

Bifurkacje rozwiązań wokół zmiennego obszaru stanu nieciągłości układu dynamicznego o jednym stopniu swobody z wymuszeniem harmonicznym

Jan Awrejcewicz

Politechnika Łódzka, Katedra Automatyki i Biomechaniki

Paweł Olejnik

Politechnika Łódzka, Katedra Automatyki i Biomechaniki

1. WPROWADZENIE

Teoria bifurkacji należy wciąż do najprężniej rozwijających się gałęzi dynamiki będąc jednocześnie tematem szczegółowych rozważań analitycznych i numerycznych. Najbardziej podstawowe zagadnienie tej teorii skupia się na badaniu jakościowych zmian zachowania układu przy nieznacznie zmieniających się parametrach wokół wartości krytycznych. Można powiedzieć, że fundamentalnym schematem lub też pewną wariacją procesu dynamicznego jest jakościowe i nieoczekiwane przejście rozwiązania z orbity o okresie T na orbitę o okresie $2T$. Przykładowo, niegładkie aspekty podejścia czysto matematycznego wsparte przy tym odpowiednimi procedurami numerycznymi zawarto w pracach [5, 6]. Analizując przeprowadzone rozważania dotyczące analizy konwertera mocy prądu stałego, którego charakter pracy opisany jest matematycznie przy pomocy funkcji nieliniowych, wyżej wspomniany schemat bifurkacji polegający na podwojeniu okresu oscylacji doprowadził do zaskakującej utraty stabilności układu elektronicznego działającego w bliskim otoczeniu punktu pracy. Efekt tego rodzaju jest niepożądany a dodatkowo zapoczątkowuje lawinową sekwencję kolejnych podwojeń oscylacji prowadzących do chaosu. Powyższy scenariusz można zatem przewidzieć w fazie zaistnienia pierwszych podwojeń okresu oscylacji i automatycznie powstrzymać jego dalszą propagację przez niewielką modyfikację wybranego parametru kontrolnego układu. Druga z cytowanych prac również podejmuje analizę scenariuszy pojawiania się bifurkacji podwojenia okresu oscylacji obserwowanych w obwodzie konwertera mocy prądu stałego pracującego w trybie ciągłej przewodności prądu. Ścieżka bifurkacji rozwiązań jest w tym przypadku badana przy użyciu metody balansu harmonicznego, ale dokładny warunek pozwalający na wyznaczenie chwili pojawienia się szeregu bifurkacji podwojenia okresu oscylacji został podany na podstawie warunku rozwiązywalności pary charakterystycznych równań algebraicznych.

Opis różnorodnych bifurkacji stanu pojawiających się w układach elektrycznych został zauważalnie rozszerzony w pracy [4] na przykładzie innego typu konwertera mocy prądu stałego. Podano użyteczną klasyfikację głównych form bifurkacji możliwych do zaobserwowania w kawałkami-ciągłych układach dynamicznych. W końcowej części pracy opisano przebieg przykładowej aplikacji eksperymentalnej. Rezultatem wykonanego porównania jest dobra zgodność zmierzonych oscylacji w układzie rzeczywistym z ich odpowiednikiem numerycznym, przy czym obok tradycyjnych bifurkacji podwojenia okresu oscylacji potwierdzono również istnienie bardziej skomplikowanych bifurkacji typu C .

W celu zobrazowania pożytecznych jak też szkodliwych efektów istnienia bifurkacji w układach dynamicznych wykorzystuje się wiele interesujących technik analizy i obserwacji. Wśród nich na uwagę zasługuje widok (podgląd) stroboskopowy stosowany często przy badaniu stabilności przełączających układów elektronicznych i wyznaczaniu odwzorowań układów kawałkami ciągłych. W pracy [3] zamieszczono szczegółową analizę reguł pojawiania się różnych bifurkacji typu granicznego. Zawarto w nich kilka aplikacji doświadczalnych, jak również zaproponowano podstawy teoretyczne przydatne do wyjaśnienia przyczyn powstawania schematów bifurkacji w dwuwymiarowych odwzorowaniach ukła-

dów kawałkami-ciągłych.

Obwody elektroniczne nie są jedynymi przykładami układów, w których efekty generowane podczas standardowego trybu pracy są powodem występowania nieoczekiwanych zachowań nieregularnych a w tym przejść bifurkacyjnych. Zupełnie odmienny charakter przełączeń można wyróżnić w innych, nieciągłych układach mechanicznych. Powstają one na zasadzie sekwencji kolejnych poślizgów i utwierdzeń ciała (masy) lub zespołu połączonych ciał (mas) drgających. Jako pewien przykład niech posłuży praca [7], w której rozpatrzono analizę dynamiczną układu nieciągłego o dwóch stopniach swobody z tarcieniem. Układ stanowią dwie połączone sprężyste masy drgające umieszczone na przemieszczającym się ze stałą prędkością pasie. Kontakt cierny opisany pewnym modelem tarcia istniejący pomiędzy idealnymi powierzchniami styku mas i pasa jest źródłem drgań samowzbudnych typu utwierdzenie-poślizg. Występowanie drgań tego typu jest przyczyną pojawiania się w układzie bifurkacji nieciągłych o skomplikowanej postaci.

2. PODSTAWY TEORETYCZNE

Analizie poddany jest następujący układ dynamiczny zapisany w postaci ogólnej

$$\dot{x} = \begin{cases} f^{(1)}(x), & x \in S_1, \\ f^{(2)}(x), & x \in S_2, \end{cases} \quad (1)$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, natomiast

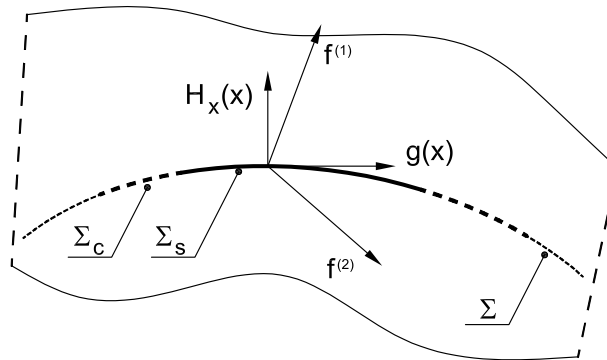
$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) < 0\}, \\ S_2 &= \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) > 0\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Funkcja H jest gładka i posiada w kierunku x gradient $H_x(x) = \frac{\partial H(x)}{\partial x}$ na granicy nieciągłości danej zbiorem

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) = 0\}, \quad (3)$$

przy czym $f^{(i)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (dla $i = 1, 2$) są funkcjami gładkimi.

Rozwiązanie ogólne równania (1) znajduje się przez sklejenie rozwiązań ze zbioru utwierdzeń należących do Σ z rozwiązaniami standardowymi znajdującymi się w zbiorach poślizgu S_i ($i = 1, 2$). W szczególności rozwiązanie należące do zbioru utwierdzeń można oszacować przy użyciu metody Filipowa, której schemat pokazano na rysunku 1.



Rysunek 1. Graficzna interpretacja kombinacji wypukłej dwóch wektorów.

Niech zatem

$$\sigma(x) = \langle H_x(x), f^{(1)}(x) \rangle \langle H_x(x), f^{(2)}(x) \rangle, \quad (4)$$

będzie definicją kontrolnej funkcji przełączeń (przeskoków), w której $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny w \mathbb{R}^n . Zbiór przecięcia $\Sigma_c \subset \Sigma$ jest zdefiniowany następująco:

$$\Sigma_c = \{x \in \Sigma : \sigma(x) > 0\}. \quad (5)$$

Zbiór utwierdzeń Σ_s stanowi więc dopełnienie zbioru Σ_c w Σ co pozwala na sformułowanie kolejnego warunku na istnienie drugiego obszaru zawartego w Σ postaci

$$\Sigma_s = \{x \in \Sigma : \sigma(x) \leq 0\}. \quad (6)$$

W ogólności, orbita równania (1) przecina Σ w punktach $x \in \Sigma_c$, podczas gdy ślizga się po powierzchni Σ w każdym punkcie $x \in \Sigma_s$.

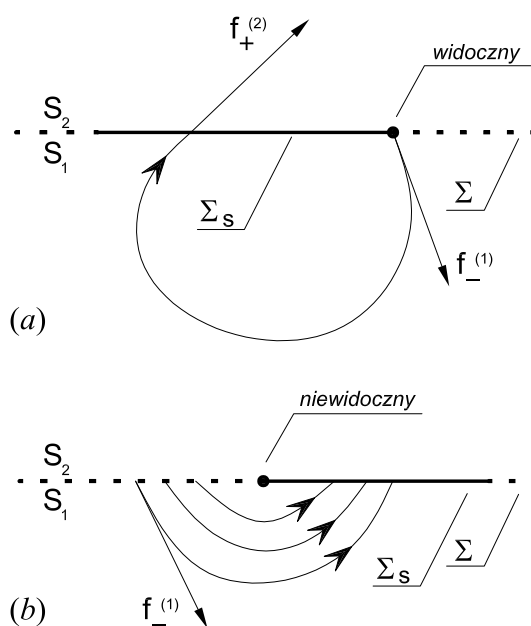
Metoda Filippowa bazuje na tzw. kombinacji wypukłej $g(x)$ dwóch wektorów $f^{(i)}$ zaczepionych w każdym nieosobliwym punkcie utwierdzenia $x \in \Sigma_s$:

$$g(x) = \lambda f^{(1)}(x) + (1 - \lambda) f^{(2)}(x), \quad (7)$$

gdzie

$$\lambda = \frac{\langle H_x(x), f^{(2)}(x) \rangle}{\langle H_x(x), f^{(2)}(x) - f^{(1)}(x) \rangle}. \quad (8)$$

Nieosobliwość punktów utwierdzenia będzie spełniona tylko wtedy, gdy mianownik wyrażenia (8) na λ będzie różny od zera.



Rysunek 2. Widoczny (a) i niewidoczny (b) punkt styczny.

Zbiór punktów utwierdzenia można wyznaczyć rozwiązując gładki układ dynamiczny równań różniczkowych w $(n - 1)$ -wymiarowej dziedzinie zbioru Σ_s , tj.

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in \Sigma_s. \quad (9)$$

Jeżeli jeden z wektorów $f^{(i)}$ znika, to punkt osobliwy równania (7) jest nazywany granicznym punktem równowagi. Innymi słowy, obszar graniczny zbioru utwierdzeń jest złożeniem wszystkich punktów utwierdzeń, granicznych punktów równowagi i punktów stycznych, w których jeden z wektorów $f^{(i)}$

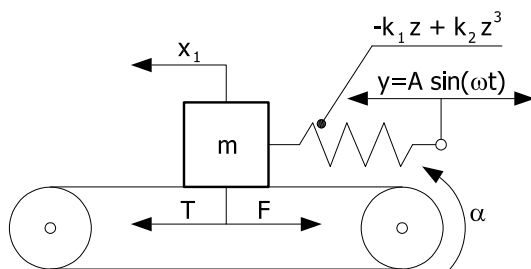
jest styczny do Σ a drugi jest niezerowy. Wobec powyższego można wprowadzić następującą definicję punktów stycznych

$$\langle H_x(x_T), f^{(i)} \rangle = 0. \quad (10)$$

Analizując biegnącą trajektorię rozwiązania wyróżnić można pewne właściwości dotyczące tzw. widoczności punktów stycznych. Mamy zatem, że punkt styczny jest *widoczny* jeżeli orbita $\dot{x} = f^{(1)}(x)$ startująca z tego punktu należy do S_1 dla dostatecznie małych $|t| \neq 0$. Z drugiej strony, ten sam punkt styczny jest *niewidoczny*, jeżeli wspomniana orbita należy do obszaru S_2 (patrz rysunek 2).

3. UKŁAD O JEDNYM STOPNIU SWOBODY Z WYMUSZENIEM HARMONICZNYM

Zagadnienie rozpatrywane w niniejszej pracy dotyczy głównie wprowadzenia do analizy bifurkacji nieciągłych w układzie mechanicznym o jednym stopniu swobody z wymuszeniem harmonicznym. Składa się on z masy m drgającej na przemieszczającym się ze stałą prędkością α nieodkształcalnym pasie i połączonej z harmonicznie wymuszoną sprężyną o sztywności opisanej charakterystyką nieliniową $k(z)$ zależną od ugięcia $z = x_1 - y$. Ugięcie z jest mierzone jako różnica pomiędzy aktualnym położeniem x_1 masy m a przesunięciem $y = A \sin(\omega t)$ drugiego końca sprężyny opisanym funkcją harmoniczną o stałej amplitudzie A i częstości kołowej ω . Pomiedzy masą m a nieodkształcalnym pasem istnieje suchy kontakt cierny, który jest opisany przy pomocy funkcji T zależnej od parametru kształtu β modelu tarcia i prędkości ruchu względnego $(x_2 - \alpha)$ powierzchni trących rozpatrywanego połączenia ślizgowego.



Rysunek 3. Badany jednowymiarowy układ z tarcie i wymuszeniem harmonicznym.

Opisany wyżej układ pokazano na rysunku 3, natomiast jego dynamikę opisują równania postaci

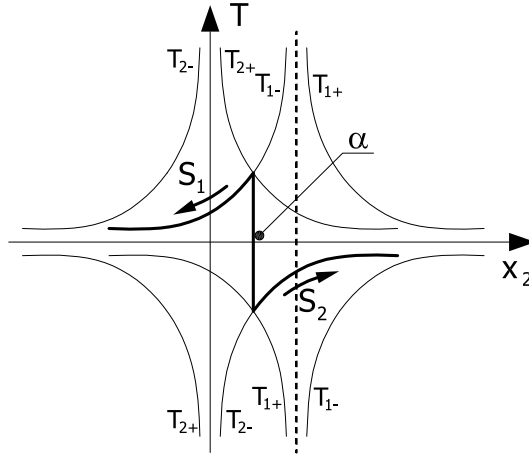
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-k_1(x_1 - y) + k_2(x_1 - y)^3 + T), \end{cases} \quad (11)$$

gdzie T jest funkcją tarcia daną wzorem (12) opisującym zastosowany model tarcia (patrz rysunek 4),

$$T = \frac{\beta \operatorname{sgn}(x_2 - \alpha)}{1 + |x_2 - \alpha|}. \quad (12)$$

Przekształcając równanie (11) do postaci (1) oraz uwzględniając pozostałe zależności na funkcję tarcia T i wymuszenie harmoniczne y otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{x} = f(x) &= \begin{bmatrix} x_2, \frac{1}{m} \left(k_2 z^3 - k_1 z + \frac{\beta}{\alpha - x_2 + 1} \right) \\ x_2, \frac{1}{m} \left(k_2 z^3 - k_1 z + \frac{\beta}{\alpha - x_2 - 1} \right) \end{bmatrix}, \\ y &= A \sin(\omega t), \\ z &= x_1 - y, \end{aligned} \quad (13)$$



Rysunek 4. Model tarcia (linia pogrubiona) o charakterystyce opadającej.

gdzie $x = [x_1, x_2]^T$ i $f = [f^{(1)}, f^{(2)}]^T$.

Granica nieciągłości Σ rozdzielająca dwa przyległe obszary S_1 i S_2 jest tutaj wyrażona w następujący sposób

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) = x_2 - \alpha = 0\}, \quad (14)$$

gdzie odpowiednio do wcześniejszych założeń $H_x(x) = [0, 1]^T$, oraz

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) = x_2 - \alpha < 0\}, \\ S_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) = x_2 - \alpha > 0\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Kontrolna funkcja przełączeń $\sigma(x)$ zdefiniowana wzorem (4) ma postać

$$\sigma(x) = f_2^{(1)}(x)f_2^{(2)}(x), \quad (16)$$

gdzie $f_2^{(1)}$ i $f_2^{(2)}$ są odpowiednio drugimi składnikami funkcji $f^{(1)}$ i $f^{(2)}$ pierwszego z równań (13).

4. SYMULACJA NUMERYCZNA

Przyjmijmy $z_\alpha = [z, x_2 = \alpha]^T$ oraz sprecyzujmy kontrolną funkcję przełączeń (16) na granicy rozdziału

$$\sigma(z_\alpha) = \frac{1}{m^2} \left[(k_2 z^3 - k_1 z)^2 - \beta^2 \right]. \quad (17)$$

Jeśli istnieje pochodna funkcji $\sigma(z_\alpha)$, to możliwe jest znalezienie punktów szczególnych tej funkcji z wykorzystaniem następujących warunków:

$$\begin{aligned} D_{\alpha_0} &= \frac{d\sigma(z_{\alpha_0})}{dz} = 0, \\ \sigma(z_{\alpha_0}) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Otrzymujemy zatem, że

$$D_{\alpha_0} = \frac{2z_{\alpha_0}}{m^2} (3k_2 z_{\alpha_0}^2 - k_1)(k_2 z_{\alpha_0}^2 - k_1) = 0, \quad (19)$$

stąd zbiór pierwiastków przy warunkach (18) jest następujący:

$$z_{\alpha_0, i} = \left\{ 0, \pm \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \pm \sqrt{\frac{k_1}{3k_2}} \right\}, \quad \text{dla } i = 1 \dots 5. \quad (20)$$

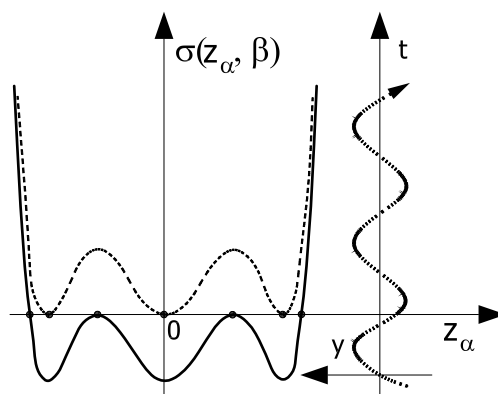
Z kolei podstawiając wartości $z_{\alpha_0, i}$ dane zbiorem (20) do równania (17), a następnie rozwiązując to równanie ze względu na β otrzymuje się zbiór wartości granicznych parametru kształtu charakterystyki tarcia:

$$\beta_i = \left[0, \pm \frac{2\sqrt{3}k_1^{1.5}}{9\sqrt{k_2}} \right], \quad \text{dla } i = 1 \dots 3. \quad (21)$$

Zbiór wartości (21) sytuuje kontrolną funkcję przełączeń strefy utwierdzenia jako styczną (z "podejściem do dołu i z góry) do osi odciętych na wykresie zależności $\sigma(z_\alpha, \beta)$ pokazanym na rysunku 5.

Górny wykres zaznaczony linią przerywaną i styczna do osi odciętych z "podejściem góry" pokazuje, że przy takim dobrze parametru β strefa utwierdzenia praktycznie nie istnieje, ponieważ wartość funkcji $\sigma(z_\alpha)$ jest większa lub równa zero (powierzchnia Σ_s składa się tylko z trzech punktów stycznych). Oznacza to, że niemożliwe jest utwierdzenie masy na pasie a rozwiązanie standardowe przechodzące z obszaru S_1 do obszaru S_2 i na odwrót dozna jedynie załamania na strefie rozdziału.

Zupełnie inna interpretacja dotyczy drugiego z wykresów pokazanych na rysunku 5, który jest styczny do osi z_α z "podejściem do dołu". W tym przypadku, strefa utwierdzenia jest bardzo szeroka i rozciąga się od lewej do prawej gałęzi tego wykresu wspólnie dążących do nieskończoności w kierunku wartości $\sigma(z_\alpha, \beta)$. Rozwiązanie będzie zatem silnie przyciągane przez pole wektorowe skierowane w obu obszarach S_1 i S_2 w kierunku granicy nieciągłości strefy rozdziału. Efektem tego będzie generacja zachowań typu utwierdzenie-poślizg z dużą tendencją do bifurkacji tych rozwiązań w zakresie parametru $\beta < \beta_{2,3}$.

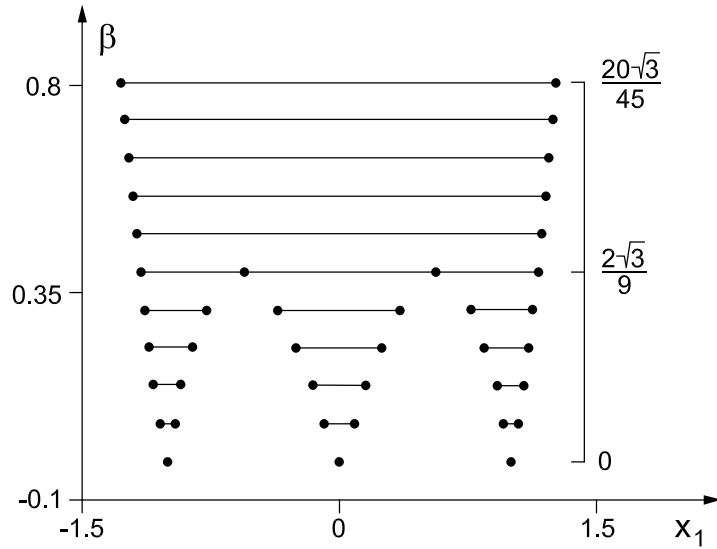


Rysunek 5. Punkty styczne (kółka) na przecięciu funkcji $\sigma(z_\alpha, \beta)$ z osią z_α dla $\beta = \beta_1$ (linia kreskowana) i $\beta = \beta_{2,3}$ (linia ciągła) oraz wykres $y(t)$ przemieszczenia strefy utwierdzenia w czasie.

Należy jednocześnie zaznaczyć, że gdyby zmienna z była zmienną stanu, taką jak np. zmienna x_1 opisująca położenie masy m znalezione jako rozwiązanie układu równań dynamicznych (13), to strefa utwierdzenia (również podzielona na podstrefy dla przypadków, kiedy $\beta_1 < \beta < \beta_{2,3}$) byłaby nieruchoma (co pokazano w pracy [2]) dla jednego, niezmiennego zestawu parametrów k_1, k_2, α, β . Zagadnienie podjęte w obecnej pracy jest znacznie szersze i związane jest z zaawansowanymi procedurami numerycznymi. Powodem tego jest pojawienie się ruchomego, *plywającego* obszaru utwierdzenia zmieniającego swoje położenie w czasie i uzależnionego od punktu przyłożenia i rodzaju wymuszenia zewnętrznego. Na rysunku 5 wzdłuż osi czasu t narysowano harmoniczną funkcję sinusoidalną obrazującą sposób przemieszczania się obszaru utwierdzenia (powierzchni Σ_s).

Wprowadzona w równaniu (16) kontrolna funkcja przełączeń $\sigma(x)$ stanowi iloczyn dwóch składowych $f_2^{(1)}$ i $f_2^{(2)}$, które można wykorzystać do znalezienia punktów stycznych składowych $f^{(1)}$ i $f^{(2)}$ należących odpowiednio do obszarów S_1 i S_2 (patrz równanie (10)).

Jeśli w punktach charakterystycznych β_i cały zbiór punktów stycznych oznaczymy przez $x_T = x_{\alpha_0}$, to na podstawie równania (10) dla przykładowego zestawu parametrów ($k_1 = k_2 = m = 1, \alpha = 1$) oraz zmieniającej się w przedziale $\left[\beta_1, \frac{20\sqrt{3}}{45} \right]$ wartości parametru bifurkacji β ścieżki bifurkacji punktów stycznych przebiegają w przybliżeniu w sposób przedstawiony na rysunku 6.



Rysunek 6. Wykres bifurkacyjny punktów stycznych w zakresie parametru $\beta \in \left[\beta_1, \frac{20\sqrt{3}}{45}\right]$.

Zdefiniujmy zbiór punktów utwierdzenia spełniających równanie (9). Wykorzystując równanie (7) można zapisać

$$g(x) = \lambda \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2^{(1)}(x) \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2^{(2)}(x) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Przy użyciu wcześniej wyznaczonych funkcji σ_2 , H_x , $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ i metody Filippowa wprowadzamy następującą definicję parametru λ (patrz równanie (8)):

$$\lambda = -\frac{(\alpha - x_2 + 1)(x_1(x_1^2 - 1)(\alpha - x_2 - 1) - \beta)}{2\beta}. \quad (23)$$

Podstawiając λ dane wzorem (23) do równania(22) otrzymujemy równanie różniczkowe opisujące rozwiązanie należące do obszaru utwierdzenia Σ_s o postaci

$$\dot{x} = g(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

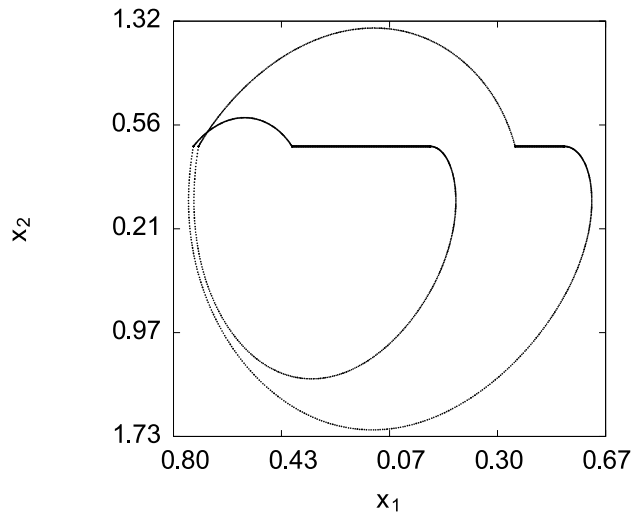
Wektor prędkości ruchu \dot{x} zaczepiony na wyznaczonym powyżej odcinku składa się tylko z jednej nieznikającej składowej x_2 wektora x , dlatego masa m będzie w granicach tego przedziału przemieszczać się wzdłuż osi $\pm x_2$ płaszczyzny fazowej (x_1, x_2) do momentu osiągnięcia punktu granicznego.

W dalszej części zostanie zaprezentowana typowa trajektoria ruchu typu utwierdzenie-poślizg na płaszczyźnie fazowej (x_1, x_2) .

Wykorzystując metodę opisaną wcześniej pozwalającą na oszacowanie punktów stycznych na podstawie znajomości funkcji $\sigma(z_\alpha, \beta)$ oraz przyjmując następujący zestaw parametrów $m = 0.1$, $\alpha = 0.4$, $b = \frac{\sqrt{3}}{9}$, $k_1 = k_2 = 1$, $A = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\pi}{18}$, $\omega = \frac{3\pi}{2 \cdot 1.2364}$ wyznaczono dla analizowanego układu mechanicznego następujący zbiór punktów stycznych:

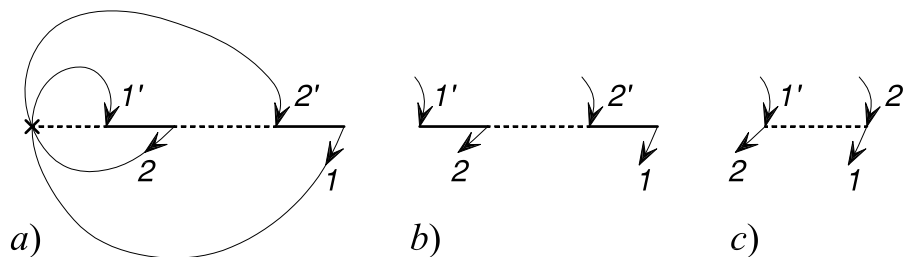
$$T = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \left[\pm \cos \frac{\pi}{9}, \pm \cos \frac{2\pi}{9}, \pm \sin \frac{\pi}{18} \right]. \quad (25)$$

Punkty charakterystyczne dane zbiorem (25) są niezwykle użyteczne, gdyż umożliwiają bardzo dokładne obliczenie zarówno długości jak i czasu trwania fazy (faz) utwierdzenia.



Rysunek 7. Przykładowa trajektoria ruchu typu utwierdzenie-poślizg z podwojeniem okresu drgań.

Rysunek 7 pokazuje dwa obszary utwierdzenia przez które przechodzi masa m drgając na pasie przesuwającym się ze stałą prędkością. Zerwanie przyczepności z jednoczesnym poślizgiem na pasie następuje w widocznych punktach styczności, po czym rozpoczyna się pętla rozwiązania standardowego o kolistym kształcie zawartego na przemian w obszarach S_1 (górną pętlą) i S_2 (dolną pętlą). Lewa część zamkniętej, dwu-okresowej trajektorii ruchu pokazuje dwa punkty przegięcia powstałe na granicy rozdziału na powierzchni Σ_c . Ze względu na istniejące stałe wymuszenie harmoniczne powierzchni Σ_s płynie w kierunku $\pm x_2$ w obrębie dostępnej powierzchni Σ umożliwiając powstanie dwóch odseparowanych powierzchni utwierdzenia. Widać zatem, że powierzchnia ta doznaje bifurkacji globalnej cyklu z przecięciem i rozdzieleniem strefy utwierdzenia.



Rysunek 8. Ilustracja schematu bifurkacji strefy utwierdzenia w ruchu utwierdzenie-poślizg pokazanym na rysunku 7 (rysunki (a-c) ilustrują przebieg kolejnych uproszczeń).

W sposób czysto obrazowy bifurkację tego typu przedstawiono na rysunku 8. Bifurkacje o podobnym charakterze pokazano również w pracy [1] podczas numerycznej analizy bifurkacji płaskich jedno-parametrowych układów typu Filippowa.

5. WNIOSKI

W pracy przedstawiono numeryczną analizę bifurkacji rozwiązań typu utwierdzenie-poślizg obserwowanych w dynamice kawałkami ciągłego układu dynamicznego. Zastosowano teorię Filippowa do analizy fazy utwierdzenia oraz warunków jej występowania. Wprowadzono *pływającą* granicę nieciągłości, opisano ją funkcją zależną od prędkości pasa i uzależniono od postaci wymuszenia zewnętrznego. Badany układ dynamiczny został podzielony na dwa podukłady, w których rozwiązania ciągłe znaleziono w odpowiadających im dwóch przyległych obszarach rozpatrywanej przestrzeni stanu. Rozwiązanie na zmiennej granicy nieciągłości znaleziono przy użyciu procedury numerycznej poprzez oszacowanie punktów nieciągłości z wysoką dokładnością.

Sinusoidalna postać funkcji wymuszenia zewnętrznego jednego z końców sprężyny posłużyła do rozdzielenia strefy utwierdzenia i spowodowała pojawienie się ruchu dwu-okresowego typu utwierdzenie-poślizg. Wymuszenie takie można więc tak dobrać, aby możliwe było "przeniesienie" masy w stan całkowitego poślizgu nie dopuszczając przy tym do utwierdzenia, jak też w taki sposób, aby masa m pozostawała możliwie jak najdłużej w stanie utwierdzenia z jak najkrótszym czasem poślizgu. Tego typu kontrola będzie rozwijana na późniejszym etapie analizy numerycznej i eksperymentalnej.

5.1. Podziękowania

Praca była finansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2005-2008 (grant nr 4 T07A 031 28).

Bibliografia

- [1] Awrejcewicz J., Olejnik P.: Sliding solutions of a simple two degrees-of-freedom dynamical system with friction. *ENOC, Eindhoven, Netherlands, 7-12 August*, **01-196**:277–282, 2005.
- [2] Banerjee S., Ranjan P., Grebogi C.: Bifurcations in two-dimensional piecewise smooth maps – theory and applications in switching circuits. *IEEE Trans., ISCAS-I*, **47**(5):633–643, 2000.
- [3] di Bernardo M., Garofalo F., Iannelli L., Vasca F.: Bifurcations in piecewise-smooth feedback systems. *Int. J. Control*, **75**(16/17):1243–1259, 2002.
- [4] Fang C.-C., Abed E.H.: *Analysis and control of period doubling bifurcation in buck converters using harmonic balance*. Department of Electrical Engineering and the Institute for Systems Research, University of Maryland, USA. Nr **98**(50), 1998.
- [5] Galvanetto U.: Sliding bifurcations in the dynamics of mechanical systems with dry friction – remarks for engineers and applied scientists. *J. Sound and Vib.*, **276**:121–139, 2004.
- [6] Kuznetsov Y.A., Rinaldi S., Gagnani A.: One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. *Int. J. Bif. and Chaos*, **13**(8):2157–2188, 2003.
- [7] Ma Y., Kawakami H., Tse C.K.: Analysis of bifurcation in switched dynamical systems with periodically moving borders: application to power converters. *IEEE Trans., ISCAS-IV*, 701–704, 2004.

Summary in English The work focuses on the numerical analysis of bifurcations of a stick-slip solutions (termed sliding-standard solution as well) that result from a complex dynamics of a piece-wise smooth dynamical system represented by a block-on-belt model. The analysis of sliding solutions and conditions of their appearance has been carried out with the use of Filippov theory. Since a floating discontinuity boundary is introduced as a function of velocity of the belt, the investigated system can be divided into the two subsystems, which are separately and continuously solved in that two adjacent regions. To get an exact transition between solutions being defined in those regions, a numerical procedure with the exact crossing set detection (with inclusion of detection of points lying precisely on crossing surface) has been introduced and implemented, and some bifurcational schemes of either tangent points and sliding regions detection have been proposed.