)$$

$$C_{fj} = C_{jf}^T \quad \text{dla } f > j, \quad (3.27)$$

gdzie  $r_{jf}$  - ilość elementów tłumiących łączących ciała  $j$  i  $f$ .

Wyrażenie (3.26) jest określone analogicznie do (3.21). Na koniec należy przeprowadzić redukcję obciążeń działających na poszczególne sztywne elementy skończone. Niech na dowolną bryłę sztywną  $f$  działają obciążenia w postaci wektorów  $P_{j\gamma}$ , współrzędne przyłożenia których w układzie  $X_{j1}, X_{j2}, X_{j3}$  tworzą bloki  $H_{j\gamma}$  podobne do bloków określonych zależnością (3.19). Numer przyporządkowany wektorowi siły oznaczono przez  $\gamma$ . Wektory

$$P_{j\gamma} = \text{col} \{p_{j\gamma i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (3.28)$$

gdzie trzy pierwsze wyrazy są siłami działającymi wzdłuż osi  $Z_{j\gamma 1}, Z_{j\gamma 2}, Z_{j\gamma 3}$ , a ostatnie trzy momentami względem tych osi. Początek układu prostokątnego  $Z_{j\gamma 1}, Z_{j\gamma 2}, Z_{j\gamma 3}$  pokrywa się z punktem przyłożenia siły  $P_{j\gamma}$ . Współczynniki kierunkowe między osiami  $Z_{j\gamma 1}, Z_{j\gamma 2}, Z_{j\gamma 3}$  a osiami  $X_{j1}, X_{j2}, X_{j3}$  tworzą bloki  $G_{j\gamma}$  analogiczne do bloków określonych przez (3.19).

Wektory  $P_{j\gamma}, \gamma = 1, 2, \dots, s_j$  redukują się do wektora sił uogólnionych  $Q_j$  według zasady

$$Q_j = \sum_{\gamma=1}^{s_j} H_{j\gamma}^T G_{j\gamma}^T P_{j\gamma}, \quad (3.29)$$

gdzie  $s_j$  - liczba punktów leżących na bryle o numerze  $j$ , w których działają obciążenia  $P_{j\gamma}$ .

Na ciała NM działają nieliniowe siły tarcia  $f_j$ , gdzie  $k-1 < j \leq k$ , określone zależnością

$$f_j = \mu_j N_j, \quad (3.30)$$

gdzie:  $N_j$  - reakcja normalna działająca na  $j$ -ty NM.

Schemat połączenia NM z bryłą  $k-1$  z zaznaczeniem sztywności w kierunku normalnym o numerze  $\alpha$  i tłumienia o numerze  $\beta$  jest przedstawiony na rysunku 4.

Współczynnik tarcia  $\mu_j$  zależy nieliniowo od prędkości  $\dot{q}_{j2}$  (wektor której jest równoległy do wektora  $v_0$  i działa wzdłuż osi  $X_{j2}$ ) i wynosi

$$\mu_j = \mu_{0j} \text{sgn}(v_0 - \dot{q}_{j2}) - \alpha_j (v_0 - \dot{q}_{j2}) + \beta_j (v_0 - \dot{q}_{j2})^3. \quad (3.31)$$

Elementy sprężyste i elementy tłumiące przenoszą siły, które w ogólnym przypadku wyznacza się ze związku

$$P_{\alpha} = S_{\alpha} \Delta W_{jf\alpha}, \quad (3.32)$$

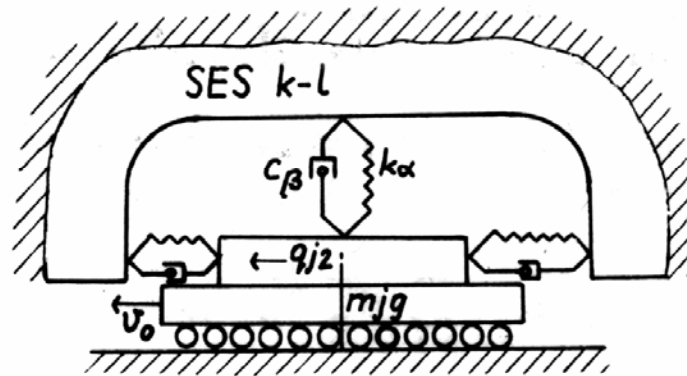
$$P_{\beta} = T_{\beta} \Delta \dot{W}_{jf\beta}, \quad (3.33)$$

gdzie:  $T_{\beta}$  - blok współczynników tłumienia elementu określony przez (3.25),

$S_{\alpha}$  - blok współczynników sztywności elementu  $\alpha$  określony przez (3.17),

$\Delta W_{jf\alpha}$  - różnica przemieszczeń końców elementu sprężystego o numerze  $\alpha$  łączącego ciała „j” i „f”,

$\Delta \dot{W}_{jf\beta}$  - różnica prędkości przemieszczeń końców elementu tłumiącego o numerze  $\beta$  łączącego ciała „j” i „f”.



Rys. 4. Schemat połączenia trącego elementu masowego z SES o numerze „k-1”

Wartość różnicy przemieszczeń jest wyznaczona ze związku

$$\Delta W_{jf\alpha} = E_{j\alpha} q_j - E_{f\alpha} q_f, \quad (3.34)$$

gdzie  $E_{j\alpha}$ ,  $E_{f\alpha}$  są określone analogicznie jak (3.16), natomiast wektory  $q_j$  i  $q_f$  są wektorami współrzędnych uogólnionych związanych odpowiednio z ciałem „j” i „f”. Wartość  $\Delta \dot{W}_{jf\beta}$  otrzymuje się po zróżniczkowaniu (3.34) i zamianie wskaźnika  $\alpha$  na wskaźnik  $\beta$ .

Ponieważ numer k-1 przyporządkowano bryle sztywnej, do której jest dołączonych l elementów NM, j-ty element masowy NM nie ma możliwości przemieszczenia w kierunku normalnym do powierzchni styku z ostoją oraz bloki współczynników sztywności i tłumienia elementów sprężystych i tłumiących łączących ciało k-1 z ciałem NM o numerze „j” w kierunku prostopadłym do powierzchni styku z ostoją mają postać:

$$S_\alpha = \text{diag} [Q, 0, k_\alpha, 0, 0, 0], \quad (3.35)$$

$$T_\beta = \text{diag} [0, 0, c_\beta, 0, 0, 0], \quad (3.36)$$

wektory  $P_\alpha$  i  $P_\beta$  są określone przez zależności:

$$P_\alpha = S_\alpha E_{k-1, \alpha} q_{k-1}, \quad (3.37)$$

$$P_\beta = T_\beta E_{k-1, \beta} \dot{q}_{k-1}, \quad (3.38)$$

przy czym:

$$P_\alpha = \{0, 0, P_{\alpha 3}, 0, 0, 0\},$$

$$P_\beta = \{0, 0, P_{\beta 3}, 0, 0, 0\}.$$

Przy przyjęciu, że linie działania siły  $P_\alpha$  i  $P_\beta$  pokrywają się, siłę w elemencie sprężysto-tłumiącym obliczamy przez zsumowanie (3.37) i (3.38) i otrzymujemy

$$P_{\alpha+\beta} = S_\alpha E_{k-1, \alpha} q_{k-1} + T_\beta E_{k-1, \beta} \dot{q}_{k-1}. \quad (3.39)$$

Reakcję normalną działającą na j-ty NM obliczamy z zależności

$$N_{j3} = m_j g - P_{\alpha 3 + \beta 3}, \quad (3.40)$$

gdzie:  $g$  - przyspieszenie grawitacyjne,

$P_{\alpha 3 + \beta 3}$  - trzeci i jedyny niezerowy wiersz w wektorze-kolumnie

$P_{\alpha+\beta}$

Po uwzględnieniu równań (3.31), (3.39) w (3.30) otrzymujemy

$$f_{j3} = [\mu_{0j} \text{sgn}(v_0 - \dot{q}_{j2}) - \alpha_j (v_0 - \dot{q}_{j2}) + \beta_j (v_0 - \dot{q}_{j2})^3] [m_j g - P_{\alpha 3 + \beta 3}]. \quad (3.41)$$

Ostatecznie wektor siły uogólnionej wynosi

$$Q = \{Q_1, \dots, Q_j, \dots, Q_k\}, \quad (3.42)$$

gdzie bloki wektorowe  $Q_j$  dla  $1 \leq j \leq k-1$  są określone zależnościami (3.29), a dla  $k-1 < j \leq k$   $Q_j = \{f_j\}$ , przy czym nieliniowe siły  $f_j$  są określane przez (3.41).

Układ równań różniczkowych ruchu (3.1) opisuje małe drgania wokół przyjętej konfiguracji statycznej wielomasowych nieliniowych autonomicznych niezachowawczych układów mechanicznych o skończonej liczbie stopni swobody.

## LITERATURA

- [1] B a n a ś G.: Drgania relaksacyjne w procesie oscylacyjnego do-  
gładzania z posuwem wzdłużnym. W: Dynamika obrabiarek i obróbki  
skrawaniem. Konferencje, Wrocław 1977.
- [2] В у ć W. E., N o w i s k i B.: Metody pomiaru rzeczywistej po-  
wierzchni styku. Zagadnienia tarcia, zużycia i smarowania z. 2,  
1967.
- [3] D a n e k O., P o l a č e k M., S p a č e k L., T l u -  
s t y J.: Drgania samowzbudne obrabiarek. WNT, Warszawa 1963.
- [4] Э л я с б е р г М. Е.: Расчёт механизмов подачи металлорежущих  
станков на плавность и чувствительность перемещения. Станки и ин-  
струменты, нр. 11-12, 1951.
- [5] F i l i p o v D. B.: Nowe podejście do zagadnienia ilościowej  
oceny charakterystyki procesu drgań samowzbudnych w układach me-  
chanicznych o ruchu prostoliniowym, W: Dynamika obrabiarek i obrób-  
ki skrawaniem. Konferencje, Wrocław 1977.
- [6] К а м и н с к а я В. В., Л е в и н а Э. М., Р е ш е т о в Д. М.:  
Станины и корпусные детали металлорежущих станков. Машгиз, Москва  
1960.
- [7] К у д и н о в А., А м и р д ж и н о в И. X.: Анализ условий появ-  
ления релаксационных автоколебаний близких к гармоническим в сто-  
лах зубофрезных станков. Машиностроение 1968.
- [8] К у д и н о в В. А., В: Исследование колебаний металлорежущих  
станков при резании металлов. Машгиз. Москва 1958.
- [9] К у д и н о в В. А., Б е л о в а Л. Л.: Экспериментальное иссле-  
дование динамических характеристик сухого трения. В: Исследование  
металлорежущих станков. Машиностроение 1968.
- [10] M a g s h e l e k K.: Dynamika obrabiarek. WNT, Warszawa 1974.
- [11] П у ш В. Е.: Малые перемещения в станках. Машгиз. Москва 1961.
- [12] Р у т к о S.: Zjawiska występujące przy kontakcie ciał w pro-  
cesie tarcia. Zagadnienia tarcia, zużycia i smarowania, z.6, 1968.
- [13] Р е ш е т о в а Д. Н.: Детали и механизмы металлорежущих станков.  
Москва 1972.
- [14] S z w e n g i e r G.: Metodyka statycznych badań połączeń pro-  
wadnicowych zespołu typu stół-sanie-wspornik frezarki. Praca do-  
ktorska, 1976.
- [15] Г л у с т ы й И.: Автоколебания в металлорежущих станках. Москва  
1956.

- [16] Z m i j e w s k i W.: Metodyka wyznaczania reakcji prowadnic wspornikowych. Rozprawa doktorska, Warszawa 1972.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЧЕСКОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ  
ВО ВРЕМЯ РЕЛЯТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ И ВЕДУЩЕГО В СТАНКАХ

К р а т к о е с о д е р ж а н и е

В статье указано на вредность явления автоколебаний обусловленных сухим трением в суппортной группе станка. До сих пор часто анализируется этот эффект как систему с одной степенью свободы. Автор принял модель ближе реального через замещение поверхностных стыков контактной жёсткостью и выделение трущихся массовых элементов. Динамика системы описана при помощи матриц.

Łódź, Политехнический Институт  
Институт Прикладной Механики

MATHEMATICAL MODEL OF MECHANICAL VIBRATION  
SYSTEM DURING RELATIVE MOTION OF SHEAR AND SLIDE  
IN A MACHINE TOOL

S u m m a r y

In this article the harmful behaviour of self-excited vibration was described in a machine tool during relative motion of shear and slide. In other papers as a mathematical model of this effect a system with one degree-of-freedom was taken. The author took a model which was more similar to true effect in a machine tool by substitution of an area contact for a discrete contact between shear and slide and by setting apart sliding elements with mass. The dynamics of mechanical system was formulated by using matrix.

Łódź, Technical University  
Institute of Applied  
Mechanics