
4th CONFERENCE
on
**DYNAMICAL SYSTEMS -
THEORY AND APPLICATIONS**
Łódź, 8-9 December 1997

INFLUENCE OF DRY FRICTION ON HOMOCLINIC CHAOS

WPLYW TARCIA SUCHEGO NA CHAOS HOMOKLINICZNY

J. Awrejcewicz M. M. Holicke

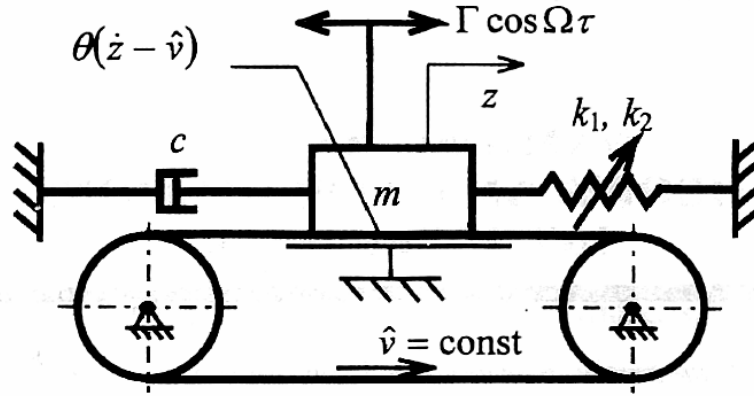
Streszczenie. W pracy zastosowano analityczną metodę Mielnikowa do wyznaczenia parametrów krytycznych oscylatora Duffinga z tarciem suchym, w okolicach których pojawia się chaos. Następnie dokonano analizy wpływu tarcia suchego na dynamikę chaotyczną w funkcji prędkości taśmy, na której leży masa drgająca.

1. Wstęp

W niniejszej pracy rozważane będą drgania oscylatora Duffinga z tarciem suchym. Charakterystyka tarcia opisująca zależność siły (współczynnika) tarcia od prędkości względnej powoduje (dla pewnych wartości parametrów układu) powstawanie drgań samowzbudnych. Zjawisko drgań nieregularnych (chaotycznych) w układach mechanicznych z tarciem było analizowanych przez wielu badaczy. Ograniczymy się tu do wymienienia tylko kilku [1-3, 5]. Większość z prac dotyczyła jednak analizy numerycznej przejścia od ruchu regularnego do nieregularnego oraz wpływu parametrów kontrolnych na dynamikę chaotyczną. Poszukiwanie odpowiedzi chaotycznej odbywało się w dużej mierze w oparciu o przypadek i intuicję naukową. W tej pracy, w odróżnieniu od poprzednich, do wyznaczenia parametrów krytycznych, w okolicy których pojawia się chaos zastosowano analityczną metodę Mielnikowa. Następnie dokonano analizy wpływu parametrów kontrolnych tarcia na dynamikę chaotyczną analizowanego oscylatora Duffinga.

2. Oscylator Duffinga z tarciem suchym

Rozpatrzmy układ dynamiczny przedstawiony na rys. 1. Jest to oscylator Duffinga złożony z masy m posiadającej jeden stopień swobody wzdłuż współrzędnej z oraz sprężyny o sztywności Duffinga charakteryzującej się parametrami k_1, k_2 . Ponadto w układzie występuje tłumienie wiskotyczne o współczynniku c .



Rys. 1. Model fizyczny tłumionego oscylatora Duffinga z tarciem.

Masa m jest wymuszana harmonicznym z częstotliwością Ω i amplitudą Γ . Ponadto leży ona na taśmie, który porusza się ze stałą prędkością \hat{v} . Pomiedzy masą m a taśmą występuje siła tarcia będąca funkcją prędkości względnej trących się ciał. Można ją opisać z wystarczającą z praktycznego punktu widzenia następującą zależnością

$$\theta(\hat{w}) = \theta_0 \text{sign}(\hat{w}) - \hat{\alpha}(\hat{w}) + \hat{\beta}(\hat{w})^3 \quad (1)$$

przy czym $\hat{w} = \frac{dz}{d\tau} - \hat{v}$ jest prędkością względną, natomiast stałe $\theta_0, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$ dobierane są doświadczalnie. Równanie ruchu rozpatrywanego układu jest następujące

$$m \frac{d^2 z}{d\tau^2} - k_1 z + k_2 z^3 = \varepsilon \left[\Gamma \cos \Omega \tau - \theta(\hat{w}) - c \frac{dz}{d\tau} \right] \quad (2)$$

W równaniu (2) założono, że tłumienie wiskotyczne, siła tarcia oraz amplituda wymuszenia są relatywnie małe i stanowią zaburzenie układu. Dla podkreślenia tego faktu wprowadzono formalnie mały parametr ε . Równanie (2) można zapisać w bezwymiarowej postaci

$$\ddot{x} - ax + x^3 = \varepsilon [\gamma \cos t - T(w) - \delta \dot{x}] \quad (3)$$

gdzie

$$T(w) = T_0 \text{sign}(w) - \alpha(w) + \beta(w)^3 \quad (4)$$

przy czym zastosowano oznaczenia: $x = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{k_2}{m}} z$, $t = \Omega \tau$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}$, $a = \frac{k_1}{\Omega^2 m}$,

$$\gamma = \frac{\Gamma}{\Omega^3} \sqrt{\frac{k_2}{m^3}}, \quad \delta = \frac{c}{m\Omega}, \quad T_0 = \frac{\theta_0}{\Omega^3} \sqrt{\frac{k_2}{m^3}}, \quad \alpha = \frac{\hat{\alpha}}{m\Omega}, \quad \beta = \frac{\hat{\beta}}{k_2} \Omega^3, \quad v_* = \frac{1}{\Omega^2} \sqrt{\frac{k_2}{m}} \hat{v}, \quad w = \dot{x} - v_*$$

Równanie (3) można sprowadzić do postaci normalnej

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= ax - x^3 + \varepsilon [\gamma \cos t - T(v - v_*) - \delta v] \end{aligned} \quad (5)$$

Dla $\varepsilon = 0$ posiada ono orbitę homokliniczną

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \pm \sqrt{2a} \operatorname{sech} \sqrt{at} \\ v_0(t) &= \pm a \sqrt{2} \operatorname{sech} \sqrt{at} \tanh \sqrt{at} \end{aligned} \quad (6)$$

Do wyznaczenia kryterium chaosu w przestrzeni parametrów układu zostanie zastosowana metoda Mielnikowa [4]. Tzw. funkcja Mielnikowa dla układu (5) jest równa

$$\begin{aligned}
M(t_0) = & \int_{-\infty}^{\infty} \gamma v_0(\tau) \cos(\tau + t_0) d\tau - T_0 \int_{-\infty}^{\infty} v_0(\tau) \operatorname{sign}[v_0(\tau) - v_*] d\tau + \\
& - \beta \int_{-\infty}^{\infty} v_0^4(\tau) d\tau + 3\beta v_* \int_{-\infty}^{\infty} v_0^3(\tau) d\tau + \\
& + (\alpha - 3\beta v_*^2 - \delta) \int_{-\infty}^{\infty} v_0^2(\tau) d\tau - (\alpha - \beta v_*^2) v_* \int_{-\infty}^{\infty} v_0(\tau) d\tau
\end{aligned} \quad (7)$$

Wykorzystując drugie równanie (6) w (7) możemy napisać

$$\begin{aligned}
M(t_0) = & -a\sqrt{2}\gamma \sin t_0 \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sech}\sqrt{a}\tau \tanh\sqrt{a}\tau \sin \tau) d\tau - T_0 a \sqrt{2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}\sqrt{a}\tau \tanh\sqrt{a}\tau d\tau \times \right. \\
& \times \operatorname{sign}(\operatorname{sech}\sqrt{a}\tau \tanh\sqrt{a}\tau - v_*) \left. \right\} d\tau - 4\beta a^4 \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sech}\sqrt{a}\tau \tanh\sqrt{a}\tau)^4 d\tau + \\
& + 6\sqrt{2}\beta v_* a^3 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^3\sqrt{a}\tau \tanh^3\sqrt{a}\tau d\tau + 2(\alpha - 3\beta v_*^2 - \delta) a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2\sqrt{a}\tau \tanh^2\sqrt{a}\tau d\tau + \\
& + \sqrt{2}(\alpha - \beta v_*^2) v_* a \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}\sqrt{a}\tau \tanh\sqrt{a}\tau d\tau
\end{aligned} \quad (8)$$

Po wykonaniu obliczeń ostatecznie otrzymamy

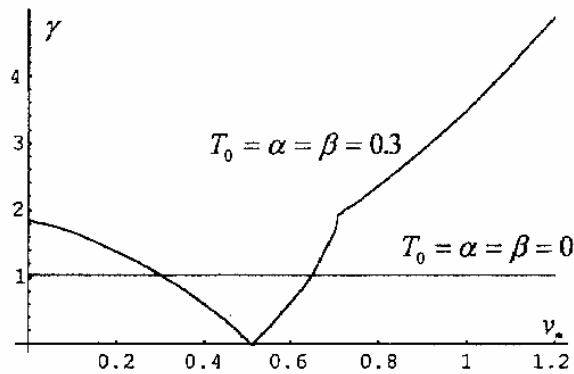
$$\begin{aligned}
M(t_0) = & -\pi\gamma\sqrt{2} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\right) \sin t_0 - \frac{16}{35}\beta \frac{a^4}{\sqrt{a}} + \frac{4}{3}(\alpha - 3\beta v_*^2 - \delta) \frac{a^2}{\sqrt{a}} + \\
& + \begin{cases} 2T_0\sqrt{2}a \left[\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{v_*^2}{2a^2}}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{v_*^2}{2a^2}}} \right] & \text{dla } v_* < \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ 0 & \text{dla } v_* \geq \frac{\sqrt{2}}{2}a \end{cases} \quad (9)
\end{aligned}$$

Warunek przecięcia poprzecznego rozmaitości stabilnej i niestabilnej oraz ruchów chaotycznych określa wzór:

$$\begin{aligned}
\pi\gamma \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\right) > & \left| -\frac{16}{35}\beta \frac{a^4}{\sqrt{2a}} + \frac{4}{3}(\alpha - 3\beta v_*^2 - \delta) \frac{a^2}{\sqrt{2a}} + \right. \\
& + \begin{cases} 2T_0 a \left[\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{v_*^2}{2a^2}}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{v_*^2}{2a^2}}} \right] & \text{dla } v_* < \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ 0 & \text{dla } v_* \geq \frac{\sqrt{2}}{2}a \end{cases} \quad (10)
\end{aligned}$$

3. Analiza wpływu tarcia na chaos i wnioski

Na rys. 2 przedstawione zostały w przestrzeni parametrów (γ, v_*) dwie linie graniczne: jedna dla układu bez tarcia ($T_0 = \alpha = \beta = 0$) oraz druga dla układu z tarciem suchym o parametrach ($T_0 = \alpha = \beta = 0.3$).



Rys. 2. Wpływ tarcia suchego na chaos homokliniczny w przestrzeni parametrów (γ, v_*) dla $\delta = 0.3$, $a = 1$.

Analiza rys. 2 pozwala dojść do wniosku, że dla małych wartości bezwymiarowej prędkości przesuwu taśmy v_* występowanie dyssypacji energii poprzez tarcie suche wpływa „stabilizująco” na układ. Do wystąpienia chaosu homoklinicznego koniecznym jest przyłożenie zaburzenia o większej amplitudzie bezwymiarowej γ . W zakresie średnich wartości prędkości v_* występuje zjawisko o odwrotnym charakterze. Uwzględnienie w układzie tarcia suchego spowoduje wystąpienie ruchów nieregularnych (chaotycznych) już przy mniejszej amplitudzie wymuszenia. Dalsze zwiększenie prędkości przesuwu taśmy powoduje powrót do sytuacji wyjściowej. Tarcie ma ponownie charakter „opóźniający” występowanie chaosu homoklinicznego.

4. Literatura

1. Awrejcewicz, J., Chaotic motion in a nonlinear oscillator with friction, *KSME Journal* 2(22), 104-109 (1988)
2. Awrejcewicz, J., Holicke M. M., Melnikov's method and stick-slip chaotic oscillations in very weakly forced mechanical systems, *Int. J. Bifurcation and Chaos* (to appear).
3. Galvanetto, U., Bishop, R. S. & Briseghella, L., Mechanical stick-slip vibration, *Int. J. Bifurcation and Chaos* 5(3), 637-651 (1995)
4. Melnikov, V. K., On the stability of the center for time periodic perturbations, *Trans. Moscow Math. Soc.* 12, 1-56 (1963).
5. Popp, K. & Stelzer, P., Stick-slip vibrations and chaos, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 332, 89-105 (1990).

INFLUENCE OF DRY FRICTION ON HOMOCLINIC CHAOS

Summary

In this work the Melnikov analytical method is applied to the Duffing type oscillator with friction to predict a chaotic behaviour. The vibrating mass lies on a moving belt and an influence of its velocity on chaos is investigated.

Prof. dr hab. inż. J. Awrejcewicz, mgr inż. M. M. Holicke,
Politechnika Łódzka, Wydział Mechaniczny, Zakład Automatyki i Biomechaniki (I-10),
ul. Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź, tel.: (4842) 312225,
e-mail: mholicke@ck-sg.p.lodz.pl