

Jan AWREJCEWICZ, Grzegorz KUDRA, Grzegorz WASILEWSKI*

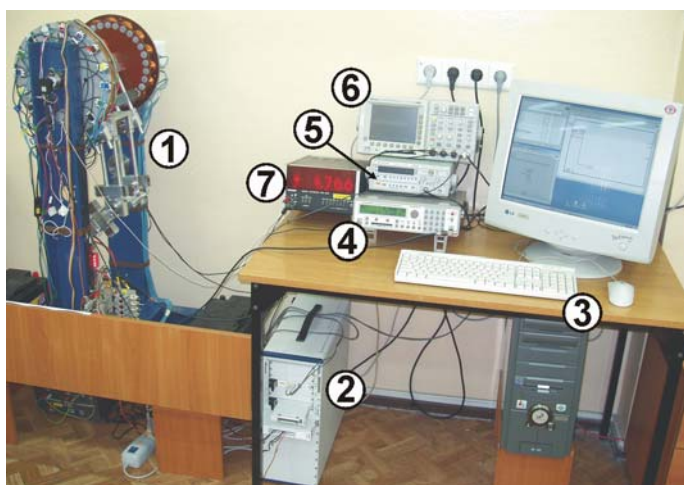
POTRÓJNE WAHADŁO FIZYCZNE – WYBRANE ASPEKTY EKSPERYMENTALNE I NUMERYCZNE

1. Wstęp

Niniejsza praca jest kolejną próbą prezentacji zagadnień związanych z konstrukcją i wynikami badań wykonanych w Katedrze Automatyki i Biomechaniki stanowiska doświadczalnego potrójnego wahadła fizycznego. Wahadło jako najprostszy nieliniowy układ mechaniczny jest nieustannie przedmiotem zainteresowania świata nauki, o czym świadczy choćby niedawno wydana monografia [1], będąca dosyć obszernym studium na temat tego szczególnego układu fizycznego. Jednak tak jak pojedyncze czy nawet podwójne wahadło jest szeroko opisywane zarówno w tej monografii, jak i w wielu innych publikacjach na ten temat, tak potrójne wahadło i to w wersji eksperymentalnej, z czujnikami kątowymi umożliwiającymi rejestrację ruchu wszystkich trzech ogniw, gdzie wszystkie ogniwa mogą się wielokrotnie obracać wokół osi, jest konstrukcją unikatową. W pracach [2 - 6], zawierających wyniki analizy numerycznej modelu matematycznego potrójnego wahadła wskazano na bogatą liczbę zjawisk nieliniowych w tego typu układzie: zachowania regularne i nieregularne, bifurkacje, współistniejące rozwiązania okresowe, quasiokresowe, chaotyczne i hiperchaotyczne. W tej pracy rozszerzono opis dotyczący działania specjalnego silnika wymuszającego ruch wahadła oraz charakterystyki opisującej rozgrzewanie uzwojeń tego silnika, opisano problem identyfikacji parametrów oraz przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych i numerycznych w wybranych zakresach częstotliwości wymuszenia pierwszego ogniw: 130-140mHz (obszar podwojenia okresu), 225-275mHz (bifurkacje atraktorów okresowych), 380-400mHz (współistniejące atraktory okresowe i nieregularne bez obrotów)

2. Opis stanowiska i model obliczeniowy

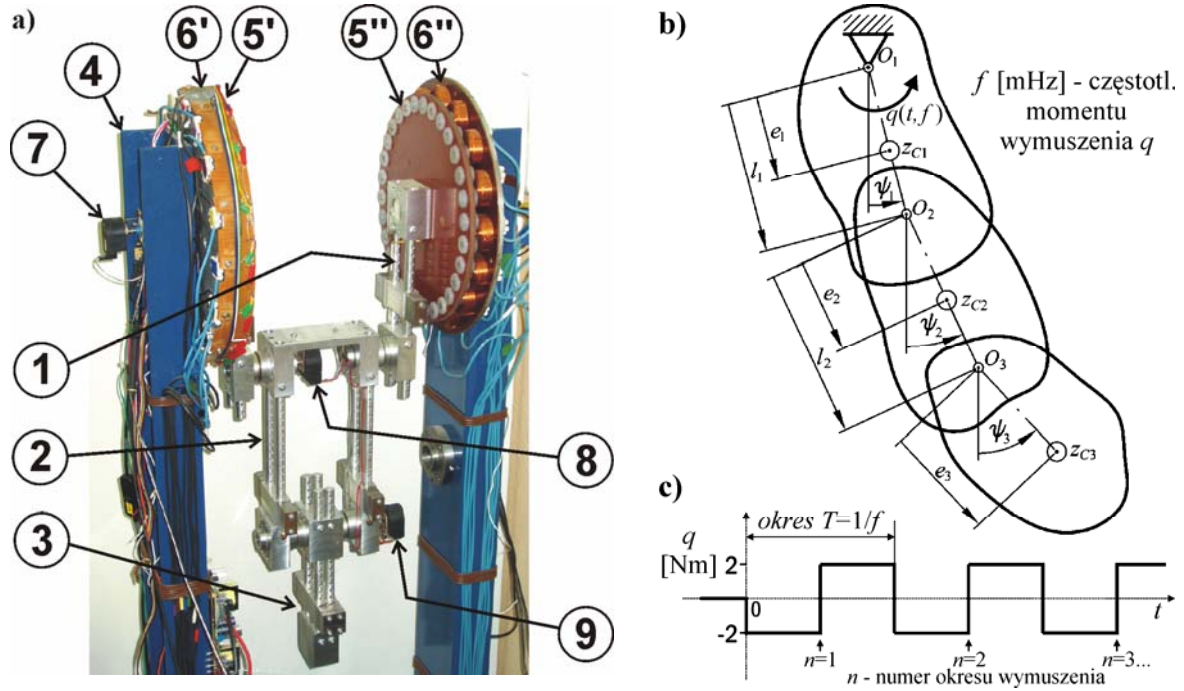
Na rys. 1 pokazano widok całego stanowiska badawczego wraz z oprzyrządowaniem. Sygnały z przetworników kątowych wahadła poprzez kartę pomiarową NI są rejestrowane przy użyciu komputera w środowisku LabVIEW. Sygnał wymuszenia jest zadawany precyzyjnym generatorem HAMEG.



Rys. 1. Stanowisko badawcze potrójnego wahadła wraz z oprzyrządowaniem: 1 – wahadło; 2 – chassis z kartą pomiarową NI; 3 – komputer z oprogramowaniem LabVIEW; 4 – generator częstotliwości wymuszenia; 5 – licznik okresów wymuszenia; 6 – oscyloskop kontrolny sygnałów pomiarowych; 7 – miernik napięcia zasilania przetworników kąta.

* Katedra Automatyki i Biomechaniki, Politechnika Łódzka (www.p.lodz.pl/k16)

Na rysunku 2 pokazano model doświadczalny potrójnego wahadła oraz jego model obliczeniowy i postać wymuszenia pierwszego ogniwa stosowaną we wszystkich opisanych wynikach badań.



Rys. 2. Potrójne wahadło fizyczne: a) model doświadczalny; b) model obliczeniowy; c) postać wymuszenia pierwszego ogniwa. 1, 2, 3 – ogniwa; 4 – statyw; 5', 5'' – tarcze wirników (tarcza 5' niewidoczna); 6', 6'' – tarcze stojanów (tarcza 6' z optycznym komutatorem); 7, 8, 9 – przetworniki położenia kąowego ogniw.

Zespół trzech wahadeł 1, 2 i 3 zawieszony jest na dwóch nieruchomych ramionach statywu 4. Wymuszenie pierwszego ogniwa realizowane jest specjalnym silnikiem złożonym z dwóch nieruchomych stojanów 6' i 6'' oraz z dwóch wirników 5' i 5''. Obie części silnika są konstrukcyjnie symetryczne i sprzężone ze sobą elektrycznie, przy czym komutator optyczny znajduje się tylko na tarczy stojana 6'. Taki symetryczny napęd z dwóch stron zapewnia uniknięcie "przekoszenia" konstrukcji, co prowadziłoby do powstania naprężeń od momentów i sił działających w innej niż zamierzona płaszczyzna ruchu wahadła. Jednocześnie taka konstrukcja umożliwi pełne obroty zarówno drugiego, jak i trzeciego ogniwa wokół ich własnych osi. Masa wahadeł wynosi łącznie ok. 10kg, a cała konstrukcja waży ok. 80kg. Szczegółowy opis konstrukcji wahadła można znaleźć w pracy [7].

Matematyczny opis dynamiki potrójnego wahadła fizycznego (patrz prace [6, 5]) stanowią trzy następujące równania różniczkowe:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\psi}) \cdot (\ddot{\psi}_1, \ddot{\psi}_2, \ddot{\psi}_3) + \mathbf{N}(\boldsymbol{\psi}) \cdot (\dot{\psi}_1^2, \dot{\psi}_2^2, \dot{\psi}_3^2) + \mathbf{C} \cdot (\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\psi}_3) + (M_1 \sin \psi_1, M_2 \sin \psi_2, M_3 \sin \psi_3) = (q, 0, 0) \quad (1)$$

gdzie w nawiasach zwykłych zapisano wektory kolumnowe, a macierze \mathbf{M} , \mathbf{N} , \mathbf{C} mają postać:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\psi}) = \begin{bmatrix} B_1 & N_{12}c_{12} & N_{13}c_{13} \\ N_{12}c_{12} & B_2 & N_{23}c_{23} \\ N_{13}c_{13} & N_{23}c_{23} & B_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}(\boldsymbol{\psi}) = \begin{bmatrix} 0 & N_{12}s_{12} & N_{13}s_{13} \\ -N_{12}s_{12} & 0 & N_{23}s_{23} \\ -N_{13}s_{13} & -N_{23}s_{23} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$c_{ij} = \cos(\psi_i - \psi_j)$, $s_{ij} = \sin(\psi_i - \psi_j)$. Wektor zawierający 12 parametrów wahadła oznaczono jako:

$$\boldsymbol{\mu} = [B_1, B_2, B_3, N_{12}, N_{13}, N_{23}, M_1, M_2, M_3, c_1, c_2, c_3], \quad (3)$$

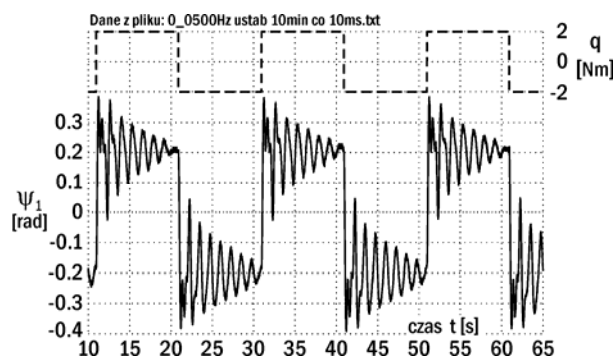
gdzie:

$$B_1 = J_{z_1} + e_1^2 m_1 + l_1^2 (m_2 + m_3), \quad B_2 = J_{z_2} + e_2^2 m_2 + l_2^2 m_3, \quad B_3 = J_{z_3} + e_3^2 m_3, \quad N_{12} = m_2 e_2 l_1 + m_3 l_1 l_2, \quad N_{13} = m_3 e_3 l_1, \quad N_{23} = m_3 e_3 l_2, \quad M_1 = m_1 g e_1 + (m_2 + m_3) g l_1, \quad M_2 = m_2 g e_2 + m_3 g l_2, \quad M_3 = m_3 g e_3 \quad (4)$$

Powyżej m_i i J_{zi} oznaczają odpowiednio masę i masowy moment bezwładności względem osi z_{ci} i -tego wahadła. Moment wymuszenia $q = q(t, f)$ przyłożony do pierwszego ogniwa ma charakter prostokątnej funkcji czasu o częstotliwości f [mHz] (rys.2c).

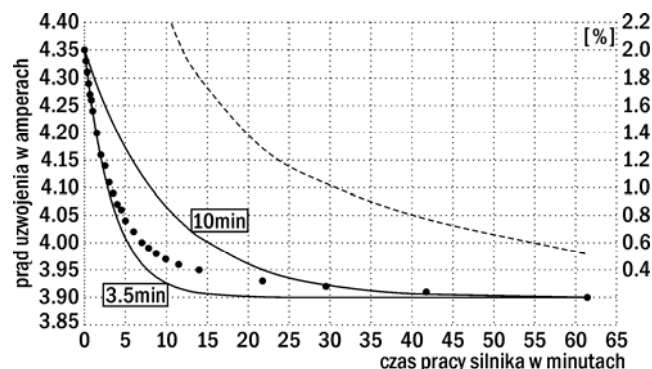
3. Silnik wymuszający i rozgrzewanie uzwojeń

Silnik wymuszający ruch pierwszego ogniwa jest silnikiem prądu stałego zaprojektowanym tak, aby możliwie dokładnie zadawał żądany przebieg momentu napędowego. Dlatego m.in. cewki uzwojeń stojana tego silnika (współpracujące z magnesami na wirniku) nie posiadają rdzeni z materiału magnetycznego, aby uniknąć nierównomierności momentu wywołanej przyciąganiem magnesów i rdzeni. Takie rozwiązanie powoduje jednak, że wymuszony moment jest stosunkowo mały względem dostarczonej mocy 400W i wynosi $q \approx \pm 2.0\text{Nm}$. Przy statycznym działaniu taki moment powoduje wychylenie pierwszego ogniwa tylko o $\psi_1 \approx \pm 0.21\text{rad}$ ($\pm 12^\circ$), co widać na rys. 3, zarejestrowanym dla bardzo małej częstotliwości wymuszenia 50mHz. Mimo to jednak w najbardziej interesującym zakresie wymuszeń ok. 0.1 - 2Hz obserwuje się zadziwiającą dynamikę ruchu wahadła, szczególnie w obszarach zachowań nieregularnych, uwidocznionych na wykresach bifurkacyjnych w dalszej części pracy.



Rys. 3. Wychylenie pierwszego ogniwa dla $f = 50\text{mHz}$ (linia przerywana – moment wymuszenia q)

Amplitudę momentu wymuszającego $\pm 2.0\text{Nm}$ uzyskano przy napięciu zasilania 5.4V i po ustabilizowaniu się temperatury uzwojeń. Cewki uzwojeń silnika nagrzewają się bowiem w trakcie pracy do temperatury ok. 62-69°C, co powoduje wzrost ich rezystancji. W efekcie tego maleje prąd płynący przez cewki, zmniejsza się też proporcjonalnie amplituda momentu wymuszenia. Spadek ten wynosi ok. 12% względem chwili załączenia silnika, gdy uzwojenia są jeszcze zimne. Przebieg zmian prądu płynącego przez cewki w ciągu godziny czasu pracy silnika pokazano na rys. 4, gdzie punkty pomiarowe zaznaczono kropkami.



Rys. 4. Przebieg zmian prądu w uzwojeniach silnika wskutek nagrzewania (kropki – punkty z pomiarów; linie ciągłe – aproksymacja inercją I rzędu; linia kreskowa – procentowa odchyłka punktów pomiarowych od założonej granicy 3.88A)

Na wykresie naniesiono też liniami ciągłymi próby aproksymacji dynamiki nagrzewania inercją pierwszego rzędu o stałych czasowych 3.5 oraz 10 minut. Widać, że stała czasowa przebiegu rzeczywistego wzrasta w czasie. Linia przerywana przedstawia procentową różnicę zmierzonych wartości względem granicznej wartości prądu przyjętej jako 3.88A. Przy takim założeniu i przyjęciu np. 1% różnicy jako zadowalającej, należałoby uruchomić silnik ok. 30 minut przed rozpoczęciem planowa-

nych eksperymentów. Jednak zauważono, że powtarzając pewne pomiary nie udawało się tak szybko uzyskać niektórych postaci ruchu wahadła zaobserwowanych pod koniec poprzedniego dnia, gdy wahadło było dobrze rozgrzane, lecz udawało się to dopiero po dłuższym czasie, rzędu kilku godzin. Może to być spowodowane faktem wpływu temperatury na współczynnik tarcia w łożyskach pierwszego ogniwa. Cewki uzwojeń silnika są bowiem umieszczone na dużej stalowej tarczy stojana, która przylega bezpośrednio do obudowy łożysk. Tarcza, a wraz z nią i łożyska, rozgrzewają się po znacznie dłuższym czasie niż małe cewki. Dlatego też zasadnicze eksperymenty przeprowadzano zwykle dopiero po 2-3 godzinach rozgrzewania wahadła.

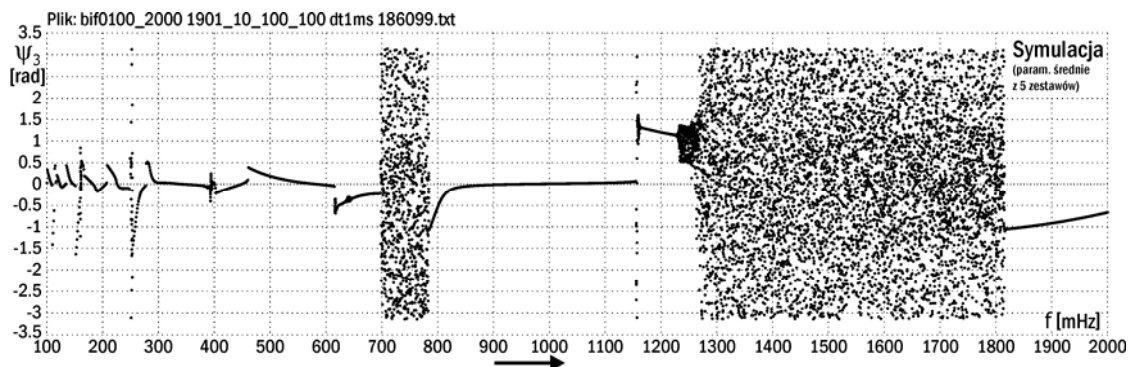
4. Identyfikacja parametrów i wykres bifurkacyjny modelu matematycznego

Parametry wahadła będące elementami wektora μ były wyznaczone przez porównywanie trajektorii ruchu zarejestrowanej doświadczalnie i trajektorii symulowanych numerycznie. Dokonywano tego w ten sposób, że przyjęty początkowy zestaw parametrów (pierwotnie uzyskany m.in. z obliczeń wg wymiarów geometrycznych i mas elementów) zmieniano następnie metodą losowego "strzelania" wokół bieżących wartości tak, aby uzyskać minimum z sumy kwadratów odchyłek między danymi doświadczalnymi a uzyskanymi numerycznie. Mimo wielu prób nie udało się jeszcze uzyskać jednego uniwersalnego zestawu parametrów, ale dla różnych częstości wymuszenia uzyskano różne zestawy parametrów, co pokazano w tabeli 1 (wartości B_1 używane będą dalej jako wyróżnik zestawu).

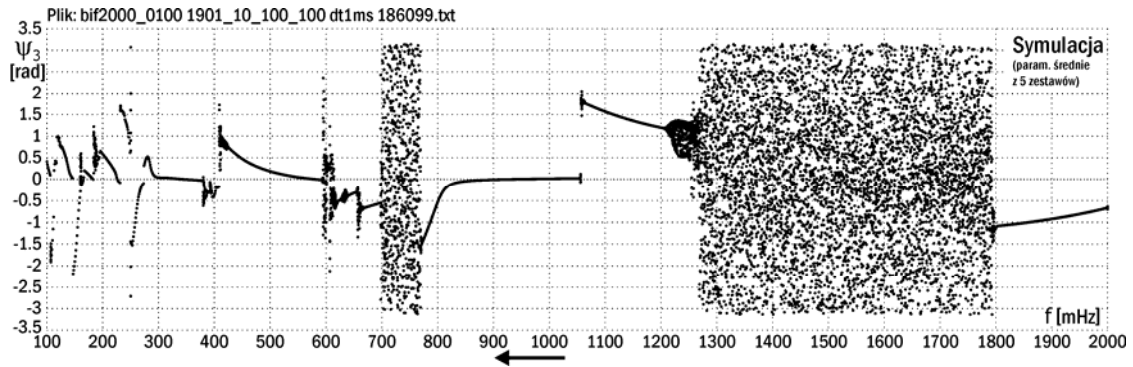
Tab. 1. Parametry wahadła uzyskane dla różnych serii pomiarowych

		Częstotliwość wymuszenia f porównywanych serii pomiarowych					Wartość średnia	Ekstrem. odchyłka względem średniej
		130mHz 140mHz (2006 GW)	130mHz 136mHz 140mHz (2006 GW)	300mHz 450mHz 600mHz (2005 GK)	650mHz 850mHz (2006 GK)	1500mHz (2006 GW)		
Parametry wahadła	B_1	0.180023	0.179053	0.188500	0.195740	0.187177	0.186099	5.2%
	B_2	0.143279	0.148256	0.160200	0.163680	0.148175	0.152718	7.2%
	B_3	0.018933	0.017450	0.016750	0.020220	0.018572	0.018385	10.0%
	N_{12}	0.116530	0.118521	0.126200	0.129720	0.120879	0.122370	6.0%
	N_{13}	0.023462	0.022076	0.021160	0.025400	0.023491	0.023118	9.9%
	N_{23}	0.028969	0.027961	0.027360	0.031640	0.028167	0.028819	9.8%
	M_1	9.81494	9.55018	9.79600	10.10090	9.83217	9.81884	2.9%
	M_2	6.52782	6.71974	7.19800	7.51540	6.71635	6.93546	8.4%
	M_3	1.24572	1.16438	1.15800	1.39260	1.29276	1.25069	11.3%
	c_1	0.070390	0.061983	0.068250	0.060150	0.056348	0.063424	-11.2%
	c_2	0.013067	0.013962	0.022160	0.002610	0.003669	0.011094	99.8%
	c_3	0.002048	0.003517	0.001840	0.001710	-0.000234	0.001776	-113.2%

Różnice wielkości parametrów między poszczególnymi zestawami odniesione do średniej z pięciu zestawów są jak widać rzędu 3-11%, tylko współczynniki tłumienia c_2 i c_3 różnią się znacznie, nawet o 100-113%. Zamieszczono też przykład dla 1500mHz, gdzie otrzymano wartość ujemną c_3 . Mimo to jednak model spełnia swoją rolę, gdyż w poszczególnych zakresach trajektorie z symulacji dość dobrze dopasowują się do trajektorii eksperymentalnych, co pokazano przykładowo w pracy [8]. Na rysunkach 5 i 6 pokazano wykresy bifurkacyjne z symulacji dla średniej wartości parametrów.



Rys. 5. Wykres bifurkacyjny przy wzroście częstotliwości wymuszenia f (symulacja dla wartości średniej parametrów)



Rys. 6. Wykres bifurkacyjny przy spadku częstotliwości wymuszenia f (symulacja dla wartości średniej parametrów)

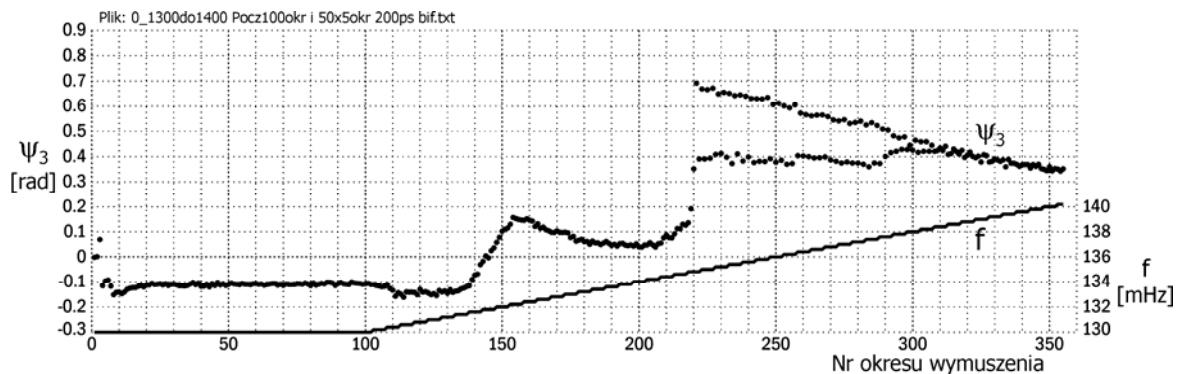
Dwa wyraźne szersze obszary chaotyczne znalazły potwierdzenie już w pierwszych badaniach waha-
dła. Eksperymentalnie pierwszy zakres nieregularny wykryto w granicach od 691.7mHz (przy wzro-
ście f) do 774.6mHz (przy spadku f); drugi szerszy obszar określono na razie zgrubnie w granicach
od 1.15Hz (1.25Hz) do 1.9Hz. Przy stosowanej amplitudzie wymuszenia, dla częstości powyżej 2-3Hz
ruch waha-
dła powoli zanikał i nie badano wyższych częstotliwości.

5. Wyniki pomiarów i symulacji w wybranych zakresach częstotliwości wymuszenia f

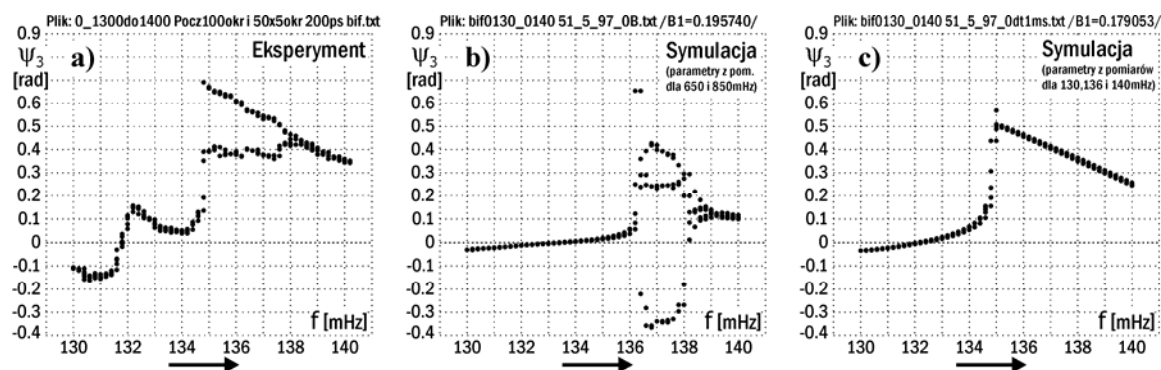
W rozdziale przedstawiono wyniki badań w 3 pasmach częstotliwości: 130-140mHz, 225-275mHz
i 380-400mHz. We wszystkich wynikach pomiarów jako wielkość określającą zachowanie waha-
dła wybrano kąt ψ_3 (użyty już na rys. 5 i 6) w chwilach dodatniego zbocza momentu wymuszającego (rys.
2c). Ponadto większość wyników eksperymentalnych przedstawiona jest jako przebieg zmian wspo-
mnianego przekroju kąta ψ_3 w funkcji kolejnych okresów wymuszenia. Rejestracji przebiegów czaso-
wych dokonywano wykorzystując kartę pomiarową NI i środowisko LabVIEW, natomiast obróbki tak
otrzymanych danych eksperymentalnych dokonywano za pomocą programu w języku VBA. Natomiast
trajektorie, wykresy bifurkacyjne i przekroje Poincaré otrzymano z danych z symulacji modelu matema-
tycznego w programie PendWin_Project.exe napisanego w języku Delphi.

5.1 Zakres zmian wymuszenia 130-140mHz

Na rysunku 7 pokazano przebieg zmian wartości ψ_3 przy wzroście częstotliwości wymuszenia od
130 do 140mHz; schodkowa linia pokazuje tam zmianę częstotliwości f (prawa oś wykresu). Pomiary wy-
konywano następująco: po odczekaniu ok. 100 okresów od chwili uruchomienia waha-
dła (czyli od zero-
wych kątów początkowych ψ_1 , ψ_2 , i ψ_3) zmieniano f co 5 okresów o 0.2mHz, przestawiając ręcznie
generator na podstawie obserwacji licznika okresów (urządzenia 4 i 5 na rys. 1). Dla $f \approx 134.8$ mHz zaobser-
wowano bifurkację podwojenia okresu, które zaniknęło ok. 138-138.4mHz. Na rys. 8a pokazano ekspery-
mentalny wykres bifurkacyjny (odpowiadający rys. 7), natomiast na rys. 8b i c przedstawiono wykresy
bifurkacyjne z symulacji dla dwóch wybranych zestawów parametrów: $B_1=0.195740$ oraz $B_1=0.179053$,
które oddawały możliwie najbliższy charakter przebiegu. W tych symulacjach obserwowano również prze-
skoki dla 136 lub 134.8mHz, ale zamiast dwuokresowości wystąpiło potrojenie okresu (rys. 8b).

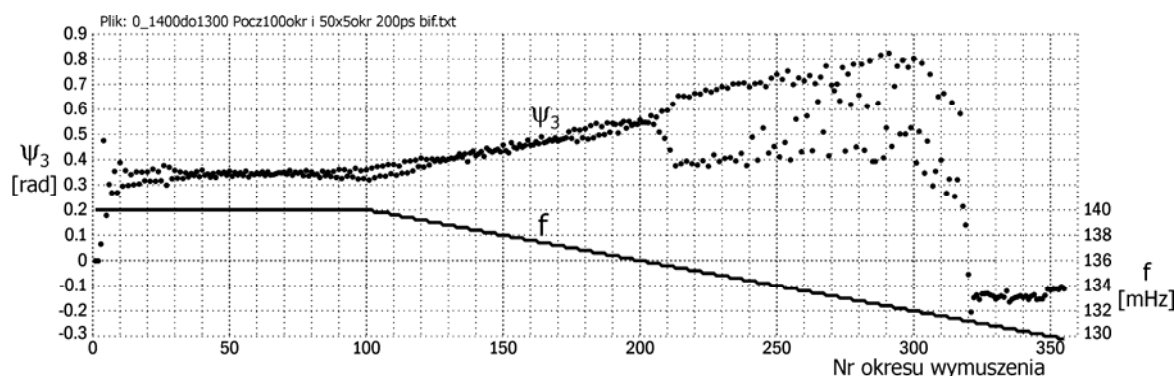


Rys. 7. Wyniki eksperymentalne przy wzroście częstotliwości wymuszenia od 130 do 140mHz (0.2mHz co 5 okresów)

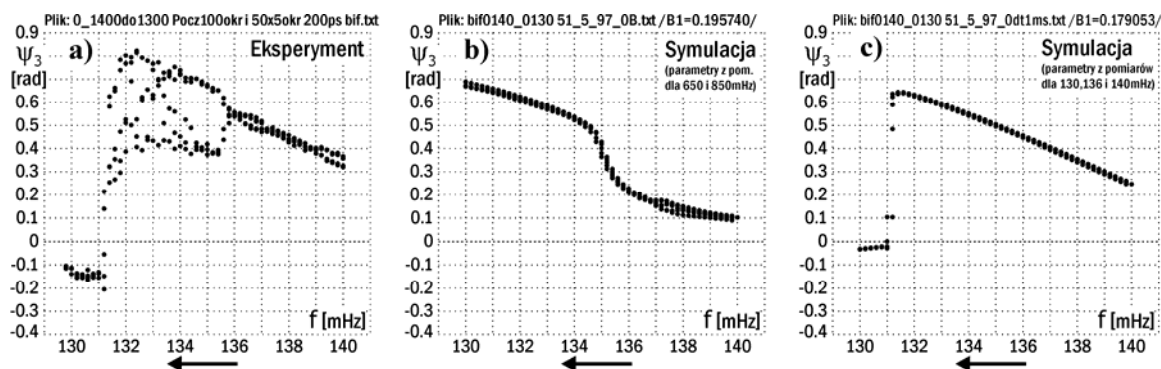


Rys. 8. Eksperymentalne (a) i numeryczne (b i c) wykresy bifurkacyjne przy wzroście częstotliwości od 130 do 140mHz.

Z kolei przy spadku częstotliwości, w eksperymencie (rys. 9) zauważono dwa przeskokki ok. 135.8 oraz między 132 a 131mHz, podczas gdy w symulacjach (rys. 10b i c) występuje tylko jeden wyraźny przeskok przy $f=131$ mHz i tylko przy jednym zestawie parametrów, brak jest też złożoności obserwowanej w eksperymencie.



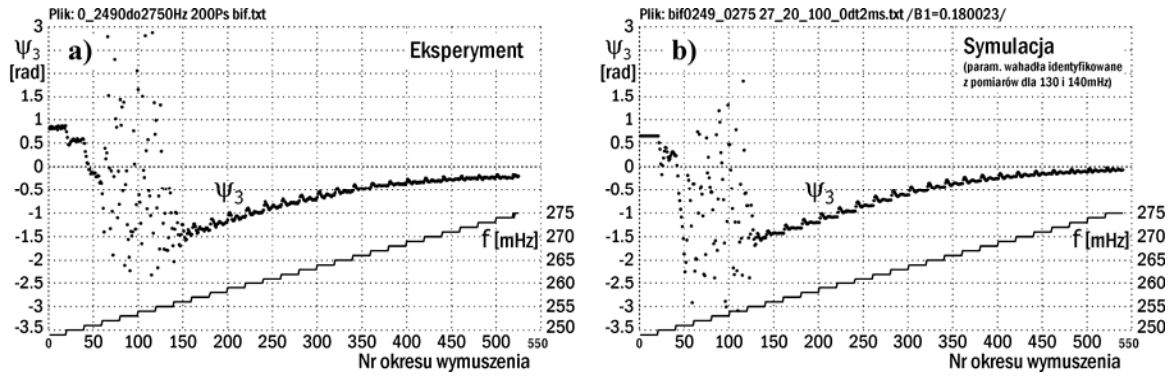
Rys. 9. Eksperymentalny wynik badania przy spadku częstotliwości wymuszenia od 140 do 130mHz. (0.2mHz co 5 okresów)



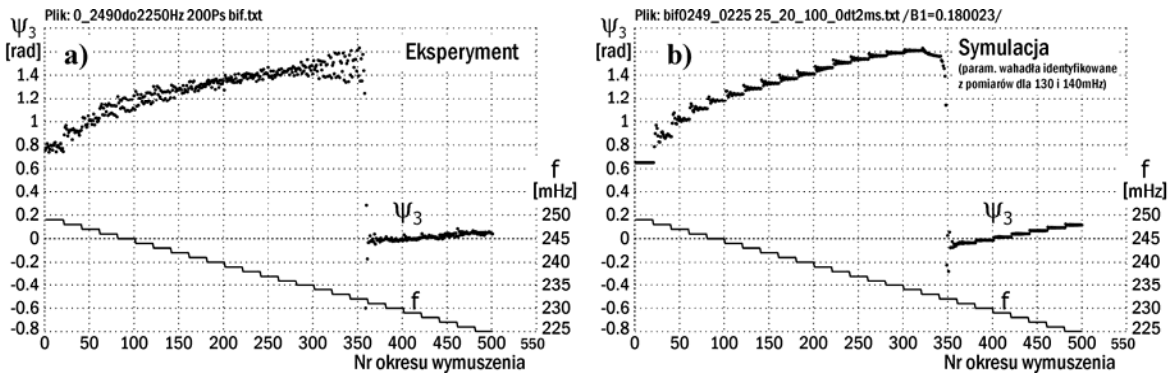
Rys. 10. Eksperymentalne (a) i numeryczne (b i c) wykresy bifurkacyjne przy spadku częstotliwości od 140 do 130mHz.

5.2 Zakres zmian wymuszenia 249-275mHz oraz 249 – 225mHz.

Eksperymenty przeprowadzono podobnie jak poprzednio, przy czym teraz zmieniano częstotliwość o 1mHz co 20 okresów. Symulacje numeryczne zadano w identyczny sposób jak w eksperymencie (tak samo zrobiono w poprzednim przykładzie). Tym razem najbardziej zbliżone do rzeczywistości okazały się wyniki dla zestawu parametrów z $B_1=0.180023$. Wyniki przedstawione na rys. 11 i 12 pokazano w identycznym układzie jak dla eksperymentu (ze schodkową linią częstotliwości). Uzyskano tutaj jak widać dużą zgodność eksperymentu i symulacji co do częstotliwości obserwowanych przeskoków i dość dobrą zgodność co do samej wartości kąta ψ_3 (różnice rzędu 0.2rad). Na rysunku 12 można też zauważyć większą nieregularność i rozmycie przebiegu rzeczywistego (a) względem symulacji (b).



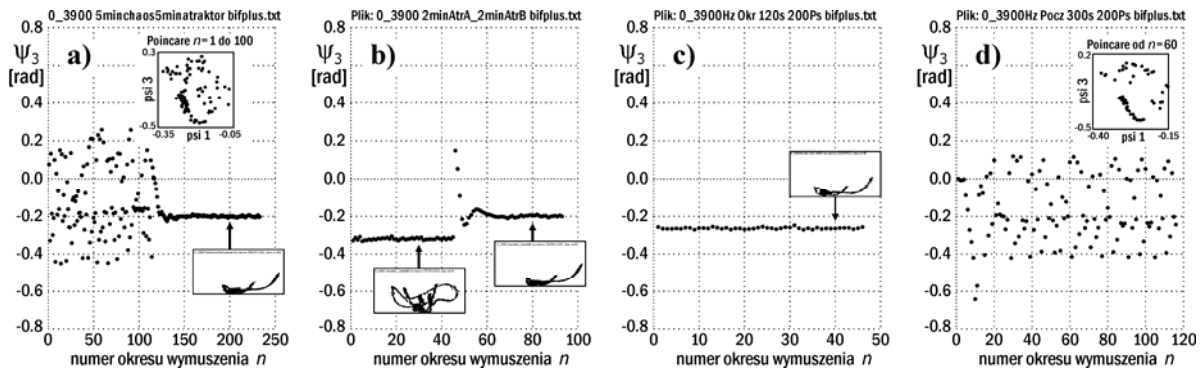
Rys. 11. Eksperymentalne (a) i numeryczne (b) wykresy przy wzroście f od 249 do 275mHz (1mHz co 20 okresów)



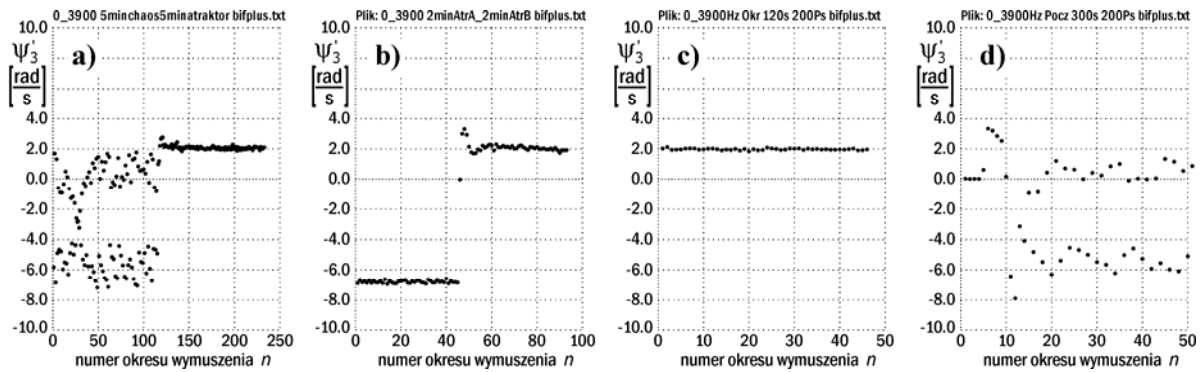
Rys. 12. Eksperymentalne (a) i numeryczne (b) wykresy przy spadku f od 249 do 225mHz (1mHz co 20 okresów)

5.3 Współistniejące atraktory dla $f=390\text{mHz}$ (badania w paśmie 380-400mHz)

Ten zakres potraktowano nieco bardziej wnikliwie, gdyż zaobserwowano eksperymentalnie kilka współistniejących atraktorów dla częstotliwości 390mHz (pokazano to na rysunkach 13 i 14).

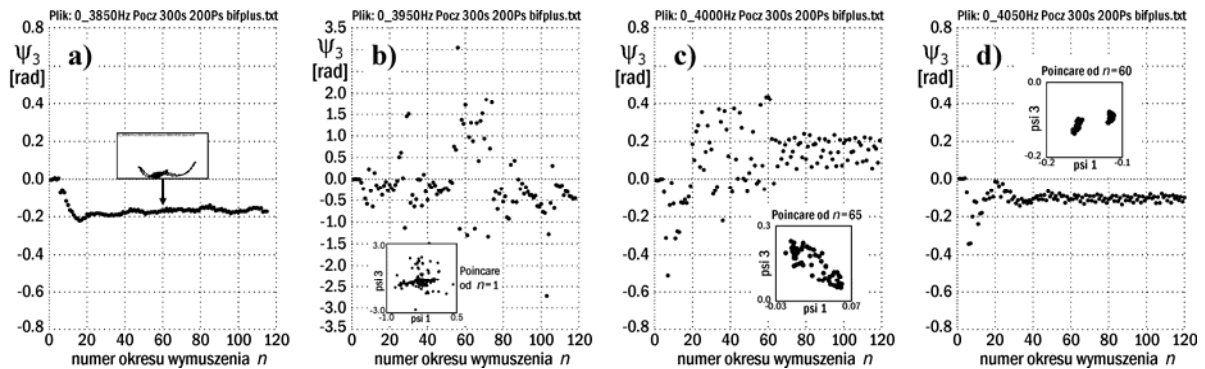


Rys. 13. Atraktory dla $f=390\text{mHz}$: a) chaotyczny (?) i okresowy, b), c) okresowe, d) quasiokresowy (?) lub chaotyczny



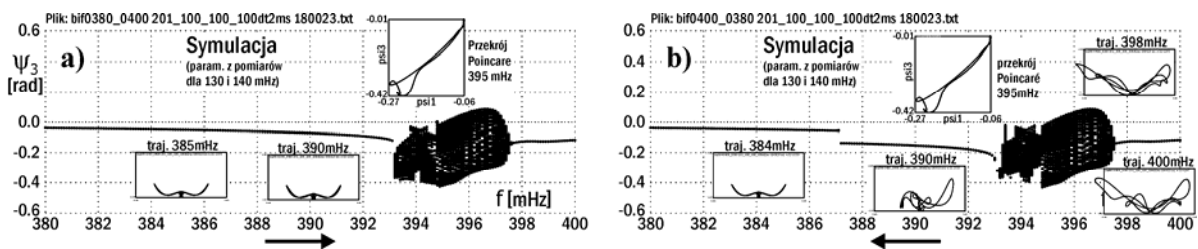
Rys. 14. Przebiegi prędkości kątowej ψ'_3 odpowiadające pomiarom jak na rysunku 13.

Na rysunku 13a do ok. $n=110$ widać przebieg o charakterze prawdopodobnie chaotycznym, bez obrotów. Obserwowano go już przez kilkadziesiąt okresów wcześniej. Przytrzymane przez chwilę wahadło "wpadło" przy $n \approx 125$ w atraktor okresowy. Trajektorie końca trzeciego ogniwa pokazano w małym okienku na dole, a w górnym okienku pokazano też przekrój Poincarégo od $n = 0$ do 100. Rys. 13b pokazuje do ok. 45 okresu nowy atraktor okresowy, który po dotknięciu ręką wahadła przeskakuje na poprzedni atraktor okresowy. Trzeci atraktor, bo z inną wartością ψ_3 (-2.7 zamiast 2rad), chociaż z bardzo podobną trajektorią i identyczną prędkością jak poprzednie, pokazano na rys. 13c. Na ostatnim rys. 13d widać pewną regularność przebiegu, co mogłoby wskazywać na quasiokresowość, ale potwierdzenie tego wymaga oczywiście rejestracji i analizy dużo większej liczby punktów. Na rysunku 15 pokazano przebiegi dla sąsiednich częstotliwości wymuszenia: 385, 395, 400 i 405mHz.

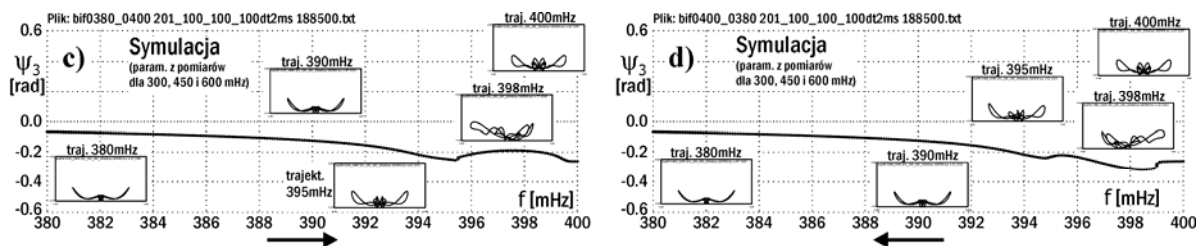


Rys. 15. Postacie obserwowane dla wymuszeń f : a) 385mHz, b) 395mHz, c) 400mHz, d) 405mHz

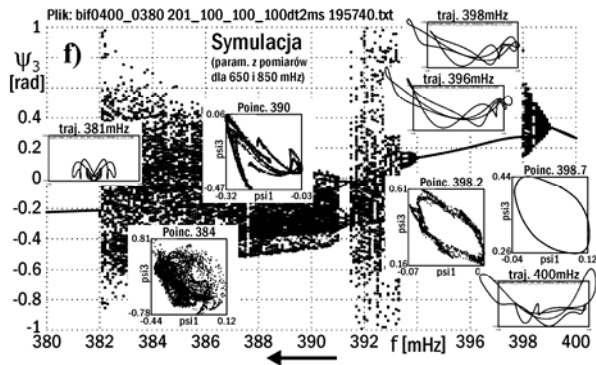
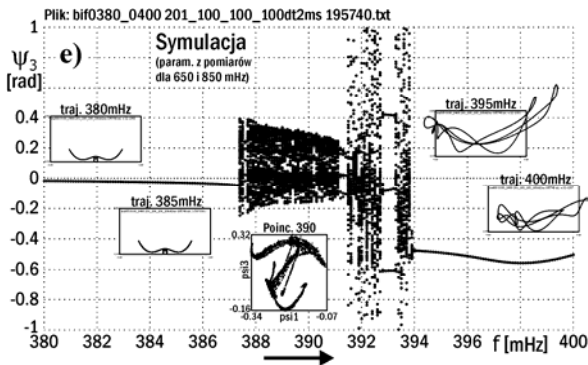
Z kolei na rysunkach 16a-i pokazano zestaw wykresów bifurkacyjnych z symulacji, otrzymane dla pięciu różnych zestawów parametrów. Lewe wykresy otrzymano dla częstotliwości rosnących (380-400mHz), a prawe dla malejących (400-380mHz). Częstotliwość w symulacjach zwiększano co 200 okresów o 0.1mHz. W pierwszej chwili wydaje się, że są to zupełnie różne charakterystyki. Jednak na wykresach wstawiono dodatkowe małe okienka wykresów trajektorii i przekrojów Poincarégo w kilku charakterystycznych punktach. Można wyraźnie zauważyć, że dla wszystkich parametrów istnieje powtarzający się atraktor o charakterystycznej trajektorii widocznej np. na rys. 16a dla częstotliwości 385 i 390mHz. Bardzo podobna trajektoria, choć przy niższej wartości kąta ψ_3 występuje na rys. 15a z eksperymentu. Z kolei na rys. 16i oraz 16g (dolna połowka dwuokresowej trajektorii) właśnie dla częstotliwości 390mHz występują podobne trajektorie, jak na rys. 13b (lewa trajektoria). Również przekrój Poincarégo z rys. 16e wydaje się wykazywać podobieństwo do wyznaczonego na rys. 13d.



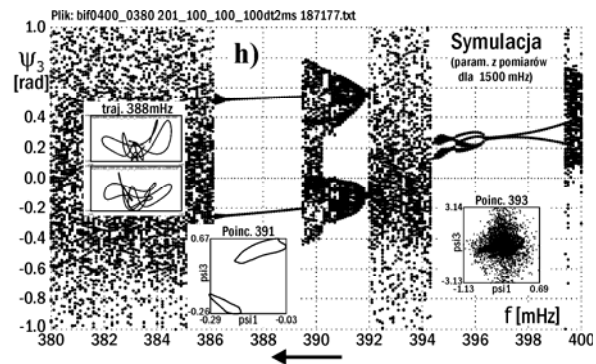
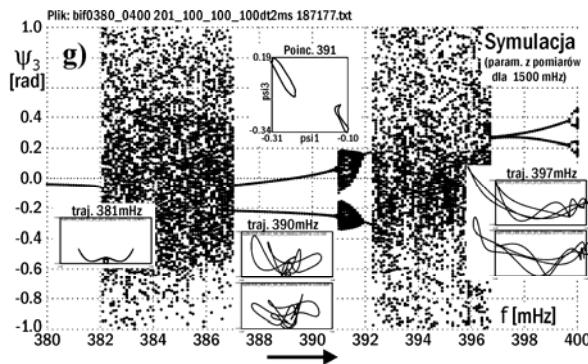
Rys. 16ab. Wykresy bifurkacyjne 380-400mHz i 400-380mHz dla zestawu parametrów z $B_1=0.180023$.



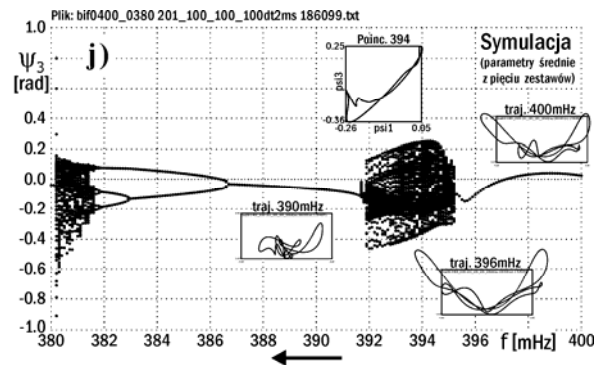
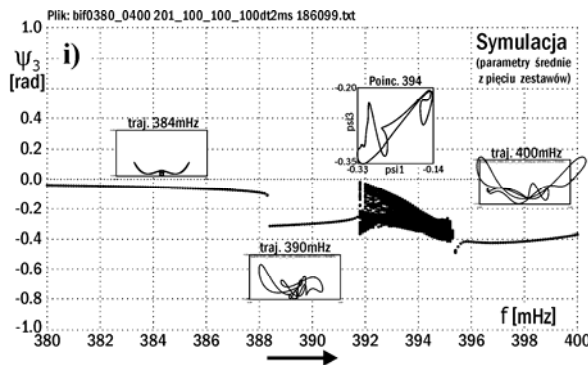
Rys. 16cd. Wykresy bifurkacyjne 380-400mHz i 400-380mHz dla zestawu parametrów z $B_1=0.188500$.



Rys. 16ef. Wykresy bifurkacyjne 380-400mHz i 400-380mHz dla zestawu parametrów z $B_1=0.195740$.



Rys. 16gh. Wykresy bifurkacyjne 380-400mHz i 400-380mHz dla zestawu parametrów z $B_1=0.187177$.



Rys. 16ij. Wykresy bifurkacyjne 380-400mHz i 400-380mHz dla zestawu parametrów z $B_1=0.186099$.

Prawdopodobnie wszystkie 5 par wykresów symulacyjnych z rys. 16 zawiera i inne, nie zaobserwowane postacie rzeczywistej charakterystyki bifurkacyjnej eksperymentalnego modelu.

6. Wnioski

Przedstawione wyniki badań, szczególnie w części eksperymentalnej, gdzie zaobserwowano zachowania nieregularne, wymagają jeszcze powtarzania pomiarów i rejestracji dużej liczby punktów, aby stwierdzić chaos czy quasiokresowość. Pojawia się tutaj problem z uzyskaniem ponownie danej postaci ruchu, gdyż wahadło nie ma możliwości zadania innych warunków początkowych niż zerowe lub też jednego z dwóch skrajnych wychyleń pierwszego ogniwa.

Nadal pozostaje też problem do rozwiązania dotyczący znalezienia jednego uniwersalnego zestawu parametrów wahadła, wykazującego dużą zgodność nie tylko trajektorii ruchu, ale i wykresów bifurkacyjnych w różnych badanych zakresach częstotliwości wymuszenia. W trakcie ostatnich pomiarów wykryto m.in. pewną małą niesymetrię sygnału z generatora, podczas gdy w symulacjach sygnał jest idealnie symetryczny.

Wydaje się celowe przedstawianie wykresów bifurkacyjnych wraz z trajektoriami i przekrojami Poincarégo w charakterystycznych punktach, gdyż daje to pełniejszy obraz zjawiska w danym przedziale, łatwiejsze porównanie z eksperymentem i lepszą możliwość analizy.

Należałoby też zbadać wpływ temperatury łożyska pierwszego ogniwa na współczynnik tłumienia i określić, czy potrzebny jest długi czas rozgrzewania z tego powodu.

Praca była częściowo finansowana poprzez Ministerstwo Edukacji i Szkolnictwa Wyższego (projekt badawczy nr 4 T07A 031 28) w latach 2005-2008.

7. Literatura

- [1] BAKER G. L., BLACKBURN J. A., *The Pendulum. A Case Study in Physics*. Oxford University Press, 2005.
- [2] AWREJCEWICZ J., KUDRA G., *Nonlinear dynamics of a triple physical pendulum*, Materiały konferencyjne II Krajowej Konferencji 'Metody i systemy komputerowe w badaniach naukowych i projektowaniu inżynierskim' (CCATIE), AGH Kraków, 25-27 paźdz. 1999 (Red. R. Tadeusiewicz, S. Białas, T. Szmuc, M. Szymkat), 231-236
- [3] AWREJCEWICZ J., KUDRA G., *Rodzina współistniejących rozwiązań regularnych i nieregularnych w układzie trzech połączonych wahadeł z uderzeniami*, Materiały z: "70-lecie urodzin i 45-lecie pracy naukowej Prof. dr hab. inż. Józefa Giergiela oraz V Szkoła Analizy Modalnej". Kraków, 12-14 grudnia 2000, 25-34.
- [4] AWREJCEWICZ J., KUDRA G., LAMARQUE C.-H., *Nonlinear dynamics of triple pendulum with impacts*, Journal of Technical Physics, 43(2), 2002, 97-112.
- [5] AWREJCEWICZ J., KUDRA G., LAMARQUE C.-H., *Dynamics investigation of three coupled rods with a horizontal barrier*, Special Issue of Meccanica, 38(6), 2003, 687-698.
- [6] KUDRA G., *Analiza drgań bifurkacyjnych i chaotycznych w układzie potrójnego wahadła fizycznego z uderzeniami*. Rozprawa Doktorska, Politechnika Łódzka, Łódź, 2003.
- [7] SUPEŁ B., *Badania eksperymentalne i analiza numeryczna prostych chaotycznych modeli mechanicznych*. Rozprawa Doktorska, Politechnika Łódzka, Łódź, 2005.
- [8] AWREJCEWICZ J., KUDRA G., WASILEWSKI G., *Doświadczalne wyznaczanie obszarów chaosu potrójnego wahadła fizycznego*, Materiały XI Konferencji Naukowej Wibroakustyki i Wibrotechniki WibroTech 2005, Warszawa, 3-4 listopada 2005, 27-32.