



III Konferencja Naukowo – Techniczna

ODPORNOŚĆ UDAROWA KONSTRUKCJI

Jan AWREJCEWICZ, Yuriy PYRYEV

Katedra Automatyki i Biomechaniki Politechniki Łódzkiej,
ul. Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź, tel.: 631-22-25

ZASADA SAINT-VENANTA W ZAGADNIENIACH ELASTOKINETYKI PODCZAS UDARU NA PÓLPRZESTRZEŃ SPRĘŻYSTĄ

Słowa kluczowe: zagadnienie Lamba, zasada Saint-Venanta, fala Rayleigha.

Streszczenie: W pracy rozpatrzono klasyczne osiowosymetryczne zagadnienie Lamba po zadziałaniu udaru w postaci wymuszenia skokowego w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń sprężystą o różnym rozkładzie powierzchniowym na obszarze kołowym. W celu wyznaczenia przemieszczeń i naprężeń w wyżej wspomnianym zagadnieniu osiowosymetrycznym posłużono się transformacją całkową Hankela i Laplace'a. Odwrotne transformaty Hankela i Laplace'a uzyskano na drodze obliczeń numerycznych. Pokazano, że w pewnych odległościach od obszaru zaburzeń odkształcenia i naprężenia wywołane wyżej wspomnianymi i różnymi rozkładami obciążenia w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń sprężystą różnią się nieznacznie po czasie przejścia powierzchniowej fali Rayleigha.

1. WSTĘP

W zagadnieniach elastostatyki zasada de Saint-Venanta sprowadza się do następującego zagadnienia: jeśli układ sił działający na małą część powierzchni ciała sprężystego zastąpić innym, ale statycznie równoważnym układem sił działającym na tę samą część powierzchni, to ta zmiana rozkładu obciążenia powoduje tylko lokalnie istotne zmiany w naprężeniach oraz jej wpływ jest znikomy na odkształcenie i naprężenie w odległościach dużych w porównaniu z liniowymi rozmiarami powierzchni, na której został zmieniony rozkład sił [1,2]. Pojawia się następujące pytanie: czy można w zagadnieniach elastokinetyki podczas udarowego obciążenia wykorzystywać zasadę de Saint-Venanta, i jeśli tak to kiedy? Na tego typu pytania autorzy tej pracy formułują odpowiedź, i w tym celu rozpatrzono klasyczne zagadnienie Lamba.

2. MATEMATYCZNE SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Niech w płaszczyźnie $z=0$ ograniczającej półprzestrzeń sprężystą działa osiowosymetryczne obciążenie w postaci udaru typu wymuszenia skokowego skierowanego w kierunku osi z . Obciążenie to wywołuje w półprzestrzeni stan naprężenia i odkształcenia,

powstają fale podłużnie (dylatacyjne), poprzeczne (dystorsyjne) i powierzchniowe (typu Rayleigha).

Zagadnienie sprowadza się do rozwiązania liniowych równań ruchu we współrzędnych walcowych o postaci

$$(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2)$$

z warunkami brzegowymi

$$\sigma_{rz} = -Z(r)f(t), \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \text{przy } z = 0, \quad u, w \rightarrow 0, \quad \text{przy } z \rightarrow \infty, \quad (3)$$

i początkowymi

$$u = \partial u / \partial t = w = \partial w / \partial t = 0, \quad \text{przy } t < 0, \quad (4)$$

gdzie λ, μ są stałymi Lamégo, ρ oznacza gęstość, $u(r, z), w(r, z)$ są składowymi przemieszczenia odpowiednio w kierunkach r i z , $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}$ są składowymi normalnymi naprężeniami we współrzędnych walcowych, σ_{rz} jest składową styczną naprężenia we współrzędnych walcowych, oraz $H(t) = 1, t > 0; H(t) = 0, t < 0$.

Będziemy zakładać, że zmiana funkcji $f(t)$ w czasie jest typu skokowego

$$f(t) = H(t), \quad \tilde{f}(s) = \mathcal{B}[H(t)] = 1/s,$$

a zmiana obciążenia na powierzchni ma następującą postać

$$Z(r) = \frac{P}{\pi r_0^2} H(r_0 - r), \quad \bar{Z}(k) = \mathcal{B}[Z(r)] = \int_0^{r_0} Z(r) J_0(kr) r dr = \frac{P}{2\pi} \left(2 \frac{J_1(kr_0)}{kr_0} \right).$$

Będziemy zakładać również, że promień obszaru obciążenia r_0 może się zmieniać i nawet dążyć do zera (siła skupiona), ale zawsze zachodzi relacja

$$\lim_{\substack{r_0 \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow \infty}} Z(r) \pi r_0^2 = P, \quad \text{transformacja całkowa Hankela dla siły skupionej } \bar{Z}(k) = \frac{P}{2\pi}$$

3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Dokonyjemy transformacji całkowej Laplace'a i Hankela równań (1) i (2) przy uwzględnieniu jednorodnych warunków początkowych (4). Otrzymujemy liniowe równania różniczkowe ze względu na zmienną z . Rozwiązanie tego układu równań zależy od czterech niewiadomych, które wyznaczamy wykorzystując cztery warunki brzegowe (3). Stosując odwrotną transformację Laplace'a i Hankela, i wprowadzając nowe zmienne całkowania $r > 0$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2\pi\mu r_0 w(r, z, t)/P &= \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} w_0^{LH} \frac{e^{zy}}{y} dy \right) \tilde{Z}(x) x J_0(x) dx, \\ 2\pi\mu r_0 u(r, z, t)/P &= \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} u_0^{LH} \frac{e^{zy}}{y} dy \right) \tilde{Z}(x) x J_1(x) dx, \end{aligned} \quad (5)$$

$$2\pi_0^2 \sigma_{rr}(r, z, t)/P = \frac{1}{\rho^2} \left[\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} \sigma_{rr}^{LH0} \frac{e^{y^2}}{y} dy \right) \hat{Z}(x) x J_0(x) dx + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} \sigma_{rr}^{LH1} \frac{e^{y^2}}{y} dy \right) \hat{Z}(x) x J_1(x) dx \right],$$

gdzie:

$$w_0^{LH} = (\gamma_0 e^{-\frac{\alpha_0 \zeta}{\rho}} - 2x^2 e^{-\frac{\beta_0 \zeta}{\rho}}) \frac{\alpha_0}{\Delta_0}, \quad u_0^{LH} = (\gamma_0 e^{-\frac{\alpha_0 \zeta}{\rho}} - 2\alpha_0 \beta_0 e^{-\frac{\beta_0 \zeta}{\rho}}) \frac{x}{\Delta_0},$$

$$\sigma_{rr}^{LH0} = \left[\gamma_0 \left(2x^2 - \frac{\lambda c_2^2}{\mu c_1^2} y^2 \right) e^{-\frac{\alpha_0 \zeta}{\rho}} - 4\alpha_0 \beta_0 x^2 e^{-\frac{\beta_0 \zeta}{\rho}} \right] \frac{1}{\Delta_0},$$

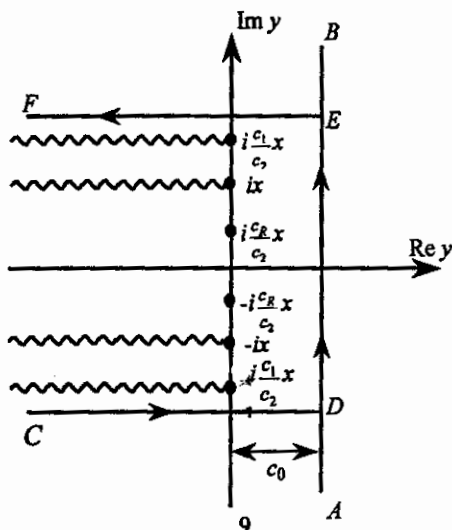
$$\sigma_{rr}^{LH1} = \left[-2\gamma_0 e^{-\frac{\alpha_0 \zeta}{\rho}} + 4\alpha_0 \beta_0 e^{-\frac{\beta_0 \zeta}{\rho}} \right] \frac{x}{\Delta_0},$$

$$\alpha_0 = \sqrt{x^2 + (c_2^2/c_1^2)y^2}, \quad \beta_0 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \gamma_0 = 2x^2 + y^2, \quad \Delta_0 = \gamma_0^2 - 4\alpha_0 \beta_0 x^2,$$

$$\zeta = \frac{z}{r_0}, \quad \rho = \frac{r}{r_0}, \quad \hat{Z}(x) = 2 \frac{J_1(x/\rho)}{x/\rho}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

4. ANALIZA NUMERYCZNA

Biorąc pod uwagę położenia punktów osobliwych funkcji podcałkowych (punkty rozgałęzienia $\pm ix$, $\pm i(c_1/c_2)x$ i bieguny $\pm i(c_R/c_2)x$), kontur całkowania w odwrotnym przekształceniu Laplace'a AB został zamieniony konturem $CDEF$ złożonym z przedziałów DE , CD i EF (patrz rysunek 1), co jest zgodne z twierdzeniem całkowym Cauchy'ego.



Rys.1. Kontur całkowania odwrotnego przekształcenia Laplace'a i osobliwości funkcji podcałkowych

Na przykład

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} \tilde{f}(y) e^{y\tau} dy = J_1 + J_2 + J_3, \quad (6)$$

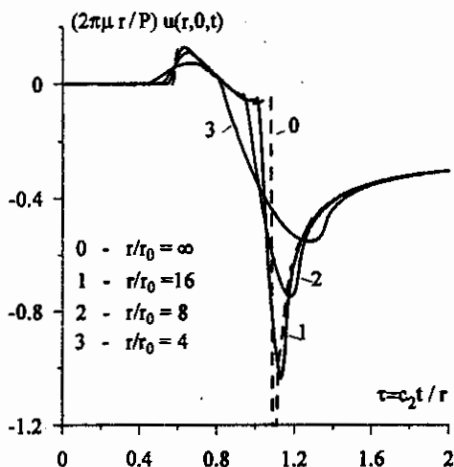
gdzie: J_1 jest całką obliczoną wzdłuż odcinka DE , J_2 jest całką obliczoną wzdłuż odcinka CD , natomiast J_3 jest całką obliczoną wzdłuż odcinka EF .

Uwzględniając własność transformaty $\tilde{f}(y)$ funkcji $f(\tau)$, tj. $\overline{\tilde{f}(y)} = \tilde{f}(\bar{y})$ (kreska oznacza liczbę sprzężoną), całki mogą być przedstawione w następującej postaci

$$J_1 = \frac{1}{\pi} e^{c_0 t} \int_0^\beta (\cos(vt) \operatorname{Re}(\tilde{f}(c_0 + iv)) - \sin(vt) \operatorname{Im}(\tilde{f}(c_0 + iv))) dv, \quad (7)$$

$$J_2 = J_3 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{c_0 t} e^{v'} \left(\sin(\beta t) \operatorname{Re}(\tilde{f}(\frac{v'}{t} + i\beta)) + \cos(\beta t) \operatorname{Im}(\tilde{f}(\frac{v'}{t} + i\beta)) \right) \frac{dv'}{t}. \quad (8)$$

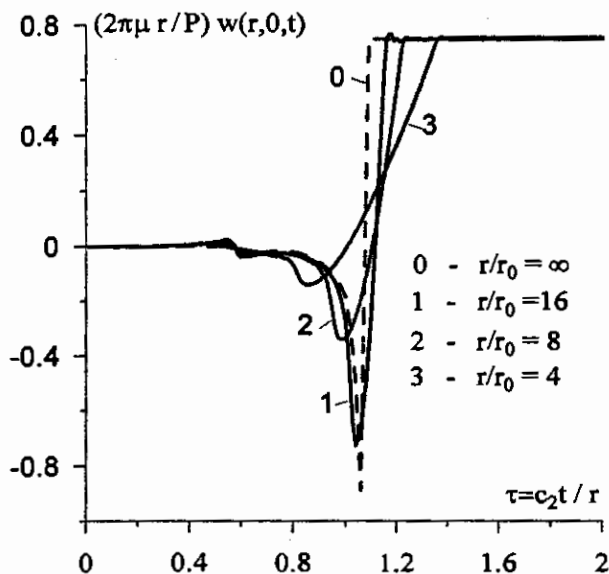
W celu porównania wyników obliczeń ze znanym w literaturze rozwiązaniem zagadnienia Lamba [2, 3] rozpatrzony został przypadek, gdy $\mu = \lambda$ (współczynnik Poissona $\nu = 0.25$). Parametry występujące w równaniach (7),(8) przyjęto następujące: $c_0 = 5/t$, $\beta = xc_1/c_2 + 5/t = \sqrt{3}x + 5/t$. Przeprowadzono analizę numeryczną przekształcenia odwrotnego Hankela i Laplace'a z uwzględnieniem (7) i (8). Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 2-4.



Rys. 2. Zależność przemieszczenia w kierunku promieniowym na powierzchni półprzestrzeni od bezwymiarowego czasu dla różnych wartości promienia r_0 charakteryzującego obszar obciążenia.

Na rys. 2 przedstawiono zależność bezwymiarowego przemieszczenia w kierunku promieniowym na powierzchni półprzestrzeni od czasu bezwymiarowego. Wyniki obliczeń

podano dla różnych wartości bezwymiarowego parametru $\rho = r/r_0$ lub promienia r_0 charakteryzującego obszar obciążenia. Krzywa przerywana odpowiada przemieszczeniu punktów powierzchni półprzestrzeni sprężystej, gdy działa obciążenie udarowe w postaci wymuszenia skokowego typu siły skupionej ($r/r_0 = \infty$). Wyniki te przedstawiono w pracach [3, 4], i pokrywają się one z wynikami uzyskanymi w naszej pracy. Krzywe ciągłe przedstawiają wyniki obliczeń osiowego przemieszczenia punktów powierzchni, gdy działa obciążenie rozłożone równomiernie na całej powierzchni okręgu o promieniu r_0 . Krzywa 1 ($\rho = r/r_0 = 16$) odpowiada przypadkowi, gdy obserwowany punkt znajduje się w odległości szesnastu promieni. Krzywa 2 ($\rho = r/r_0 = 8$) odpowiada przypadkowi, gdy punkt obserwowany znajduje się w odległości ośmiu promieni. Krzywa 3 ($\rho = r/r_0 = 4$) odpowiada przypadkowi, gdy punkt obserwowany znajduje się w odległości czterech promieni. Podczas działania siły skupionej mamy do czynienia z następującym zjawiskiem. Niech punkt obserwacji znajduje się w odległości r metrów. Zaburzenia nie występują do chwili czasowej r/c_1 . W chwili r/c_1 (bezwymiarowy czas $\tau = c_2(r/c_1)/r = c_2/c_1 = \sqrt{3}/3 \approx 0.577$) do punktu obserwacji dociera fala dylatacyjna, poruszająca się z prędkością c_1 . W chwili r/c_2 (bezwymiarowy czas $\tau = c_2(r/c_2)/r = 1$) do punktu obserwacji dochodzi fala dystorsyjna, poruszająca się z prędkością c_2 . W chwili r/c_R (bezwymiarowy czas $\tau = c_2(r/c_R)/r = c_2/c_R = c_2/(c_2(\sqrt{2} - 2/\sqrt{3})) \approx 1/0.919 \approx 1.088$) do punktu obserwacji dochodzi fala powierzchniowa typu Rayleigha, poruszająca się z prędkością $c_R = 0.919 c_2$. Analiza teoretyczna [3, 4] i numeryczna zagadnienia pokazuje, że wskutek działania siły skupionej z prędkością fali Reyleigha pojawia się zaburzenie osobliwe.



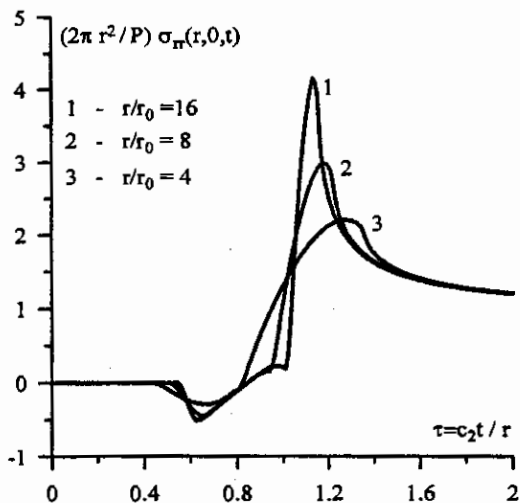
Rys. 3. Zależność przemieszczenia w kierunku osi z na powierzchni półprzestrzeni od czasu bezwymiarowego dla różnych wartości

promienia r_0 charakteryzującego obszar obciążenia.

Jeśli mamy do czynienia z obciążeniem rozłożonym równomiernie na całej powierzchni okręgu o promieniu r_0 (krzywa 3, $r/r_0 = 4$) to daje się zaobserwować następujące zjawisko. Niech punkt obserwacji znajduje się w odległości r metrów. Do chwili czasu $(r-r_0)/c_1$ zaburzenia w ogóle nie występują. W chwili czasowej $(r-r_0)/c_1$ (bezwymiarowy czas $\tau = c_2((r-r_0)/c_1)/r = (1-r_0/r)c_2/c_1 = (3/4)\sqrt{3}/3 = \sqrt{3}/4 \approx 0.433$) przechodzi fala dylatacyjna, poruszająca się z prędkością c_1 . W chwili czasowej $(r-r_0)/c_2$ (bezwymiarowy czas $\tau = c_2((r-r_0)/c_2)/r = 1-r_0/r = 3/4$) przechodzi fala dystorsyjna, poruszająca się z prędkością c_2 . W chwili czasowej $(r-r_0)/c_R$ (bezwymiarowy czas $\tau = c_2((r-r_0)/c_R)/r = 0.75c_2/c_R = c_2/(c_2(\sqrt{2}-2/\sqrt{3})) \approx 0.75/0.919 \approx 0.816$) przechodzi fala powierzchniowa typu Rayleigha, poruszająca się z prędkością $c_R = 0.919c_2$. W chwili czasowej $(r+r_0)/c_R$ (bezwymiarowy czas $\tau = c_2((r+r_0)/c_R)/r = 1.25c_2/c_R = 1.25c_2/(c_2(\sqrt{2}-2/\sqrt{3})) \approx 1.25/0.919 \approx 1.36$) przechodzi ostatnie zaburzenie pochodzące od najbardziej odległego punktu obszaru zaburzonej powierzchni, i poruszające się z prędkością $c_R = 0.919c_2$. Po tej chwili czasowej można przyjąć, że przemieszczenia od rozpatrywanych zaburzeń różną się nieznacznie i z upływem czasu dążą do wartości ustalonej.

Na rys. 3 podano zależność bezwymiarowego przemieszczenia pionowego na powierzchni półprzestrzeni od czasu bezwymiarowego. Wyniki podano dla różnych wartości parametru bezwymiarowego $\rho = r/r_0$ lub promienia r_0 charakteryzującego obszar obciążenia. Krzywa przerywana odpowiada przemieszczeniu punktów powierzchni półprzestrzeni sprężystej, podczas działania obciążenia udarowego w postaci wymuszenia skokowego typu siły skupionej ($r/r_0 = \infty$). Wyniki te podano w pracach [3, 4] i pokrywają się one z wynikami naszych obliczeń. Krzywe ciągłe przedstawiają wyniki obliczeń pionowego przemieszczenia punktów powierzchni, gdy działa obciążenie rozłożone równomiernie na całej powierzchni okręgu o promieniu r_0 . Krzywa 1 ($\rho = r/r_0 = 16$) odpowiada przypadkowi, gdy obserwowany punkt znajduje się w odległości szesnastu promieni. Krzywa 2 ($\rho = r/r_0 = 8$) odpowiada przypadkowi, gdy punkt obserwowany znajduje się w odległości ośmiu promieni. Krzywa 3 ($\rho = r/r_0 = 4$) odpowiada przypadkowi, gdy punkt obserwowany znajduje się w odległości czterech promieni. Podczas działania zaburzenia obraz zjawiska jest taki sam jak i w przypadku opisanym wcześniej.

Na rys. 4 podano zależność bezwymiarowego naprężenia promieniowego na powierzchni półprzestrzeni od czasu bezwymiarowego. Wyniki podano dla różnych wartości bezwymiarowego parametru $\rho = r/r_0$ lub promienia r_0 charakteryzującego obszar obciążenia.



Rys. 4. Zależność normalnego naprężenia w kierunku promieniowym na powierzchni półprzestrzeni od bezwymiarowego czasu dla różnych wartości promienia r_0 charakteryzującego obszar obciążenia.

Krzywe ciągłe przedstawiają wyniki obliczeń promieniowego naprężenia w punktach powierzchni pod działaniem obciążenia rozłożonego równomiernie na całej powierzchni okręgu o promieniu r_0 . Krzywa 1 ($\rho = r/r_0 = 16$) odpowiada przypadkowi, gdy punkt obserwowany znajduje się w odległości szesnastu promieni. Krzywa 2 ($\rho = r/r_0 = 8$) odpowiada przypadkowi, gdy obserwowany punkt znajduje się w odległości ośmiu promieni. Krzywa 3 ($\rho = r/r_0 = 4$) odpowiada przypadkowi, gdy punkt obserwowany znajduje się w odległości czterech promieni. Podczas działania zaburzenia mamy do czynienia z tym samym obrazem w punkcie obserwacyjnym.

Przeprowadzona analiza numeryczna prowadzi do wniosku, że w odległości trzech promieni od środka obszaru zaburzenia odkształcenia i naprężenia wywołane wyżej wspomnianymi i różnymi rozkładami obciążenia w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń sprężystą różnią się nieznacznie po czasie przejścia powierzchniowej fali Rayleigha i można wykorzystywać analityczne rozwiązanie zagadnienia Lamba.

5. WNIOSEK

Zasada Saint-Venanta może być wykorzystana w zagadnieniach elastokinetyki po upływie czasu $t = l/c_R$, gdzie l oznacza odległość od najbardziej odległego punktu obszaru

zaburzonej powierzchni, c_R jest prędkością fali Rayleigha oraz gdy nie pojawiają się fale odbite.

6. LITERATURA

- [1] TIMOSZENKO S., GOODIER J. N.: *Teoria Sprężystości*. Arkady, Warszawa, 1962.
- [2] NOWACKI W.: *Teoria sprężystości*. PWN, Warszawa, 1973.
- [3] ACHENBACH J.D.: *Wave propagation in elastic solids*. American Elsevier Publishing Company, New York 1973.
- [4] ERINGEN A.C., SUHUBI E.S.: *Elastodynamics. Volume II. Linear Theory*. Academic Press, New York, San Francisco, London 1975.

THE SAINT-VENANT PRINCIPLE APPLIED TO ELASTOKINETIC PROBLEMS OF AN IMPACT ACTING OF ELASTIC HALF SPACE

Summary: A classical axially symmetrical Lamb's problem is considered. A unit jump impact applied to a bounded plane of the half space with different force distribution on a circled area is analyzed. First, the Hankel and Laplace integral transformations are used to define the being sought displacements and stresses. The inversed transformations are found using numerical calculations. It is shown that the deformations and stresses differ insignificantly in certain distances from the impact source.