

Dynamika bifurkacyjna i chaotyczna belek typu Eulera-Bernoulliego

Jan Awrejcewicz

Politechnika Łódzka, Katedra Automatyki i Biomechaniki

Vadim A. Krysko, Olga A. Saltykova

Saratov State Technical University, Department of Higher Mathematics

1. WPROWADZENIE

Dynamika belki typu Bernoulliego podpartej sprężystości i wymuszanej harmonicznymi i poddanej działaniu uderzenia była przedmiotem analizy pracy [1], gdzie głównie skoncentrowano się na sporządzeniu charakterystyk prędkości uderzenia w funkcji częstości wymuszenia przy użyciu metody elementów skończonych. W pracy [2] dokonano badań eksperymentalnych belki z jednym końcem zamocowanym, a drugim swobodnym poddanego uderzeniu i uzyskane wyniki porównano z wynikami otrzymanymi w oparciu o jednopostaciową aproksymację dynamiki belki.

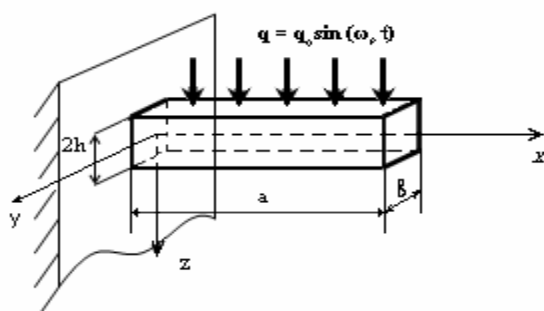
Drgania okresowe belki wymuszanej okresowo jako obiektu o wielu stopniach swobody z elastyczną barierą w jej środku były przedmiotem analizy pracy [3]. Zagadnienie sprowadzono do analizy problemu brzegowego przy zastosowaniu metody strzelania i aproksymacji belki jako układu o dwóch i czterech stopniach swobody.

Ponadto dynamikę regularną i chaotyczną belek podpartych jednostronnie sprężystości badano eksperymentalnie i numerycznie w pracy [4].

W celu analizy uderzenia należy we właściwy sposób dokonać modelowania drgań belki, co jest przedmiotem niniejszej pracy. Zagadnienie uderzenia w taką belkę było rozpatrzone we wcześniejszej pracy autorów [5].

2. MODEL MATEMATYCZNY

Głównym celem tej pracy jest modelowanie matematyczne drgań belki typu Eulera-Bernoulliego przy zastosowaniu różnych warunków brzegowych (rys. 1).



Rys. 1. Model analizowanej belki

Wprowadźmy układ współrzędnych $OXYZ$ i niech położenie punktu materialnego belki należy do obszaru $\Omega = \left\{ x \in [0, a]; -h \leq z \leq h; -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \right\}$, przy czym powierzchnia środkowa belki ulega

odkształceniu $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$, gdzie $w(x, t)$ oznacza ugięcie poprzeczne belki, a $u(x, t)$ opisuje przemieszczanie jej powierzchni środkowej wzdłuż osi OX . Zakładamy, że normalna do powierzchni

środkowej belki pozostaje normalną po odkształceniu belki i $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$. Wprowadzone założenia pozwalają na wyprowadzenie następujących równań ruchu belki

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho \varepsilon_2 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= 0; \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho \varepsilon_1 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{2h^3}{3} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{E2h}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} - \\ - \frac{E2h}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - q &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie E oznacza moduł Younga belki, ρ oznacza jej gęstość, ε_1 , ε_2 są współczynnikami tłumienia, $2h$ oznacza wysokość belki, a oznacza jej długość i q określa jej obciążenie poprzeczne.

Wprowadźmy następujące parametry bezwymiarowe

$$\begin{aligned} A = \frac{E}{(1-\nu^2)}, \bar{w} = \frac{w}{2h}, \bar{u} = \frac{ua}{(2h)^2}, \bar{x} = \frac{x}{a}, \lambda = \frac{a}{2h}, \bar{q} = q \frac{a^4}{(2h)^4 A}, \\ \bar{t} = \frac{t}{\tau}, \tau = \frac{a}{c}, c = \sqrt{\frac{Ag}{\rho}}, \bar{\varepsilon} = \varepsilon \frac{a}{c}, \end{aligned} \quad (2)$$

Nowymi bezwymiarowymi parametrami są (po opuszczeniu kresek): u jest przemieszczeniem belki wzdłuż kierunku x , w jest ugięciem belki, t oznacza czas, q jest dociążeniem poprzecznym, ε jest współczynnikiem tłumienia, g oznacza przyspieszenie ziemskie, natomiast $a, 2h$ są wymiarami belki.

Równania w postaci bezwymiarowej przyjmą postać

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{t}^2} + \varepsilon_1 \frac{\partial w}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{\lambda^2} \left(-\frac{1}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^4} + l_1(w, u) + l_2(w, u) + q \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{t}^2} + \varepsilon_2 \frac{\partial u}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} + l_3(w, w), \quad (3)$$

$$\text{gdzie } l_1(w, u) = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad l_2(w, u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \text{ i } \quad l_3(w, w) = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

oznaczają operatory nieliniowe.

Z równaniem (3) można związać następujące warunki brzegowe:

Problem 1

$$w(0) = 0; w(1) = 0; u(0) = 0; u(1) = 0; \frac{\partial w(0)}{\partial x} = \frac{\partial w(1)}{\partial x} = 0; \quad (4)$$

Problem 2

$$w(0) = 0; w(1) = 0; u(0) = 0; u(1) = 0; \frac{\partial^2 w(0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(1)}{\partial x^2} = 0; \quad (5)$$

Problem 3

$$w(0) = 0; u(0) = 0; M_x = 0; N_x = 0; \quad (6)$$

gdzie $N_x = \int_{-h}^h \sigma_{xx} dz$ jest siłą wzdłużną, a $M_x = \int_{-h}^h \sigma_{xx} z dz = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ oznacza moment siły.

Dodatkowo równania (3)-(6) oraz wprowadzone warunkami brzegowe 1-3 uzupełniono następującymi warunkami początkowymi

$$w(x)|_{t=0} = 0; u(x)|_{t=0} = 0; \dot{w}(x)|_{t=0} = 0; \dot{u}(x)|_{t=0} = 0. \quad (7)$$

3. METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

Nieskończenie wymiarowe zagadnienie (3)-(7) zostało zredukowane do równań różniczkowych zwyczajnych przy zastosowaniu metody różnic skończonych z aproksymacją $O(c^2)$. W każdym węzle siatki przestrzennej zdefiniowano następujący układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned} L_{1,c}(w_i, u_i) &= \varepsilon_1 \dot{w}_i + \ddot{w}_i, \\ L_{2,c}(w_i, u_i) &= \varepsilon_2 \dot{u}_i + \ddot{u}_i, \quad (i = 0, \dots, n), \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie

$$\begin{aligned} L_{2,c}(w_i, u_i) &= \frac{1}{c^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \frac{1}{2c}(w_{i-1} - w_{i+1})\frac{1}{c^2}(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}); \\ L_{1,c}(w_i, u_i) &= \frac{1}{\lambda^2} \left(-\frac{1}{12} \frac{1}{c^4} (w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}) + \frac{1}{2c} (w_{i-1} - w_{i+1}) \frac{1}{c^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \right. \\ &+ \frac{1}{2c} (w_{i-1} - w_{i+1}) \frac{1}{c^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \left. \left(\frac{1}{2c} (w_{i-1} - w_{i+1}) \right)^2 \frac{1}{c^2} (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{c^2} (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) \left(\frac{1}{2c} (u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{1}{8c^2} (w_{i-1} - w_{i+1})(w_{i-1} - w_{i+1}) \right) + q \right). \end{aligned}$$

Zagadnienie powyższe uzupełniono o następujące warunki brzegowe

(i) problemy 1 i 2:

$$w_0 = 0; w_n = 0; u_0 = 0; u_n = 0; \quad (9)$$

(ii) problem 3:

$$w_0 = 0; u_0 = 0; M_x = 0; N_x = 0. \quad (10)$$

Warunki początkowe (7) związane z zagadnieniami 1, 2 i 3 są następujące

$$w(x_i)|_{t=0} = 0; u(x_i)|_{t=0} = 0; \dot{w}(x_i)|_{t=0} = 0; \dot{u}(x_i)|_{t=0} = 0; \quad (i = 0, \dots, n). \quad (11)$$

Równania różniczkowe zwyczajne rozwiązano przy użyciu metody Rungego-Kutty czwartego rzędu, a analizowana belka była wymuszana harmonicznym w postaci

$$q = q_0 \cos(\omega_p t). \quad (12)$$

4. WPŁYW PARAMETRÓW ε_1 I ε_2 NA CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOŚCIOWE

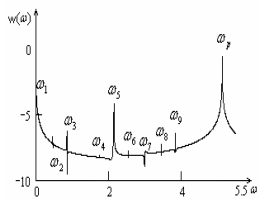
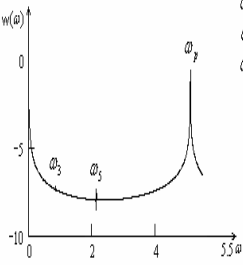
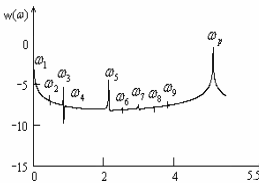
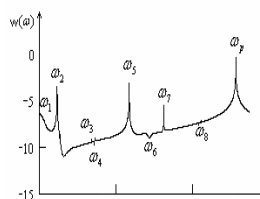
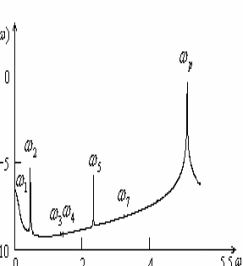
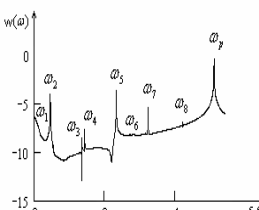
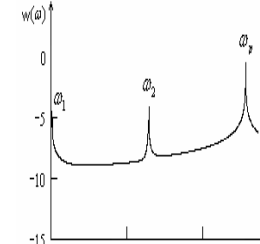
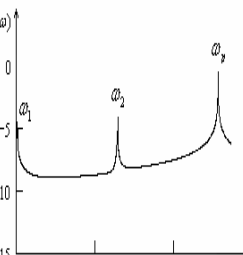
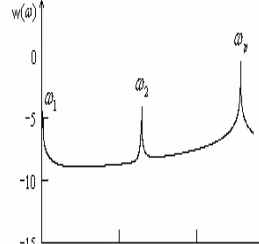
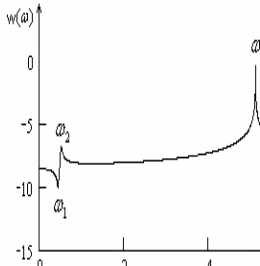
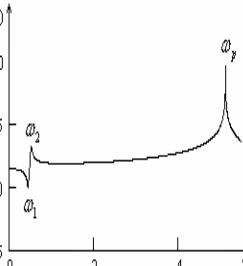
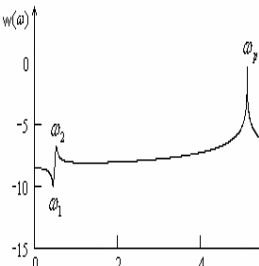
Dokonajmy analizy wpływu tłumienia ε_1 na charakterystyki częstotliwościowe belki w funkcji względnej długości belki $\lambda = \frac{a}{2h} = 50$. Zauważmy, że kroki przestrzenny c i czasowy Δt wybierano przy zachowaniu stabilności algorytmu numerycznego w oparciu o regułę Rungego i w obliczeniach przyjęto: $n = 40$, $c = 1/40$, $\Delta t = 3.9052 \cdot 10^{-3}$.

Poniżej dokonamy analizy wpływu parametru ε_1 na zmiany charakterystyk dynamicznych w funkcji długości belki w przypadku problemów 1 i 3 takich jak: przekroje Poincarégo, portrety modalne $w(w'_x)$, przebiegi czasowe $(w(t))$, widma częstotliwości i portrety fazowe $w(\dot{w})$.

4.1. Widmo częstotliwości

W tabeli 1 podano widma częstotliwości dla problemu 1 i dla różnych współczynników tłumienia ε_1 , $\varepsilon_2 = 0$. Amplitudę wymuszenia q_0 dla każdego ε_1 wypierano poprzez spełnienie warunku $w(0.5) \approx 1.5$.

Tabela 1. Widmo częstotliwości

$\varepsilon_1 = 20, q_0 = 3.5 \cdot 10^5$		
$x = 0.25$	$x = 0.5$	$x = 0.75$
 <ul style="list-style-type: none"> $\omega_7 = 5.1$ $\omega_1 = 10^4$ $\omega_2 = \omega_7 / 11$ $\omega_3 = \omega_7 / 6$ $\omega_4 = 1.76$ $\omega_5 = 2.12$ $\omega_6 = 2.55$ $\omega_7 = 2.96$ $\omega_8 = 3.46$ $\omega_9 = 3.83$ 	 <ul style="list-style-type: none"> $\omega_7 = 5.1$ $\omega_2 = \omega_7 / 6$ $\omega_3 = 2.12$ 	 <ul style="list-style-type: none"> $\omega_7 = 5.1$ $\omega_1 = 10^4$ $\omega_2 = \omega_7 / 11$ $\omega_3 = \omega_7 / 6$ $\omega_4 = 1.22$ $\omega_5 = 2.12$ $\omega_6 = 2.55$ $\omega_7 = 2.96$ $\omega_8 = 3.46$ $\omega_9 = 3.83$
$\varepsilon_1 = 10, q_0 = 2.2 \cdot 10^5$		
 <ul style="list-style-type: none"> $\omega_7 = 5.1$ $\omega_1 = 10^4$ $\omega_2 = \omega_7 / 11$ $\omega_3 = 1.32$ $\omega_4 = 1.42$ $\omega_5 = \omega_2 \cdot 5$ $\omega_6 = \omega_4 \cdot 2$ $\omega_7 = \omega_2 \cdot 7$ $\omega_8 = \omega_2 \cdot 9$ 	 <ul style="list-style-type: none"> $\omega_7 = 5.1$ $\omega_1 = 10^4$ $\omega_2 = \omega_7 / 11$ $\omega_3 = 1.32$ $\omega_4 = 1.42$ $\omega_5 = \omega_2 \cdot 5$ $\omega_7 = \omega_2 \cdot 7$ 	 <ul style="list-style-type: none"> $\omega_7 = 5.1$ $\omega_1 = 10^4$ $\omega_2 = \omega_7 / 11$ $\omega_3 = 1.32$ $\omega_4 = 1.42$ $\omega_5 = \omega_2 \cdot 5$ $\omega_6 = \omega_4 \cdot 2$ $\omega_7 = \omega_2 \cdot 7$ $\omega_8 = \omega_2 \cdot 9$
$\varepsilon_1 = 5, q_0 = 1.5 \cdot 10^5$		
 <ul style="list-style-type: none"> $\omega_7 = 5.1$ $\omega_1 = 10^4$ $\omega_2 = \omega_7 / 2$ 	 <ul style="list-style-type: none"> $\omega_7 = 5.1$ $\omega_1 = 10^4$ $\omega_2 = \omega_7 / 2$ 	 <ul style="list-style-type: none"> $\omega_7 = 5.1$ $\omega_1 = 10^4$ $\omega_2 = \omega_7 / 2$
$\varepsilon_1 = 1, q_0 = 0.7 \cdot 10^5$		
 <ul style="list-style-type: none"> $\omega_7 = 5.1$ $\omega_1 = 0.44$ $\omega_2 = 0.56$ 	 <ul style="list-style-type: none"> $\omega_7 = 5.1$ $\omega_1 = 0.44$ $\omega_2 = 0.56$ 	 <ul style="list-style-type: none"> $\omega_7 = 5.1$ $\omega_1 = 0.44$ $\omega_2 = 0.56$

Analiza uzyskanych wyników (tabela 1) wskazuje na zmianę widma częstotliwości w funkcji długości belki w zależności od wartości ε_1 . Obniżenie wartości ε_1 powoduje obniżenie wartości udziału w częstotliwości widma drgań belki i np. dla $\varepsilon_1 = 5$ wszystkie punkty belki drgają z jedną częstotliwością.

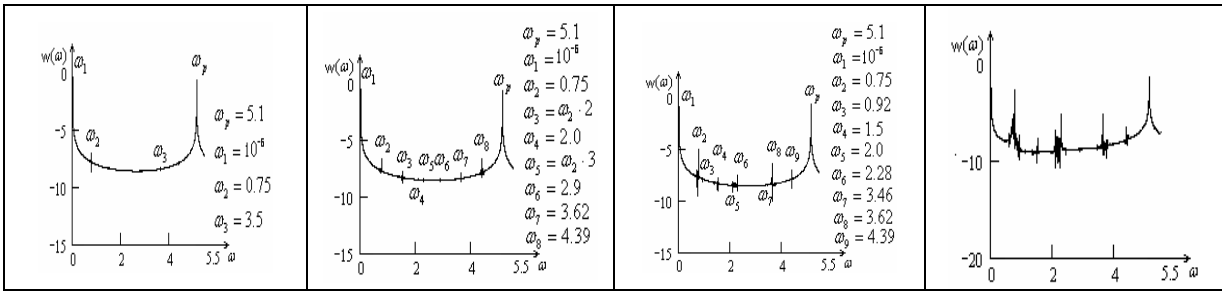
Ponadto obniżenie wartości ε_1 pociąga za sobą koncentrację widma częstości ($x = 0.25$, $x = 0.5$, $x = 0.75$). Dla $\varepsilon_1 = 20$ liczba występujących częstości w środku belki ($x = 0.5$) jest znacznie mniejsza niż w jej ćwiartkach ($x = 0.25; 0.75$). W środku belki zaobserwowano liniową kombinację (rezonans) częstości $\omega_3 = \omega_p/6$ i częstości $\omega_5 = 2.12$ i $\omega_1 \approx 10^{-6}$. W punktach $x = 0.25; 0.75$ zaobserwowano rezonans pomiędzy pięcioma częstościami drgań własnych belki i $\omega_2 = \omega_p/11$. Wartość częstości ω_4 wyraźnie zależy od długości belki: dla $x = 0.25$ mamy $\omega_4 = 1.76$, podczas gdy dla $x = 0.75$ mamy $\omega_4 = 1.22$. Liczba i wartości częstości dla ćwiartek belki pokrywają się dla $\varepsilon_1 = 10$. Liczba częstości drgań dla $x = 0.5$ jest mniejsza niż w przypadku $x = 0.25; 0.75$. Dla $\varepsilon_1 = 5$ liczba i wartości częstości nie zależą od długości belki.

4.2. Analiza problemu 3 ($\lambda = 50$)

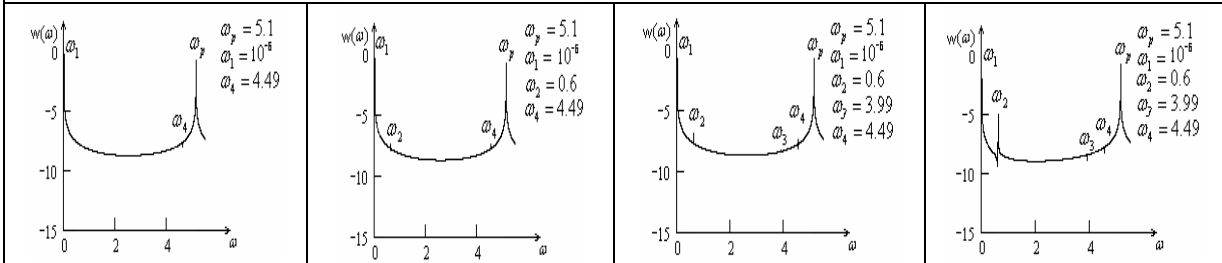
W tej sekcji zajmiemy się analizą drgań belki (problem 3) dla ustalonych wartości $\varepsilon_1 = 20; 10; 5; 1$ przy zmianie parametru ε_2 . W tabeli 2 podano widma częstości belki dla różnych wartości współczynników tłumienia ε_1 i ε_2 .

Tabela 2. Widmo częstości ($\lambda = 50$).

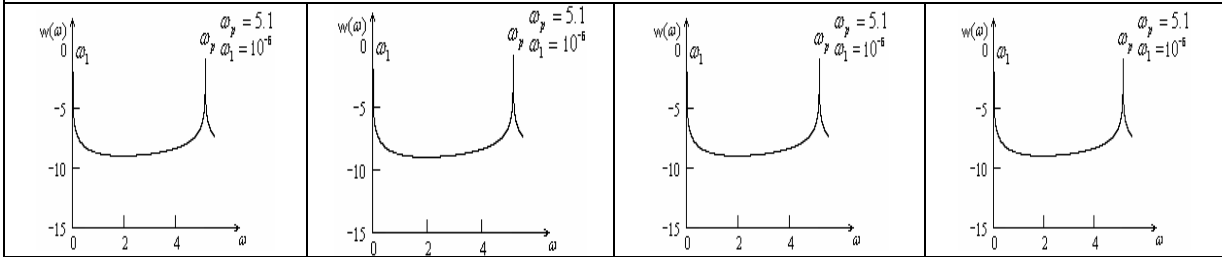
$\varepsilon_1 = 20, \varepsilon_2 = 0, q_0 = 2.8 \cdot 10^5$			
$x = 1$	$x = 0.75$	$x = 0.5$	$x = 0.25$
$\varepsilon_1 = 20, \varepsilon_2 = 0.05, q_0 = 2.8 \cdot 10^5$			
$\varepsilon_1 = 20, \varepsilon_2 = 0.1, q_0 = 2.8 \cdot 10^5$			
$\varepsilon_1 = 10, \varepsilon_2 = 0, q_0 = 1.65 \cdot 10^5$			



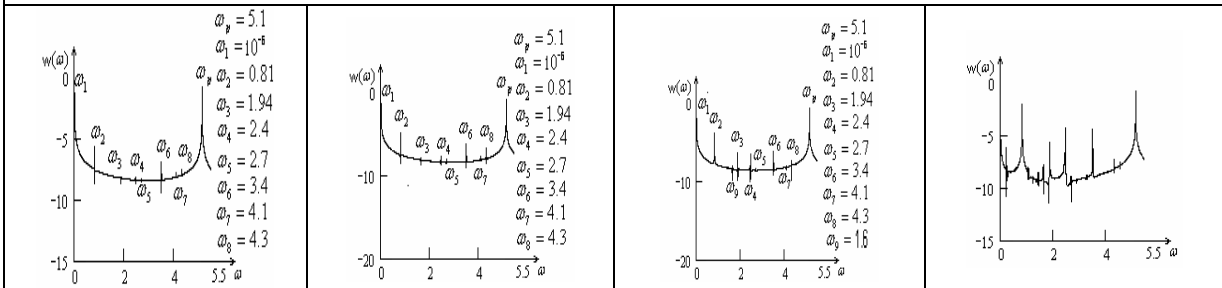
$\epsilon_1 = 10, \epsilon_2 = 0.05, q_0 = 1.65 \cdot 10^5$



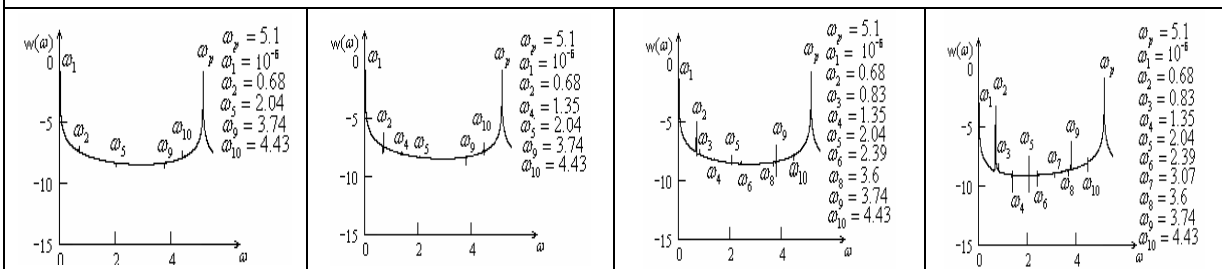
$\epsilon_1 = 10, \epsilon_2 = 0.1, q_0 = 1.65 \cdot 10^5$



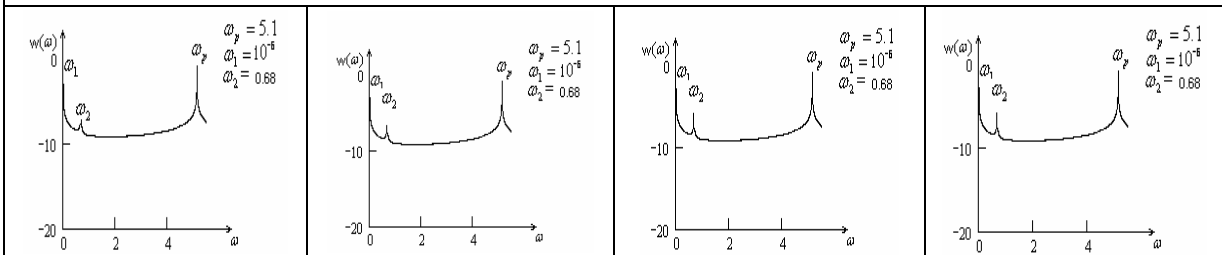
$\epsilon_1 = 5, \epsilon_2 = 0, q_0 = 0.95 \cdot 10^5$



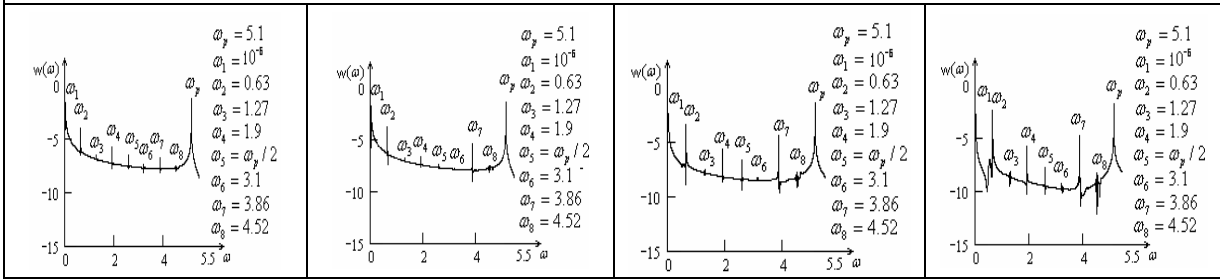
$\epsilon_1 = 5, \epsilon_2 = 0.04, q_0 = 0.95 \cdot 10^5$



$\epsilon_1 = 5, \epsilon_2 = 0.07, q_0 = 0.95 \cdot 10^5$



$$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0, q_0 = 0.32 \cdot 10^5$$



Pokrywanie się częstości drgań zaobserwowano jedynie dla $\varepsilon_1 = 1$ i $\varepsilon_2 = 0$ oraz rezonans $\omega_5 = \omega_p / 2$. Ponadto wzrost ε_1 (dla $\varepsilon_2 = 0$) i zmniejszenie odległości badanego punktu belki od jej zamocowania powoduje wzrost liczby częstości w widmie.

Dla przypadku $\varepsilon_1 = 20$, $\varepsilon_2 = 0$ na swobodnym końcu belki zaobserwowano pojawienie się jedynie trzech częstości, które są liniowo zależne. W punkcie $x = 0.75$ liczba częstości wzrasta do pięciu. W środku belki ($x = 0.5$) mamy już sześć częstości, ale liniowo niezależnych. W przypadku $x = 0.25$ pojawia się już 9 częstości, ale jedynie z jednym rezonansem. W przypadku $\varepsilon_1 = 20$ i $\varepsilon_2 = 0.05$ zaobserwowano obniżenie się liczby częstości wzdłuż długości belki. Na przykład dla $\varepsilon_1 = 20$ i $\varepsilon_2 = 0.1$ zaobserwowano jedynie dwie częstości dla całego obszaru zmian długości belki, podczas gdy dla $\varepsilon_1 = 20$, $\varepsilon_2 = 0$ liczba częstości zmienia się w przedziale od 9. do 3.

Dla $\varepsilon_1 = 10$ i $\varepsilon_2 = 0$ zaobserwowano podobne zjawisko do opisanego dla $\varepsilon_1 = 20$, $\varepsilon_2 = 0$, ale w tym przypadku liczba pojawiających się częstości wzrosła. Dla $x = 0.25$ liczba pojawiających się częstości jest tak wysoka, że trudno jest je wyodrębnić i widmo interpretuje się jako ciągłe, co oznacza pojawienie się dynamiki chaotycznej. Wzrost parametru ε_2 do wartości 0.05 prowadzi do szybkiego spadku liczby częstości w widmie, ale ich rozkład wzdłuż długości belki jest różny. Przy wartości $\varepsilon_2 = 0.1$ obserwuje się pełne pokrycie częstości.

Na przykład dla $\varepsilon_1 = 5$ i $\varepsilon_2 = 0$ liczba częstości i ich wartości pokrywają się dla przypadków $x = 0.75$ i $x = 1$, ale dla $x = 0.5$ obserwuje się wzrost liczby częstości (podobnie jest dla $x = 0.25$). Podobne obserwacje dotyczą parametru ε_2 , gdzie pełne pokrywanie się częstości obserwuje się dla $\varepsilon_2 = 0.07$.

Również przedmiotem analizy była zbieżność liczby częstości w funkcji długości belki dla współczynnika ε_1 . Oś pionowa sporządzonych wykresów odpowiadała długości belki, a oś pozioma określała liczbę częstości drgań. Liczba 1 odpowiadała swobodnemu brzegowi belki, a liczba 0 odpowiadała jej zamocowanemu brzegowi. Każdej z pokazanych krzywych przypisano odpowiadający współczynnik tłumienia ε_2 .

Na przykład dla $\varepsilon_2 = 0.1$ dla większości analizowanych przypadków z włączeniem $\varepsilon_1 = 20$ i $\varepsilon_1 = 10$ zaobserwowano pełną zbieżność liczby częstości.

Dla $\varepsilon_1 = 1$ i $\varepsilon_2 = 0$ liczba częstości wzdłuż długości belki jest taka sama.

4.3. Analiza problemu 3 ($\lambda = 100$)

Poprzednio analizowano drgania belki dla $\lambda = 50$, a w tym punkcie częstość $\omega_p = 10.2$ i dla $\lambda = 100$ dokonamy analizy wpływu współczynników tłumienia ε_1 , $\varepsilon_2 = 0$.

Porównując wyniki zamieszczone w tabeli 2 dla $\lambda = 50$ i uzyskane wyniki dla $\lambda = 100$ w tym przypadku liczba pojawiających się częstości w widmie wzrasta ze wzrostem λ , ale dynamika chaotyczna tutaj nie występuje.

Zbieżność częstości do jednej obserwuje się jedynie dla $\varepsilon_1 = 1$. Dla $\varepsilon_1 = 20$ jedynie dwie częstości pojawiają się na swobodnym końcu belki, podczas gdy w punkcie $x = 0.75$ obserwujemy pojawienie

się już pięciu częstości (dla punktów $x = 0.5$ i $x = 0.25$ obserwujemy pojawienie się sześciu częstości), jednak ich wartości są różne dla $x = 0.5$ i dla $x = 0.25$.

Liczba częstości drgań zależy od względnej długości belki dla $\varepsilon_1 = 20$, ale jest taka sama dla $\lambda = 50; 100$. Dla $\varepsilon_1 = 10$ różnica w liczbie częstości (dla różnych λ) ulega zmniejszeniu. Poczynając od wartości $\varepsilon_1 = 5$ liczba występujących częstości ulega zmniejszeniu, a ich pełne pokrycie występuje dla $\varepsilon_1 = 1$.

4.4. Analiza odkształceń belki (problem 3)

Występujące częstości drgań belki są różne dla $\lambda = 50$ i $\lambda = 100$, bowiem mamy do czynienia z różnymi częstościami wymuszeń ($\omega_p = 5.1$ i $\omega_p = 10.2$).

Ponadto w przypadku $\lambda = 50$ odnotowano asymetrię przebiegu w stosunku do osi OX , podczas gdy w przypadku $\lambda = 100$ wspomniane wykresy są symetryczne względem osi OX dla wszystkich wartości ε_1 (oprócz $\varepsilon_1 = 20$). Zaobserwowano również bifurkacje związane z podwajaniem okresu drgań.

5. PODSUMOWANIE

Przeprowadzona analiza wskazuje na istotną rolę właściwego procesu identyfikacji współczynników tłumienia ε_1 i ε_2 podczas badania dynamik drgań tłumionych podatnych belek.

Błędny wybór wspomnianych współczynników tłumienia może wpłynąć na wybór innego algorytmu obliczeń. Na przykład w przypadku $\varepsilon_1 > 1$ i $\varepsilon_2 = 0$ drgania belki mogą być traktowane jako drgania nieliniowe niezależnych oscylatorów i pojawiające się widmo częstości składa się z częstości drgań wspomnianych oscylatorów. W rzeczywistości mamy jednak do czynienia z układem nieliniowych połączonych ze sobą oscylatorów. Proces modelowania belki jako obiektu podatnego przy zastosowaniu metody różnic skończonych prowadzi do analizy układu o 40. stopniach swobody, a więc zastąpienia belki układem 40. połączonych oscylatorów.

Bibliografia

- [1] Krudsen J., Massih A.R.: Vibro-impact dynamics of a periodically forced beam, *J. Pres. Vessel Tech.* **122**(2) (2000), 210-221.
- [2] Cusumano J.P., Sharkady M.T., Kimble B.W.: Experimental measurements of dimensionality and spatial coherence in the dynamics of a flexible beam impact oscillator, *Phil. Trans.: Phys. and Eng. Sciences* **347**(1683) (1994), 421-438.
- [3] van de Vorst E.L.B., van Campen D.H., de Kraker A.: Periodic solutions of a multi-DOF beam system with impact, *J. Sound Vibr.* **192**(5) (1996), 913-925.
- [4] van de Vorst E.L.B., van Campen D.H., de Kraker A., Fey R.H.B.: Experimental analysis of the steady-state behaviour of beam systems with discontinuous support, *J. Sound Vibr.* **212**(2) (1998), 321-336.
- [5] Krysko V.A., Awrejcewicz J., Saltykova O.A., Chebotyrevskiy Yu.: Nonlinear vibrations of the Euler-Bernoulli beam subject to transversal load and impact actions, *Math. Probl. Eng.* (w recenzji).