

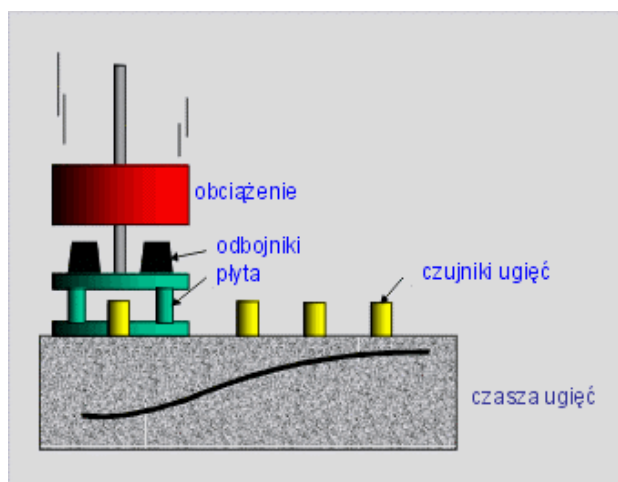
Jan AWREJCEWICZ, Yuriy PYRYEV*

WYZNACZENIE UGIĘĆ PÓLPRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ POCHODZĄCYCH OD OBCIĄŻEŃ UDAROWYCH

1. Wstęp

Do prawidłowego utrzymania dróg niezbędna jest informacja o nośności istniejących nawierzchni. W tym celu często wykorzystywane są pomiary ugięć, które jako dane wejściowe w modelach obliczeniowych służą do oceny nośności konstrukcji. Stosuje się różne metody pomiarów ugięć, które zaliczane są do grupy tzw. badań nieniszczących NDT (Non Destructive Testing). Wykorzystywane w tych metodach urządzenia służą dla pomiarów ugięć od obciążeń udarowych – FWD (Falling Weight Deflectometer) lub pomiarów propagacji fali – SPA (Seismic Pavement Analyzer).

Ugięciomierze udarowe to w ostatnich latach urządzenia najczęściej stosowane w ocenie nośności nawierzchni. Aparaty wykorzystywane są w pomiarach na różnych typach nawierzchni, najczęściej dróg i lotnisk oraz do oceny dużych powierzchni przemysłowych. Urządzenia te można podzielić na dwie grupy: FWD - symulujące nacisk do $P = 120$ kN i stosowane głównie na drogach oraz HWD (Heavy Weight Deflectometer) („nieco” cięższa odmiana zwykłych ugięciomierzy, symulujące nacisk nawet do $P = 250$ kN [3]). Te ostatnie w praktyce stosowane są jedynie do oceny nawierzchni lotnisk.



Rys.1. Schemat pracy ugięciomierza udarowego [5]

FWD wywołuje obciążenie przez zrzucenie ciężaru na układ tłumiący zamontowany na płycie naciskowej. Elementy systemu takie jak ciężar, układ tłumiący oraz wysokość zrzutu mogą być każdorazowo zmieniane w celu uzyskania założonego obciążenia. Wartości ugięć mierzone są przez czujniki w centrum obciążenia oraz w kilku ustalonych od punktu obciążenia odległościach. Normalnie rejestrowane są podczas pomiarów jedynie maksymalne wartości obciążeń i ugięć. Opcjonalnie można również rejestrować przebiegi

* Politechnika Łódzka, Katedra Automatyki i Biomechaniki

obciążeń i ugięć w czasie, co jest wykorzystywane w procesie kalibracji urządzeń jak również w nowo powstających metodach analizy.

W zależności od typu nawierzchni przyjętych w metodach projektowania lub dla celów badawczych stosowane są różne wielkości obciążeń. Dla dróg najczęściej symulowane jest obciążenie o wartości 50 ± 5 kN, co odpowiada naciskowi koła bliźniaczego osi 100 kN.

Aby w odpowiedni sposób opisać czasę ugięć aparat powinien być wyposażony w odpowiednią liczbę czujników. Typowy układ z sześcioma czujnikami przedstawia się następująco: $r_0 = 0$, $r_1 = 0.3$, $r_2 = 0.6$, $r_3 = 0.9$, $r_4 = 1.5$ i $r_5 = 1.8$ m od punktu obciążenia. Rozmieszczenie czujników zależy od sztywności całej konstrukcji.

Płyta naciskowa służy do przekazania impulsu obciążenia na nawierzchnię. W zależności od typu nawierzchni, przyjętych metod projektowania lub dla celów badawczych stosowane są płyty różniące się budową i wielkością. Do pomiaru ugięć nawierzchni asfaltowych wykorzystuje się płyty stalowe o średnicy $r_0 = 0.3$ m z poduszką gumową, która stosowana jest w celu zapewnienia dobrego kontaktu płyty z nawierzchnią.

Ugięciomierz FWD jest jednym z tych urządzeń, które pozwalają inżynierowi opisać i zrozumieć strukturalne zachowanie nawierzchni. Wyniki pomiarów muszą być tak przetworzone, aby mogły być wykorzystane w procesie oceny stanu nawierzchni.

Dla analizy otrzymanych pomiarów potrzeba mieć teoretyczne rozwiązanie zagadnienia. Praca stanowi pierwszy krok do obliczeń ugięć półprzestrzeni złożonych z różnych warstw sprężystych wywołanych obciążeniami udarowymi.

Poprzez porównanie otrzymanych pomiarów i obliczeń teoretycznych można wyznaczyć fizyko-mechaniczne parametry nawierzchni warstwowych.

W pracy rozpatrzono klasyczne osiowo-symetryczne zagadnienie typu Lamba po zadziałaniu udaru w postaci wymuszenia impulsowego w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń sprężystą o rozkładzie powierzchniowym na obszarze kołowym podobnym do analizowanego przez Herta. Rozwiązanie klasycznego zagadnienia Lamba można znaleźć w pracach [1,4]. W celu wyznaczenia przemieszczeń i naprężeń w wyżej wspomnianym zagadnieniu osiowo-symetrycznym posłużono się transformacją całkową Hankela i Laplace'a. Odwrotne transformaty Hankela i Laplace'a uzyskano na drodze obliczeń numerycznych [2]. Pokazano zachowanie się przemieszczenia pionowego w czasie w różnych punktach powierzchni sprężystej.

2. Matematyczne sformułowanie problemu

Niech w płaszczyźnie $z = 0$ ograniczającej półprzestrzeń sprężystą działa osiowo-symetryczne obciążenie w postaci udaru typu wymuszenia impulsowego skierowanego w kierunku osi z . Obciążenie to wywołuje w półprzestrzeni stan naprężenia i odkształcenia, powstają fale podłużne (dylatacyjne), poprzeczne (dystorsyjne) i powierzchniowe (typu Rayleigha).

Zagadnienie sprowadza się do rozwiązania liniowych równań ruchu we współrzędnych walcowych o postaci [6]

$$(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2)$$

z warunkami brzegowymi

$$\sigma_{zz} = -Z(r)f(t), \quad \sigma_{zr} = 0, \quad \text{przy } z = 0, \quad u, w \rightarrow 0, \quad \text{przy } z \rightarrow \infty, \quad (3)$$

i początkowymi

$$u = \partial u / \partial t = w = \partial w / \partial t = 0, \quad \text{przy } t < 0, \quad (4)$$

gdzie λ, μ są stałymi Lamégo, ρ oznacza gęstość, $u(r, z, t), w(r, z, t)$ są składowymi przemieszczenia odpowiednio w kierunkach r i z , $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}$ są składowymi normalnymi naprężeniami we współrzędnych walcowych, a σ_{zr} jest składową styczną naprężenia we współrzędnych walcowych.

Będziemy zakładać, że zmiana funkcji $f(t)$ w czasie jest typu impulsowego

$$f(t) = At \exp(-\nu_0 t) H(t), \quad \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} ds = A/(s + \nu_0)^2,$$

gdzie $A = \nu_0 e$, $\max_{t \in (0, \infty)} f(t) = f(t_{\max}) = 1$, $t_{\max} = 1/\nu_0$, oraz $H(t) = 1, t > 0$; $H(t) = 0, t < 0$, a zmiana obciążenia na powierzchni ma następującą postać

$$Z(r) = \frac{2P}{\pi r_*^4} (r_*^2 - r^2) H(r_* - r), \quad 2\pi \int_0^{\infty} Z(r) r dr = P, \quad \bar{Z}(k) = \int_0^{\infty} Z(r) J_0(kr) r dr = \frac{P}{2\pi} \left(8 \frac{J_2(kr_*)}{(kr_*)^2} \right).$$

3. Rozwiązanie zagadnienia

Dokonajmy transformacji całkowej Laplace'a i Hankela równań (1) i (2) przy uwzględnieniu jednorodnych warunków początkowych (4). Otrzymujemy liniowe równania różniczkowe ze względu na zmienną z . Rozwiązanie tego układu równań zależy od czterech niewiadomych, które wyznaczamy wykorzystując cztery warunki brzegowe (3). Stosując odwrotną transformację Laplace'a i Hankela, i wprowadzając nowe zmienne całkowania ($r > 0$), otrzymujemy przemieszczenie pionowe:

$$w(r, z, t) = \frac{PA}{2\pi\mu c_2} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} w_0^{LH} \frac{e^{y\tau}}{(y + t_* \nu_0)^2} dy \right) \tilde{Z}(x) x J_0(x) dx, \quad (5)$$

gdzie:

$$w_0^{LH} = (\gamma_0 e^{-\alpha_0 \frac{\zeta}{\rho}} - 2x^2 e^{-\beta_0 \frac{\zeta}{\rho}}) \frac{\alpha_0}{\Delta_0},$$

$$\alpha_0 = \sqrt{x^2 + (c_2^2/c_1^2)y^2}, \quad \beta_0 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \gamma_0 = 2x^2 + y^2, \quad \Delta_0 = \gamma_0^2 - 4\alpha_0\beta_0 x^2,$$

$$\zeta = \frac{z}{r_*}, \quad \xi = \frac{r}{r_*}, \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad t_* = \frac{r}{c_2}, \quad \tilde{Z}(x) = 8 \frac{J_2(x/\xi)}{(x/\xi)^2}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

4. Analiza numeryczna

Biorąc pod uwagę położenia punktów osobliwych funkcji podcałkowej (punkty rozgałęzienia $\pm ix$, $\pm i(c_1/c_2)x$ i bieguny $\pm i(c_R/c_2)x$, kontur całkowania w odwrotnym przekształceniu Laplace'a AB został zamieniony konturem $CDEF$ złożonym z przedziałów DE , CD i EF (patrz rysunek 2), co jest zgodne z twierdzeniem całkowym Cauchy'ego.

Na przykład

$$W(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} \tilde{W}(y) e^{y\tau} dy = W_1 + W_2 + W_3, \quad \tilde{W}(y) = \frac{w_0^{LH}}{(y + t_* \nu_0)^2}, \quad (6)$$

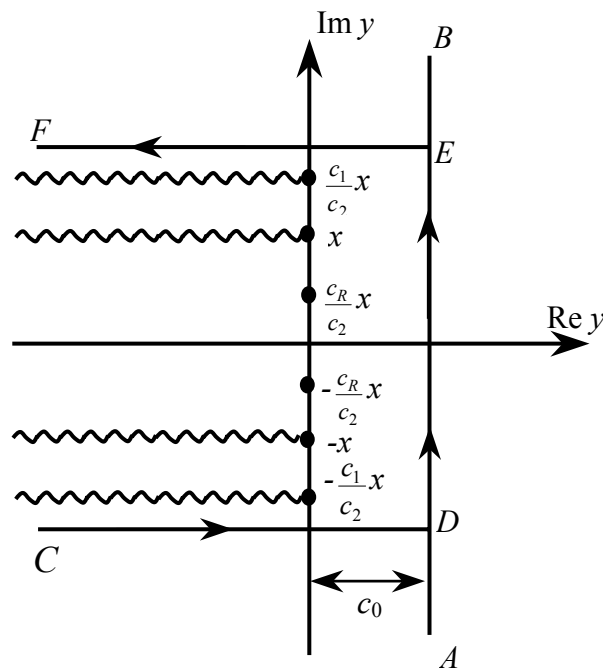
gdzie: W_1 jest całką obliczoną wzdłuż odcinka DE , W_2 jest całką obliczoną wzdłuż odcinka CD , natomiast W_3 jest całką obliczoną wzdłuż odcinka EF .

Uwzględniając własność transformaty $\tilde{W}(y)$ funkcji $W(\tau)$, tj. $\overline{\tilde{W}(y)} = \tilde{W}(\bar{y})$ (kreska oznacza liczbę sprzężoną), całki mogą być przedstawione w następującej postaci

$$W_1 = \frac{1}{\pi} e^{c_0 \tau} \int_0^{\beta} (\cos(\eta \tau) \operatorname{Re}(\tilde{W}(c_0 + i\eta)) - \sin(\eta \tau) \operatorname{Im}(\tilde{W}(c_0 + i\eta))) d\eta, \quad (7)$$

$$W_2 = W_3 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{c_0 \tau} e^{\eta} \left(\sin(\beta \tau) \operatorname{Re}(\tilde{W}(\frac{\eta}{\tau} + i\beta)) + \cos(\beta \tau) \operatorname{Im}(\tilde{W}(\frac{\eta}{\tau} + i\beta)) \right) \frac{d\eta}{\tau}. \quad (8)$$

Rozpatrzony został przypadek gruntu o parametrach: $c_1 = 800$ m/s, $c_2 = 320$ m/s, $\rho = 1600$ kg/m³ (parametry Lamego $\lambda = 0.7$ GPa, $\mu = 0.16$ GPa, współczynnik Poissona $\nu = 0.4$). Prędkość fali Rayleigha $c_R = 300$ m/s. Ponadto przyjęto, że $r_* = 0.3$ m, $P = 50$ kN, $\nu_0 = 5000$ s⁻¹. Na rysunku 3 została pokazana zmiana w czasie normalnego naprężenia $\sigma_{zz}(0,0,t)$ w środku obszaru obciążenia.



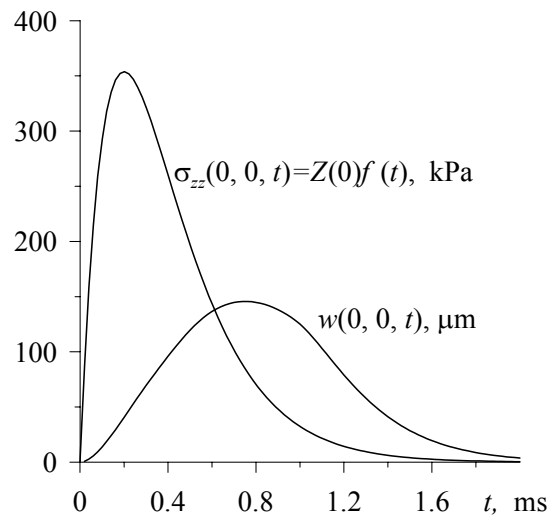
Rys.2. Kontur całkowania odwrotnego przekształcenia Laplace'a i osobliwości funkcji podcałkowych

Parametry występujące w równaniach (7), (8) przyjęto następujące: $c_0 = 5/t$, $\beta = xc_1/c_2 + 5/t$. Przeprowadzono analizę numeryczną przekształcenia odwrotnego Hankela i Laplace'a z uwzględnieniem (7) i (8). Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 3 i rys. 4.

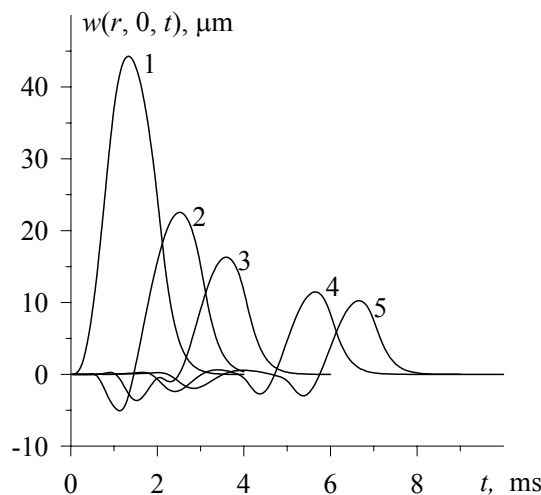
Na rys. 3 przedstawiono zależność bezwymiarowego przemieszczenia w kierunku osi z na powierzchni półprzestrzeni w środku obszaru obciążenia $r_0 = 0$ od czasu. Największą wartość przemieszczenia osiąga przy $t_{\max} = 0.76$ ms.

Wyniki obliczeń podano na rysunku 4 dla różnych punktów obserwacji. Krzywa 1 odpowiada przemieszczeniu punktów powierzchni półprzestrzeni sprężystej na granicy $r_1 = 0.3$ m okręgu obciążenia o promieniu r_* , gdy działa obciążenie udarowe w postaci wymuszenia impulsowego. Największą wartość przemieszczenia osiąga przy $t_{\max} = 1.34$ ms. Krzywa 2 ($r_2 = 0.6$ m) odpowiada przypadkowi, gdy obserwowany punkt znajduje się w odległości dwóch promieni. Największą wartość przemieszczenia osiąga przy $t_{\max} = 2.52$ ms. Krzywa 3 ($r_3 = 0.9$ m) odpowiada przypadkowi, gdy punkt obserwowany znajduje się w odległości trzech promieni. Największą wartość przemieszczenia osiąga przy $t_{\max} = 3.6$ ms. Krzywa 4

($r_4 = 1.5$ m) odpowiada przypadkowi, gdy punkt obserwowany znajduje się w odległości pięć promieni ($t_{\max} = 5.65$ ms). Krzywa 5 ($r_5 = 1.8$ m) odpowiada przypadkowi, gdy punkt obserwowany znajduje się w odległości sześć promieni ($t_{\max} = 6.66$ ms).

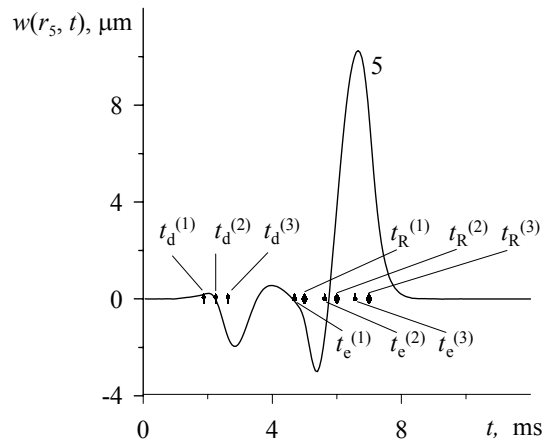


Rys. 3. Zależność przemieszczenia $w(0,0,t)$ i normalnego naprężenia $\sigma_{zz}(0,0,t)$ w kierunku osi z na powierzchni półprzestrzeni od czasu (w środku obszaru obciążenia)



Rys. 4. Zależność przemieszczenia w kierunku osi z na powierzchni półprzestrzeni od czasu w różnych punktach obserwacji. Krzywe 1: $r = r_1$; 2: $r = r_2$; 3: $r = r_3$; 4: $r = r_4$; 5: $r = r_5$

Podczas działania rozpatrzonego obciążenia mamy do czynienia z następującym zjawiskiem. Na przykład, niech punkt obserwacji znajduje się w odległości r_5 metrów (rysunek 5). Zaburzenia nie występują do chwili czasowej $t_d^{(1)} = (r_5 - r_*)/c_1$. W chwili $t_d^{(1)}$ do punktu obserwacji dociera fala dylatacyjna, poruszająca się z prędkością c_1 . Od tej chwili zacznie zmieniać się przemieszczenie. Chwila $t_d^{(2)} = r_5/c_1$ odpowiada przyjsciu fali dylatacyjnej od środka obszaru obciążenia, natomiast chwila $t_d^{(3)} = (r_5 + r_*)/c_1$ odpowiada przyjsciu fali dylatacyjnej od najdalej położonego punktu obszaru obciążenia. W chwili $t_e^{(1)} = (r_5 - r_*)/c_2$ do punktu obserwacji dochodzi fala dystorsyjna, poruszająca się z prędkością c_2 . W chwili $t_R^{(1)} = (r_5 - r_*)/c_R$ do punktu obserwacji dociera fala powierzchniowa typu Rayleigha, poruszająca się z prędkością $c_R = 300$ m/s.

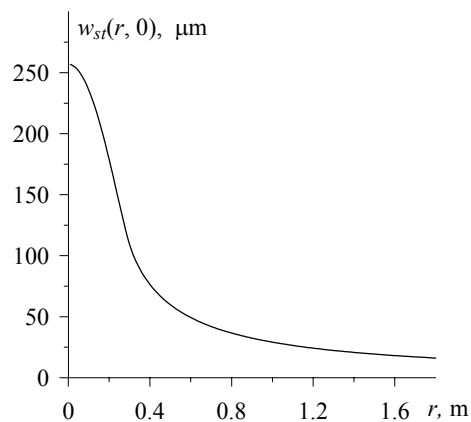


Rys. 5. Zależność przemieszczenia w kierunku osi z na powierzchni półprzestrzeni od czasu w punkcie obserwacji $r = r_5$.

Dla zaburzenia zmieniającego wolno (na przykład przy $v_0 = 10 \text{ s}^{-1}$ czas osiągnięcia największej wartości zaburzenia jest równy $t_{\max} = 0.1 \text{ s}$) może być wykorzystane rozwiązanie quasi-statyczne o postaci

$$w(r, 0, t) = f(t)w_{st}(r, 0), \text{ gdzie } w_{st}(r, 0) = \frac{P}{4\pi\mu r} \frac{1}{1 - (c_2/c_1)^2} \int_0^\infty \hat{Z}(x)J_0(x)dx.$$

Dla rozpatrywanego obciążenia czasza ugięcia $w_{st}(r, 0)$ została przedstawiona na rysunku 6.



Rys. 6. Zależność przemieszczenia w kierunku osi z od promienia na powierzchni półprzestrzeni (czasza ugięcia)

5. Wniosek

Przeprowadzona analiza numeryczna prowadzi do wniosku, że dla rozpatrywanego zaburzenia w skutek interferencji różnych fal na odległości sześciu promieni przemieszczenie w czasie posiada dwa ujemne maksima i jedno maksimum dodatnie. Pierwsze maksimum związane jest z interferencją fal dylatacyjnych, podczas gdy dodatnie maksimum generują wszystkie z wymienionych fal, a w tym i fala typu Rayleigha.

6. Literatura

- [1] ACHENBACH J.D., *Wave propagation in elastic solids*. New York, American Elsevier Publishing Company, 1973
- [2] AWREJCEWICZ J., PYRYEV Yu., *De Saint-Venant Principle and an Impact Load Acting on an Elastic Half Space*. Journal of Sound and Vibration, 2003 (w druku)
- [3] *Dynatest FWD/HWD test Systems*, http://www.dynatest.com/hardware/fwd_hwd.htm
- [4] ERINGEN A.C., SUHUBI E.S., *Elastodynamics. Volume II. Linear Theory*. New York, San Francisco, London, Academic Press, 1975
- [5] *NATO standard for evaluation and reporting strength of airfield pavements*, http://www.aperio.nl/pavement_evaluation.htm
- [6] NOWACKI W., *Teoria sprężystości*. Warszawa, PWN, 1973