

XI Konferencja Naukowa Wibroakustyki i Wibrrotechniki
VI Ogólnopolskie Seminarium Wibroakustyka w Systemach Technicznych

Jan Awrejcewicz
Grzegorz Kudra
Grzegorz Wasilewski
Katedra Automatyki i Biomechaniki
Wydział Mechaniczny
Politechnika Łódzka

DOŚWIADCZALNE WYZNACZANIE OBSZARÓW CHAOSU POTRÓJNEGO WAHADŁA FIZYCZNEGO

1. Wprowadzenie

Pojedyncze wahadło jako źródło wielu fundamentalnych zjawisk dynamiki jest od początku historii mechaniki przedmiotem zainteresowania badaczy. W szczególności pojedyncze wahadło liniowo tłumione i wymuszane harmonicznym może przedstawiać takie klasyczne zjawiska dynamiki nieliniowej jak: zachowania regularne i nieregularne, bifurkacje klasyczne (bifurkację siodłowo-węzłową, złamanie symetrii, podwojenia okresu), współistniejące atraktory i wiele innych.

Z drugiej strony wiele rzeczywistych układów fizycznych może być modelowanych układami o kilku stopniach swobody. Ponadto nie wszystkie klasyczne zjawiska dynamiki nieliniowej są obecne w pojedynczym, liniowo tłumionym i wzbudzonym harmonicznym wahadłem. Dlatego w mechanice jak również w fizyce obserwuje się ostatnio próby badania układów połączonych ze sobą wahadłem [6,7].

Daje się również zauważyć ostatnio wzrost zainteresowania badaniami eksperymentalnymi zarówno pojedynczego wahadła, jak i układów połączonych wahadłem. O ile pojedyncze, jak i podwójne wahadło w różnych postaciach jest dość często przedmiotem analiz doświadczalnych [3,4,2], to potrójne wahadło raczej rzadko występuje w literaturze jako obiekt badań eksperymentalnych. Na przykład w pracy [8] opisano doświadczalne badanie potrójnego wahadła wzbudzanego poziomym ruchem ramy, na której było ono zawieszane. Przedstawiono tam kilka przykładów rozwiązań nieregularnych.

W obecnej pracy przedstawiono badania doświadczalne i numeryczne potrójnego wahadła fizycznego, w którym pierwsze wahadło jest wymuszane zewnętrznym momentem w postaci prostokątnej funkcji czasu. Model matematyczny opisujący obiekt był wcześniej wykorzystany w pracach [5,1].

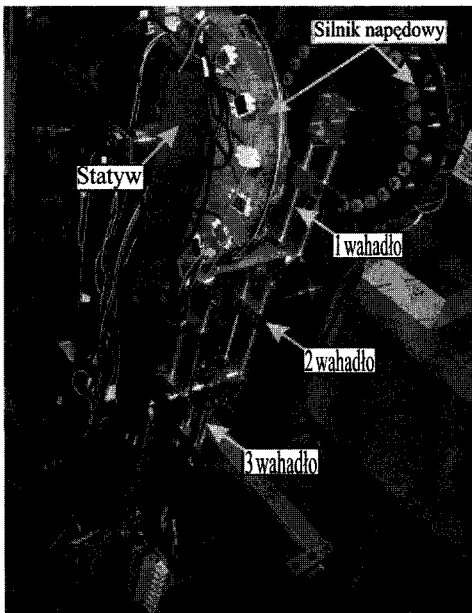
2. Stanowisko doświadczalne

Stanowisko doświadczalne potrójnego wahadła (rysunek 1) składa się z następujących podukładów: wahadła, układu napędowego i układu pomiarowego.

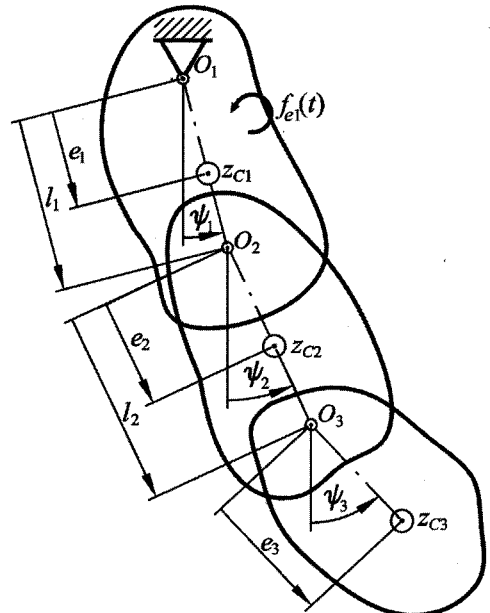
Wahadło składa się ze statywu i zawieszonych na nim trzech połączonych wahadeł z regulowanymi długościami i dołączalnymi masami regulacyjnymi. Siła zewnętrzna działająca na pierwsze wahadło jest uzyskana przy użyciu silnika prądu stałego własnej konstrukcji z komutacją optyczną. Napięcie doprowadzone do cewek silnika jest sterowane przy użyciu specjalnego układu cyfrowego własnej konstrukcji, pozwalającego uzyskać symetryczne wymuszenie prostokątne o wymaganej częstotliwości i amplitudzie. Pomiar położenia katowych wahadeł odbywa się przy użyciu przetworników katowych Vishay. Do gromadzenia i prezentacji wyników pomiarów przy użyciu komputera wykorzystane zostało środowisko LabView.

3. Modelowanie matematyczne

Rysunek 2 przedstawia wyidealizowaną koncepcję opisu fizycznego układu rzeczywistego przedstawionego na rysunku 1. Matematyczny opis tego układu pochodzi ze wspomnianych wcześniejszych prac [5,1], w których zostały podane równania dynamiki potrójnego wahadła fizycznego w postaci bezwymiarowej. Układ jest idealizacją, gdyż zakłada on że wahadła są układem płaskim, poruszają się w próżni, połączone są węzłami obrotowymi z tłumieniem wiskotycznym bez luzów. Środek masy każdego wahadła leży na linii łączącej węzły obrotowe i jedna z głównych osi centralnych (z_{ci}) każdego wahadła jest prostopadła do płaszczyzny ruchu.



Rys. 1. Stanowisko doświadczalne.



Rys. 2. Model potrójnego wahadła fizycznego.

Równania ruchu wahadła są następujące:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\psi})\ddot{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{N}(\boldsymbol{\psi})\dot{\boldsymbol{\psi}}^2 + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{p}(\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{f}_e(t) \quad (1)$$

gdzie:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\psi}) = \begin{bmatrix} B_1 & N_{12}c_{12} & N_{13}c_{13} \\ N_{12}c_{12} & B_2 & N_{23}c_{23} \\ N_{13}c_{13} & N_{23}c_{23} & B_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}(\boldsymbol{\psi}) = \begin{bmatrix} 0 & N_{12}s_{12} & N_{13}s_{13} \\ -N_{12}s_{12} & 0 & N_{23}s_{23} \\ -N_{13}s_{13} & -N_{23}s_{23} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}(\boldsymbol{\psi}) = \begin{Bmatrix} M_1 s_1 \\ M_2 s_2 \\ M_3 s_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_e(t) = \begin{Bmatrix} f_{e1}(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}^2 = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}_1^2 \\ \dot{\psi}_2^2 \\ \dot{\psi}_3^2 \end{Bmatrix},$$

i $c_{ij} = \cos(\psi_i - \psi_j)$, $s_{ij} = \sin(\psi_i - \psi_j)$. Wektor parametrów wahadła jest następujący:

$$\boldsymbol{\mu} = [B_1, B_2, B_3, N_{12}, N_{13}, N_{23}, M_1, M_2, M_3, c_1, c_2, c_3] \quad (3)$$

gdzie:

$$B_1 = J_{z1} + e_1^2 m_1 + l_1^2 (m_2 + m_3), \quad B_2 = J_{z2} + e_2^2 m_2 + l_2^2 m_3, \quad B_3 = J_{z3} + e_3^2 m_3, \quad N_{12} = m_2 e_2 l_1 + m_3 l_1 l_2 \\ N_{13} = m_3 e_3 l_1, \quad N_{23} = m_3 e_3 l_2, \quad M_1 = m_1 g e_1 + (m_2 + m_3) g l_1, \quad M_2 = m_2 g e_2 + m_3 g l_2, \quad M_3 = m_3 g e_3 \quad (4)$$

Należy zauważyć, że parametry wymuszenia zewnętrznego (q, ω) są podane osobno. Powyżej m_i i J_{zi} oznaczają odpowiednio masę i masowy moment bezwładności względem osi z_{ci} i -tego wahadła.

Następnie parametry modelu są oszacowane na podstawie badań eksperymentalnych, poprzez szukanie minimum globalnego funkcji-kryterium dopasowania modelu i obiektu rzeczywistego. Przez dopasowanie to rozumiemy dopasowanie odpowiednich sygnałów wyjściowych $\psi_i(t)$ z modelu całkowanego numerycznie i z układu rzeczywistego, przy tych samych sygnałach wejściowych (wymuszeniach zewnętrznych) i tych samych warunkach początkowych. Jako funkcję-kryterium przyjęto sumę kwadratów odchyłek pomiędzy odpowiednimi próbkami sygnałów wyjściowych z modelu i układu rzeczywistego. Minimum poszukiwano wykorzystując metodę losowego „strzelania” wokół bieżącej wartości parametrów. Metoda wymaga podania punktu startowego.

Do estymacji parametrów użyto trzech różnych serii doświadczalnych dla trzech różnych częstotliwości wymuszenia $f = 0.3, 0.45$ i 0.6 Hz ($f = 2\pi/\omega$) oraz przy amplitudzie wymuszenia $q = 2$ Nm. Otrzymano następujący zbiór parametrów:

$$B_1 = 0.1885 \text{ kg m}^2, \quad B_2 = 0.1602 \text{ kg m}^2, \quad B_3 = 0.01675 \text{ kg m}^2, \quad N_{12} = 0.1262 \text{ kg m}^2, \\ N_{13} = 0.02116 \text{ kg m}^2, \quad N_{23} = 0.02736 \text{ kg m}^2, \quad M_1 = 9.796 \text{ kg m}^2/\text{s}^2, \quad M_2 = 7.198 \text{ kg m}^2/\text{s}^2, \\ M_3 = 1.158 \text{ kg m}^2/\text{s}^2, \quad c_1 = 0.06825 \text{ kg m}^2/\text{s}, \quad c_2 = 0.02216 \text{ kg m}^2/\text{s}, \quad c_3 = 0.00184 \text{ kg m}^2/\text{s}. \quad (5)$$

Należy zauważyć, że znalezione parametry są optymalne (przy założeniu, że znaleziono rzeczywiście minimum globalne) w sensie dopasowania sygnałów wyjściowych modelu i układu rzeczywistego, a nie w sensie najlepszej aproksymacji rzeczywistych parametrów fizycznych wahadła. W tym kontekście, raczej sztuczne

wartości współczynników tłumienia nie stanowią dużego problemu, jeśli model spełnia swoją rolę polegającą na przewidywaniu zachowania odpowiedzi układu rzeczywistego.

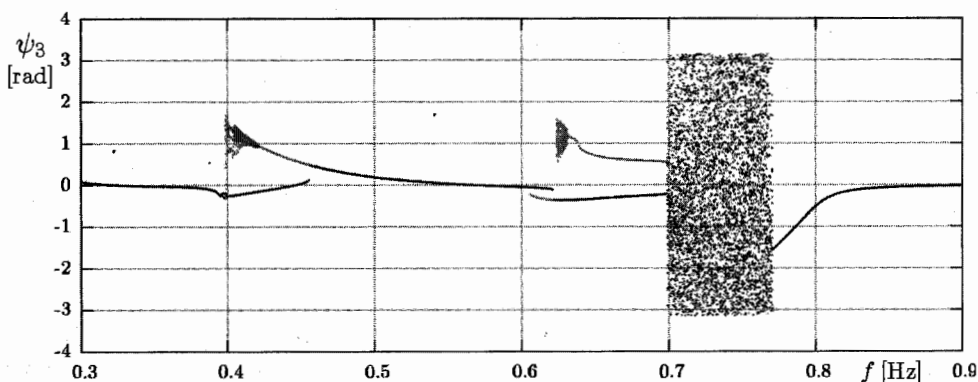
4. Wyniki badań

Dwa wykresy bifurkacyjne modelu matematycznego z parametrami (5) i dla $q = 2$ Nm zostały nałożone na siebie na rysunku 3. Jeden z nich jest wykonany przy rosnącej, a drugi przy malejącej częstotliwości f wymuszenia (odpowiednio czarne i szare linie); f jest parametrem bifurkacyjnym. Widoczny jest na wykresie obszar nieregularnego zachowania się modelu matematycznego dla $f \in (0.700, 0.768)$ Hz. Badania eksperymentalne potwierdzają istnienie tego okna dla $f \in (0.692, 0.774)$ Hz.

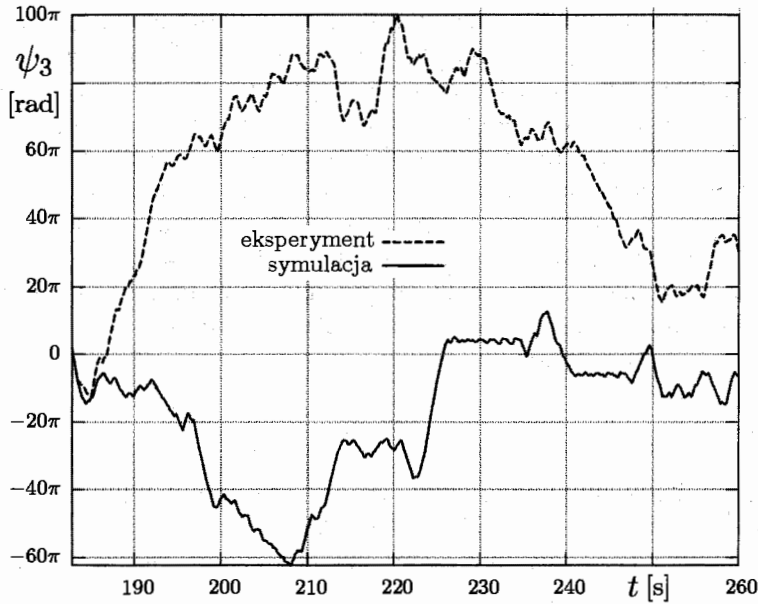
Rysunek 4 pokazuje przykładowe rozwiązania nieregularne dla $f = 0.73$ Hz uzyskane z eksperymentu i numerycznie. Najpierw wzięto rozwiązanie doświadczalne z zerowych warunków początkowych i pokazano na rysunku po odrzuceniu ruchu przejściowego. Następnie odpowiednie rozwiązanie zostało uzyskane z modelu matematycznego dla warunków początkowych w chwili $t = 183$ s wziętych z rozwiązania doświadczalnego. Dzięki temu obserwujemy na wykresie szybkie oddalanie się od siebie obu rozwiązań wskutek wrażliwości na warunki początkowe. Oba rozwiązania, doświadczalne i numeryczne są nieregularne, z pełnymi obrotami wykonywanymi przez wszystkie trzy wahadła w nieprzewidywalnych chwilach. Chaotyczna natura atraktora numerycznego została potwierdzona przez następujące widmo wykładników Lapunowa: $\lambda_1=3.5$, $\lambda_2=1.4$, $\lambda_3=0.2$, $\lambda_4=0$, $\lambda_5=-0.7$, $\lambda_6=-2.2$, $\lambda_7=-4.1$.

Na rysunku 5 przedstawiono przykładowe rozwiązania okresowe dla $f = 0.81$ Hz uzyskane z eksperymentu i z modelu z zerowych warunków początkowych. Widoczna jest raczej dobra zgodność obu rozwiązań, z tym że układ rzeczywisty wykazuje pewną asymetrię rozwiązania

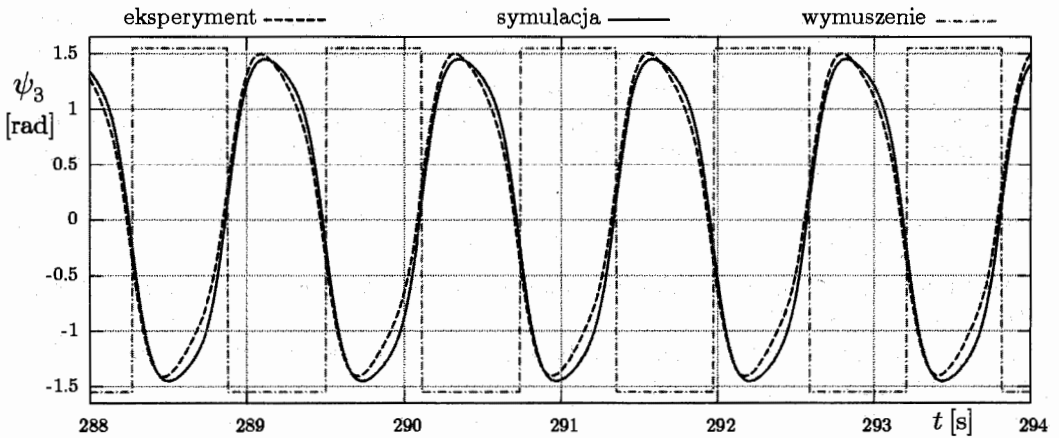
Wyniki przedstawione w tym punkcie pokazują, że model matematyczny wahadła (1-4) z parametrami (5) zachowuje się podobnie do układu rzeczywistego zarówno pod względem ilościowym jak i jakościowym.



Rys. 3. Wykres bifurkacyjny.



Rys. 4. Odpowiedź chaotyczna modelu i układu rzeczywistego dla $f = 0.73$ Hz.



Rys. 5. Odpowiedź okresowa modelu i układu rzeczywistego dla $f = 0.81$ Hz.

5. Wnioski

Jak wynika z zastosowanej metody, parametry modelu nie są optymalne w sensie aproksymacji rzeczywistych wielkości fizycznych występujących na stanowisku doświadczalnym. Parametry te są optymalne w sensie dopasowania sygnałów wyjściowych modelu i układu rzeczywistego przy tych samych sygnałach wejściowych i warunkach początkowych. Z tego punktu widzenia, dużo ważniejsze niż raczej nienaturalne uzyskane wartości współczynników tłumienia, jest to, że model

matematyczny z parametrami (5) może służyć jako skuteczne narzędzie przewidywania zachowania się układu rzeczywistego. Model może być wykorzystany do szybkiego znajdowania interesujących zjawisk dynamiki nieliniowej i obszarów, gdzie należy ich szukać w układzie rzeczywistym. Może on służyć również do ich wyjaśnienia.

Pewne różnice jakie występują pomiędzy wynikami uzyskanymi doświadczalnie i numerycznie mogą mieć dwa źródła. Po pierwsze, model matematyczny może nie być wystarczająco złożony, aby odpowiednio dokładnie opisać zjawiska zachodzące w układzie rzeczywistym. Dotyczy to szczególnie tłumienia w węzłach wahadła, gdzie mogą zachodzić zjawiska bardziej złożone niż tłumienie liniowe. Po drugie, metoda znajdowania minimum globalnego funkcji wielu zmiennych nie zapewnia, że znalezione minimum nie jest minimum lokalnym.

Literatura

1. Awrejcewicz J., Kudra G., Lamarque C.-H., Dynamics investigation of three coupled rods with a horizontal barrier, Special Issue of Meccanica, 2003, 38(6), str. 687-698.
2. Bishop S.R., Sudor D.J., The "not quite" inverted pendulum, Int. J. Bifurcation and Chaos, 1998, 9(1), str. 273-285.
3. Blackburn J.A., Zhou-Jing Y., Vik S., Smith H.J.T, Nerenberg M.A.H., Experimental study of chaos in a driven pendulum, Physica, 1987, D26(1-3), str. 385-395.
4. Heng H., Doerner R., Hubinger B., Martienssen W., Approaching nonlinear dynamics by studying the motion of a pendulum. I. Observing trajectories in state space, Int. J. Bifurcation and Chaos, 1994, 4(4), str. 751-760.
5. Kudra G., Analiza drgań bifurkacyjnych i chaotycznych w układzie potrójnego wahadła fizycznego z uderzeniami, Rozprawa Doktorska, Politechnika Łódzka, Łódź, 2003.
6. Skeledon A.C., Mullin T., Mode interaction in a double pendulum, Phys. Lett., 1992, A166, str. 224-229.
7. Skeledon A.C., Dynamics of a parametrically excited double pendulum, Physica, 1994, D75, str. 541-558.
8. Zhu Q., Ishitobi M., Experimental study of chaos in a driven triple pendulum, J. Sound Vibr. 1999, 227(1), str. 230-238.

Praca została wykonana w ramach projektu badawczego Ministerstwa Nauki i Informatyzacji (grant Nr 4T07A 03128).