

## Analiza układów parametrycznych w obszarach rezonansów

Roman Starosta

Politechnika Poznańska, Instytut Mechaniki Stosowanej

Jan Awrejcewicz

Politechnika Łódzka, Katedra Automatyki i Biomechaniki

### 1. WPROWADZENIE

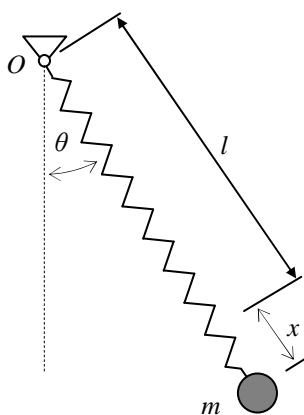
W pracy dokonano analizy drgań słabo nieliniowych gładkich układów auto-parametrycznych autonomicznych i nieautonomicznych o dwóch stopniach swobody na przykładzie wahadła o zmiennej długości.

Układy dynamiczne zawierające jako elementy wahadło matematyczne lub fizyczne mają duże znaczenie techniczne. W układach tego typu na skutek sprzężenia występującego w równaniach ruchu, może zachodzić zjawisko rezonansu parametrycznego. Zjawisko przekazywania energii z jednej postaci drgań do innej było szeroko dyskutowane w pracy [3].

Analiza drgań nieliniowych została przedstawiona w pracy na przykładzie dynamiki wahadła sprężystego Rys. 1.

Głównym celem analizy jest rozpoznanie rezonansów podstawowych oraz parametrycznych przy zastosowaniu metody wielu skal w dziedzinie czasu. W ramach pracy został opracowany program w systemie algebry komputerowej i przekształceń symbolicznych *Mathematica*, który umożliwia automatyzację wielu przekształceń przy stosowaniu metody wielu skal.

W okolicach rezonansu parametrycznego zachodzi zjawisko przekazywania energii między postaciami drgań. Metoda wielu skal umożliwia wykrycie parametrów układu, dla których zajdzie rezonans oraz pozwala na uzyskanie przebiegów czasowych dla przyjętych współrzędnych uogólnionych.



Rys. 1 Wahadło sprężyste.

Istnieją szerokie zastosowania techniczne układów zawierających różnego typu wahadła. Omówienie takich modeli dynamicznych do eliminacji drgań można znaleźć w pracach [4,5].

Wszystkie obliczenia prezentowane w pracy, zarówno przekształcenia analityczne jak i numeryczne były wykonane przy pomocy systemu przekształceń symbolicznych *Mathematica*.

## 2. WAHADŁO SPRĘŻYSTE

### 2.1. Równania ruchu

Energia kinematyczna i potencjalna badanego układu przyjmuje postać:

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + (l+x)^2 \dot{\theta}^2] \quad (1)$$

$$V = mg(l+x)(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} kx^2 \quad (2)$$

gdzie  $m$  jest masą wahadła,  $l$  długością,  $k$  oznacza sztywność sprężyny,  $g$  przyspieszenie ziemskie a  $x$  i  $\theta$  są współrzędnymi uogólnionymi przyjętymi zgodnie z rysunkiem Rys. 1. Wprowadzając bezwymiarowe współrzędne uogólnione (z tylda)  $\frac{x}{l} = \varepsilon \tilde{x}$ ,  $\theta = \varepsilon \tilde{\theta}$  oraz bezwymiarowy czas  $t \omega_2 = \tau$ , oraz przyjmując rozwinięcia funkcji trygonometrycznych

$$\sin \theta \cong \theta - \frac{1}{3!} \theta^3 \quad \text{ i } \quad \cos \theta \cong 1 - \frac{1}{2} \theta^2$$

dostaniemy równania ruchu w bezwymiarowej postaci

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} + \Omega^2 \tilde{x} &= \varepsilon \left( \dot{\tilde{\theta}}^2 - \frac{1}{2} \tilde{\theta}^2 \right) \\ \ddot{\tilde{\theta}} + \tilde{\theta} &= \varepsilon \left( \tilde{x} \tilde{\theta} - 2\dot{\tilde{x}} \dot{\tilde{\theta}} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie

$$\Omega \equiv \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad \omega_1^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 \equiv \frac{g}{l},$$

natomiast  $\varepsilon \ll 1$ , jest tzw. małym parametrem.

W dalszej części znak  $\sim$  (tylda) nad symbolem zostaje opuszczony w celu uproszczenia zapisu.

### 2.2. Rozwiązanie metodą wielu skal [1,2]

Rozwiązanie równań (3) poszukiwane jest w postaci

$$\begin{aligned} x(t; \varepsilon) &\approx x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \\ \theta(t; \varepsilon) &\approx \theta_0(T_0, T_1) + \varepsilon \theta_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie  $T_0 = t$ , natomiast  $T_1 = \varepsilon t$  jest skalą czasu dla procesów wolnozmiennych.

Wyjściowy układ równań różniczkowych zwyczajnych przekształcony zostanie do układu równań cząstkowych z uwagi na konieczność obliczania pochodnych funkcji złożonych zgodnie z wzorami:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} \end{aligned} \quad (5)$$

Podstawienie wzorów (4) i (5) do (3) i porównanie współczynników przy jednakowych potęgach  $\varepsilon$  prowadzi do równań:

(przy  $\varepsilon^0$ )

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + \Omega^2 x_0 &= 0 \\ \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_0^2} + \theta_0 &= 0\end{aligned}\quad (6)$$

(przy  $\varepsilon^1$ )

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + \Omega^2 x_1 + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{1}{2} \theta_0^2 - \left( \frac{\partial \theta_0}{\partial T_0} \right)^2 &= 0 \\ \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial T_0^2} + \theta_1 + 2 \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_0 \partial T_1} - x_0 \theta_0 + 2 \frac{\partial x_0}{\partial T_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial T_0} &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

Rozwiązanie równań (6) można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}x_0 &= A(T_1) e^{i\Omega T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\Omega T_0} \\ \theta_0 &= B(T_1) e^{iT_0} + \bar{B}(T_1) e^{-iT_0}\end{aligned}\quad (8)$$

Wstawiając (8) do (7), równania pierwszego rzędu przyjmują postać

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + \Omega^2 x_1 + \frac{3}{2} e^{2iT_0} B^2 - B\bar{B} + \frac{3}{2} e^{-2iT_0} \bar{B}^2 + 2ie^{iT_0\Omega} \Omega \frac{dA}{dT_1} - 2ie^{-iT_0\Omega} \Omega \frac{d\bar{A}}{dT_1} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial T_0^2} + \theta_1 + e^{iT_0(1+\Omega)} (-AB - 2\Omega AB) + e^{iT_0(1-\Omega)} (-\bar{A}\bar{B} - 2\Omega \bar{A}\bar{B}) + e^{iT_0(-1+\Omega)} (-A\bar{B} + 2\Omega A\bar{B}) + \\ e^{iT_0(-1-\Omega)} (-\bar{A}\bar{B} - 2\Omega \bar{A}\bar{B}) + 2ie^{iT_0} \frac{\partial B}{\partial T_1} - 2ie^{-iT_0} \frac{\partial \bar{B}}{\partial T_1} &= 0\end{aligned}\quad (9)$$

W powyższym zapisie pominięto argumenty funkcji  $A(T_1)$  i  $B(T_1)$  w celu skrócenia zapisu. Eliminacja członów sekularnych wymaga wyzerowania współczynników w równaniach (9) odpowiednio przy  $e^{i\Omega T_0}$  w pierwszym z nich i przy  $e^{iT_0}$  w drugim. Zatem funkcje  $A(T_1)$  i  $B(T_1)$  muszą spełniać zależności

$$\frac{dA(T_1)}{dT_1} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{dB(T_1)}{dT_1} = 0. \quad (10)$$

Uwzględniając (10), rozwiązania układu równań (9) przyjmą postać

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{3}{2} \frac{B^2}{\Omega^2 - 4} e^{2iT_0} + \frac{1}{2\Omega^2} B\bar{B} - \frac{3}{2} \frac{\bar{B}^2}{\Omega^2 - 4} e^{-2iT_0} \\ \theta_1 &= -\frac{-2 - 3\Omega + 2\Omega^2}{\Omega(-4 + \Omega^2)} AB e^{i(\Omega+1)T_0} - \frac{2 - 3\Omega - 2\Omega^2}{\Omega(-4 + \Omega^2)} \bar{A}\bar{B} e^{i(-\Omega+1)T_0} + \\ &\quad -\frac{2 - 3\Omega - 2\Omega^2}{\Omega(-4 + \Omega^2)} A\bar{B} e^{-i(1-\Omega)T_0} - \frac{-2 - 3\Omega + 2\Omega^2}{\Omega(-4 + \Omega^2)} \bar{A}B e^{-i(\Omega+1)T_0}\end{aligned}\quad (11)$$

Powyższe rozwiązania pokazują, że dla  $\Omega = 2$  zachodzi wewnętrzny rezonans w badanym układzie. Jest to związane z wystąpieniem nowych członów sekularnych w (9) dla  $\Omega = 2$ . W celu zbadania ruchu w obszarze rezonansowym wprowadzony zostanie do (9) pewien nowy parametr  $\sigma$  zgodnie ze wzorem

$$\varepsilon \sigma = \Omega - 2 \quad (12)$$

Równania różniczkowe (9) zostały na tej drodze sprowadzone do:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_0^2} + \Omega^2 x_1 + \left( \frac{3}{2} e^{-i\sigma T_1} B^2 + 2i\Omega \frac{dA}{dT_1} \right) e^{iT_0\Omega} - \left( \frac{3}{2} e^{i\sigma T_1} \bar{B}^2 + 2i\Omega \frac{d\bar{A}}{dT_1} \right) e^{-iT_0\Omega} - B\bar{B} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t_0^2} + \theta_1 + \left( e^{iT_1\sigma} (-A\bar{B} + 2\Omega A\bar{B}) + 2i \frac{\partial B}{\partial T_1} \right) e^{iT_0} + \left( e^{iT_1\sigma} (-\bar{A}B - 2\Omega \bar{A}B) - 2i \frac{\partial \bar{B}}{\partial T_1} \right) e^{-iT_0} &= 0 \\ e^{iT_0(-1-\Omega)} (-\bar{A}\bar{B} - 2\Omega \bar{A}\bar{B}) + e^{iT_0(1+\Omega)} (-AB - 2\Omega AB) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Usunięcie członów sekularnych wymaga by

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} e^{-i\sigma T_1} B^2 + 2i\Omega \frac{dA}{dT_1} &= 0 \\ e^{iT_1\sigma} (-A\bar{B} + 2\Omega A\bar{B}) + 2i \frac{\partial B}{\partial T_1} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

W celu przedstawienia rozwiązań (8) w łatwiejszej do interpretacji postaci

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\Omega t + \alpha) \\ \theta &= b \cos(t + \beta) \end{aligned} \quad (15)$$

należy w (14) dokonać następujących podstawień [2]:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \frac{a}{2} e^{i\alpha} \\ B &\rightarrow \frac{b}{2} e^{i\beta} \end{aligned} \quad (16)$$

Wprowadzone amplitudy  $a$  i  $b$  oraz fazy  $\alpha$  i  $\beta$  są funkcjami  $T_1$ .

Równania (14) prowadzą po uwzględnieniu (16) do wyrażeń na pochodne szukanych funkcji

$$\begin{aligned} \frac{da}{dT_1} &= \frac{3}{8\Omega} b^2 \sin(\gamma) \\ \frac{d\alpha}{dT_1} &= \frac{3}{8\Omega} \frac{b^2}{a} \cos(\gamma) \\ \frac{db}{dT_1} &= \frac{2\Omega-1}{4} ab \sin(\gamma) \\ \frac{d\beta}{dT_1} &= \frac{2\Omega-1}{4} a \cos(\gamma) \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie

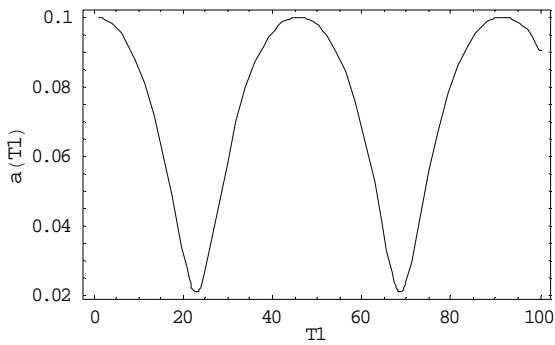
$$\gamma = T_1\sigma + \alpha(T_1) - 2\beta(T_1).$$

Rozwiązanie układu powyższych równań pozwala na uzyskanie informacji o modulacjach amplitud  $a(T_1)$  i  $b(T_1)$  oraz faz odpowiednio  $\alpha(T_1)$  i  $\beta(T_1)$ .

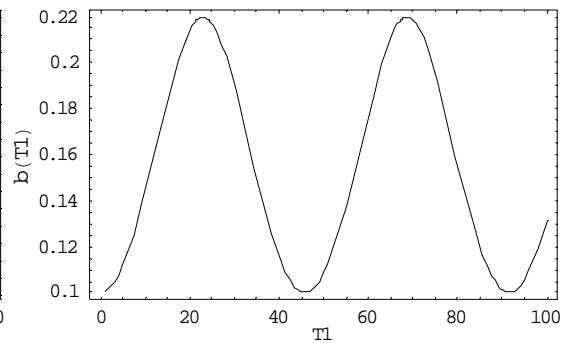
### 3. PRZYKŁADY

#### 2.3. Drgania autonomiczne w obszarze rezonansu wewnętrznego

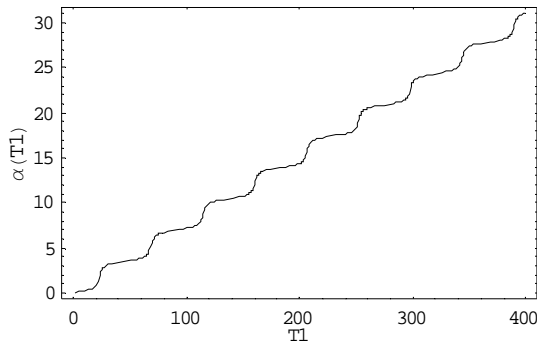
Układ (17) został rozwiązany numerycznie metodą Rungego-Kutty. Modulacje amplitud i faz w obszarze rezonansu wewnętrznego przedstawiają wykresy na Rys. 2-5. Parametry przyjęte do obliczeń to:  $\Omega = 2$ ,  $\varepsilon = 0.1$ , natomiast warunki początkowe  $a(0) = 0.1$ ,  $b(0) = 0.1$ ,  $\alpha(0) = 0$ ,  $\beta(0) = 0$ .



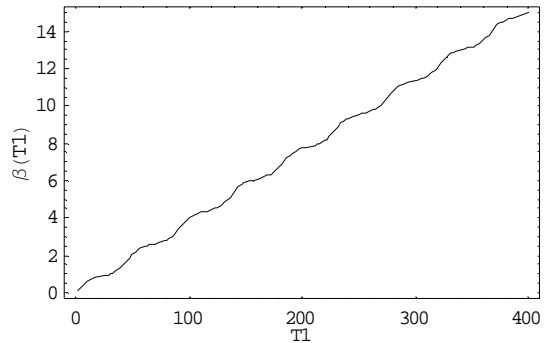
**Rys. 2** Modulacja amplitudy drgań sprężystych, (zmienna  $x$ )



**Rys. 3** Modulacja amplitudy wychyleń wahadła, (zmienna  $\theta$ )



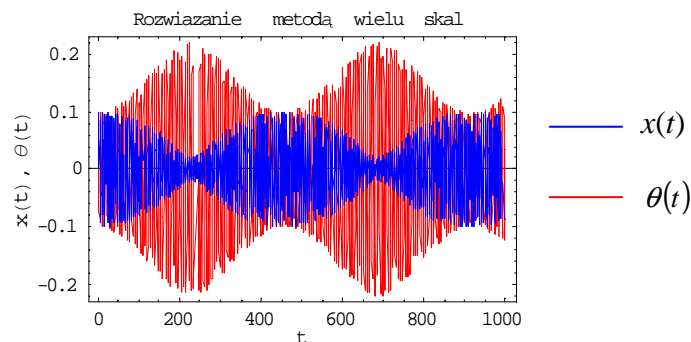
**Rys. 4** Modulacja fazy drgań sprężystych, (zmienna  $x$ )



**Rys. 5** Modulacja fazy wychyleń wahadła, (zmienna  $\theta$ )

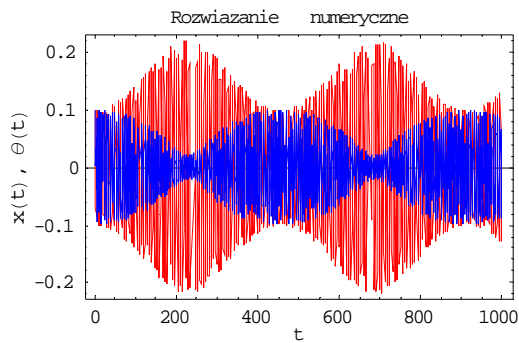
Na rysunkach Rys. 2 i 3 jest zobrazowany wolnozmienny proces modulacji amplitud zmiennych uogólnionych, czyli kąta wychylenia wahadła  $\theta$  i bezwymiarowego wydłużenia sprężyny  $x$ . Kształt wykresów odzwierciedla silną nieliniowość zagadnienia. Modulacje amplitud zachodzą w bardzo dużym zakresie  $a \in (0.02, 0.1)$ , natomiast  $b \in (0.11, 0.22)$ . Wskazuje to na wyraźną wymianę energii między postaciami drgań układu w obszarze rezonansowym. Modulacje fazy są również wyraźnie widoczne, choć ich interpretacja nie jest tak czytelna.

Zestawienie przebiegów czasowych dla obydwu współrzędnych uogólnionych dla tych samych parametrów i warunków początkowych jak wyżej, przedstawia Rys. 6. Na podstawie tego wykresu można zauważyć, że amplituda drgań zmienia się naprzemiennie dla postaci  $\theta$  i  $x$ . Świadczy to, jak już wcześniej wspomniano, o przekazywaniu energii między tymi postaciami.

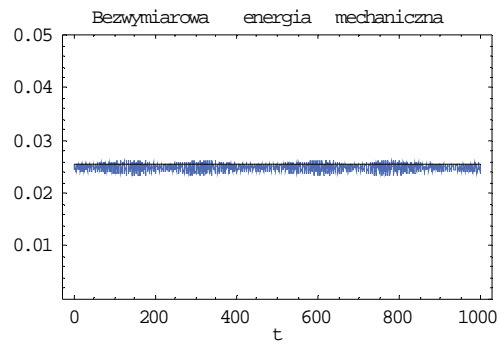


**Rys. 6** Wychylenia wahadła sprężystego w funkcji czasu,  $\Omega = 2, \varepsilon = 0.1$ .

W celu potwierdzenia poprawności rozwiązania metodą wielu skal, to samo zagadnienie (3) z tymi samymi parametrami policzone zostało numerycznie. Przebieg czasowy dla zmiennych  $\theta$  i  $x$  uzyskany metodą numeryczną Rungego-Kutty przedstawia wykres na Rys. 7. Przyjęte warunki początkowe to  $\theta(0) = 0.1, \frac{\partial \theta}{\partial t}(0) = 0, x(0) = 0.1, \frac{\partial x}{\partial t}(0) = 0$ .



**Rys. 7** Przebiegi czasowe współrzędnych  $x$  i  $\theta$ ;  
—  $x$ , —  $\theta$ .



**Rys. 8** Energia całkowita układu. W chwili początkowej  $E=0.0254954$ .

Porównanie wykresów na Rys. 6 i 7 wskazuje na dużą zgodność wyników uzyskanych obydwoma metodami.

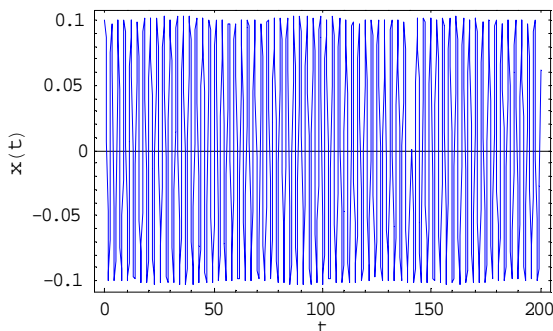
W celu kontroli poprawności rozwiązania numerycznego naliczana była również energia całkowita badanego układu. Bezwymiarowa postać całkowitej energii mechanicznej uwzględniająca wcześniejsze oznaczenia dana jest wzorem

$$E = \frac{1}{2} [\dot{x}^2 + (1+x)^2 \dot{\theta}^2] + (1+x)(1-\cos \theta) + \frac{1}{2} \Omega^2 x^2 \quad (18)$$

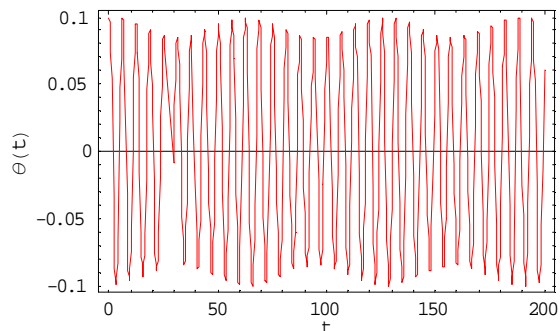
Całkowita energia mechaniczna w chwili początkowej wynosi  $E(0)=0.0254954$  i na wykresie Rys. 8 wartość ta jest zaznaczona czarną linią. Z uwagi na zachowawczy charakter drgań, energia powinna być stała w trakcie ruchu. Jak pokazuje wykres, energia całkowita jest w obliczeniach numerycznych zachowana z dobrym przybliżeniem.

### 2.3. Drgania swobodne z dala od rezonansu

Przy założeniu  $\Omega \neq 2$  efekt przepływu energii obserwowany na wcześniejszych wykresach zanika. Poniżej przedstawiony jest przebieg czasowy dla obydwu postaci drgań  $\theta$  i  $x$  dla  $\Omega = 2.1$  pozostałe parametry są takie jak poprzednio.



**Rys. 9** Przebieg czasowy,  $\Omega = 2.1$ ,  
(zmienna  $x$ )



**Rys. 10** Przebieg czasowy,  $\Omega = 2.1$ ,  
(zmienna  $\theta$ )

Na Rys. 9 i 10 parametr  $\Omega$  przyjmował wartość różną od rezonansowej jednak bardzo bliską, stąd widać pewną niewielką stosunkowo modulację amplitud. Oddalając się bardziej od  $\Omega = 2$ , w kierunku większych lub mniejszych wartości, efekt ten zanika całkowicie. Podobnie jak wcześniej zgodność przebiegów uzyskanych metodą wielu skal z wynikiem numerycznym jest bardzo wysoka (różnice nie są widoczne na wykresach w prezentowanej skali).

### 2.3. Drgania z wymuszone w obszarach rezonansu

Jako kolejny przykład rozważmy drgania wymuszone. Słabe wymuszenie periodyczne zostało wprowadzone do równań (3) w taki sposób by oddziaływało bezpośrednio na współrzędną  $x$ , a więc wzdłuż sprężyny wahadła.

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \varepsilon \left( \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) + \varepsilon f \cos(\omega t) \quad (19)$$

$$\ddot{\theta} + \theta = \varepsilon (x \theta - 2 \dot{x} \dot{\theta})$$

$f$  jest bezwymiarową amplitudą, a  $\omega$  częstością siły wymuszającej.

Po usunięciu z równań pierwszego rzędu członów sekularnych dostajemy rozwiązanie w postaci

$$x_1 = f \frac{e^{iT_0 \omega} + e^{-iT_0 \omega}}{2(\omega^2 - \Omega^2)} + \frac{3}{2} \frac{B^2}{4 - \Omega^2} e^{2iT_0} + \frac{1}{\Omega^2} B \bar{B} + \frac{3}{2} \frac{\bar{B}^2}{4 - \Omega^2} e^{-2iT_0}$$

$$\theta_1 = \frac{1 + 2\Omega}{\Omega(2 + \Omega)} A B e^{i(\Omega+1)T_0} + \frac{-1 + 2\Omega}{\Omega(-2 + \Omega)} \bar{A} B e^{i(-\Omega+1)T_0} + \quad (20)$$

$$+ \frac{-1 + 2\Omega}{\Omega(-2 + \Omega)} A \bar{B} e^{-i(1-\Omega)T_0} - \frac{1 + 2\Omega}{\Omega(2 + \Omega)} \bar{A} \bar{B} e^{-i(\Omega+1)T_0}$$

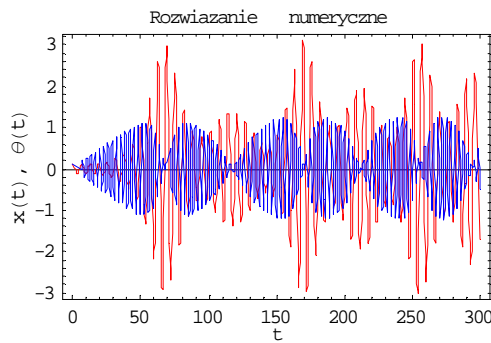
Postać powyższych rozwiązań sugeruje, że możliwe są rezonanse:

- główny dla  $\omega = \Omega$ ,
- parametryczny dla  $\Omega = 2$ .

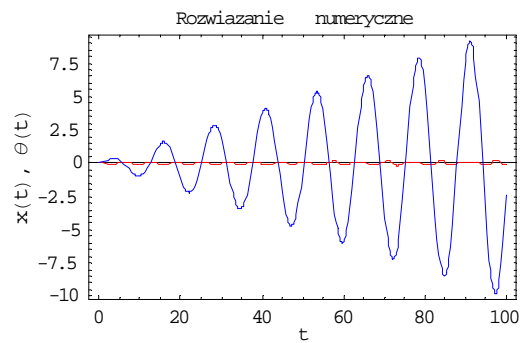
Przebiegi czasowe dla wybranych wartości parametrów ruchu przedstawiono na Rys. 11-14.

Warunki początkowe były przyjęte tak jak poprzednio  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial t}(0) = 0$ ,  $x(0) = 0.1$ ,  $\frac{\partial x}{\partial t}(0) = 0$ ,

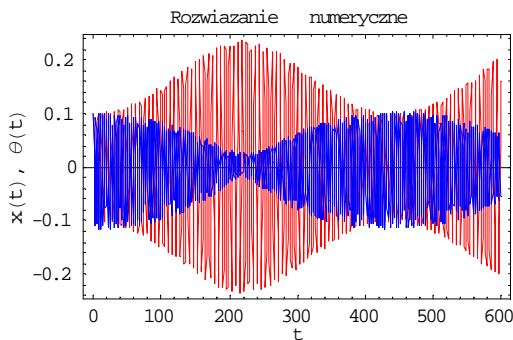
$f = 1$



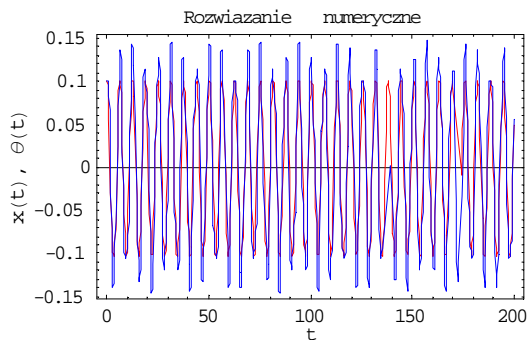
**Rys. 11** Drgania w rezonansie,  $\Omega = \omega = 2$ , rezonans parametryczny



**Rys. 12** Drgania w rezonansie,  $\Omega = \omega = 0.5$ , rezonans główny



**Rys. 13** Drgania w rezonansie,  $\Omega = 2$ ,  $\omega = 4$ , rezonans subharmoniczny



**Rys. 14** Drgania w obszarze poza rezonansem,  $\Omega = 1$ ,  $\omega = 2.3$

#### 4. WNIOSKI

Wszystkie obliczenia zarówno dokładne (symboliczne) jak i numeryczne, zostały przeprowadzone w systemie przekształceń symbolicznych *Mathematica*. W ramach pracy został opracowany program pozwalający w dużej mierze zautomatyzować obliczenia dla metody wielu skal.

Wyniki pokazują, że stosując metodę wielu skal w dziedzinie czasu można przeprowadzić zarówno jakościową jak i ilościową analizę drgań nieliniowych układów dynamicznych. Metoda pozwala rozpoznać parametry, dla których wystąpi rezonans.

Dla układu autonomicznego, rozwiązanie analityczne pozwoliło prawidłowo zidentyfikować rezonans wewnętrzny. Przebiegi czasowe wykreślone na Rys. 6 potwierdzają zjawisko rezonansu parametrycznego i związanego z nim przepływu energii w układzie. Wyniki analityczne uzyskane przybliżoną metodą asymptotyczną wielu skal zostały potwierdzone numerycznie (Rys. 7).

Wybrane przebiegi czasowe dla układu nieautonomicznego przedstawione zostały na Rys. 11-14.

#### *Podziękowania*

Badania zostały częściowo sfinansowane z projektu badawczego 21-250/2007 DS.

#### *Bibliografia*

- [1] Shivamoggi B. K., *Perturbation methods for differential equations*, Birkhauser Boston,
- [2] Awrejcewicz J., Krysko V. A., *Wprowadzenie do współczesnych metod asymptotycznych*, WNT, Warszawa, 2004.
- [3] Sado D. Przenoszenie energii w nieliniowo sprzężonych układach o dwóch stopniach swobody, OWPW, Warszawa, 1997.
- [4] Genin M. D., Ryabow V. M., *Uprugo-inercyjnyje vibro-izolirujuscie sistemy*, Nauka, Moskwa, 1988.
- [5] Karamyskin V. V., *Dynamiceskoje gasenie kolebanii*, *Maszynostrojenie*, Leningrad, 1988.

Summary in English The paper concerns analysis of nonlinear vibration of smooth autoparametrical autonomous and non-autonomous systems of two-degree-of-freedom. A multiple scales method of investigation of small vibrations is applied to the analysis of resonance and the obtained results have been confirmed numerically. Analytical calculation was made with the use of Mathematica.