



## Wykrywanie orbit chaotycznych w układzie oscylatora Duffinga z tarciem suchym przy pomocy metody Mielnikowa

J. Awrejcewicz & M. M. Holicke  
Politechnika Łódzka, Zakład Automatyki i Biomechaniki (I-10),  
ul. Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź,  
e-mail: mholicke@ck-sg.p.lodz.pl

### Streszczenie

W pracy przy wykorzystaniu metody Mielnikowa określono zbiór parametrów krytycznych przejścia od ruchu okresowego do chaotycznego w układzie oscylatora Duffinga z tarciem suchym. Rezultaty otrzymane za pomocą wspomnianej wyżej metody zostały zweryfikowane przy pomocy symulacji numerycznej z wykorzystaniem pakietu MATLAB-SIMULINK. Opracowano schematy blokowe pozwalające na otrzymanie odwzorowania Poincarego dla układów nieautonomicznych, które jest jednym z podstawowych narzędzi służących do wykrywania ruchów chaotycznych. Podczas analizy scenariusza przejścia do ruchu chaotycznego wykryto, że dla małych wartości siły (współczynnika) tarcia i amplitudy wymuszenia, ich stosunek na granicy pojawienia się chaosu homoklinicznego jest wartością stałą, niezależną od wartości parametrów układu.

Słowa kluczowe: dynamika nieliniowa, chaos homokliniczny, mapy Poincarego, symulacje numeryczne, MATLAB-SIMULINK, metoda Mielnikowa.

## 1. Wstęp

Powszechnie wiadomo, że tarcie powoduje opory ruchu i straty energii w układach dynamicznych. Problematyka modelowania tarcia i jego wpływu na zachowanie układów dynamicznych od dawna przyciąga uwagę wielu badaczy [1-10]. Obecnie można wyróżnić dwa trendy związane z modelowaniem zjawisk tarcia. Jeden z nich dotyczy przyjęcia prostych zależności funkcyjnych w oparciu o model Coulomba, natomiast drugi jest bardziej subtelny i uwzględnia mikrokształty powierzchni trących się ciał, a nawet geometrię ułożenia atomów. Ostatnio obserwuje się koncentrację badań na dokładnym modelowaniu normalnych i stycznych odkształceń ciał biorących udział w procesie tarcia, poprzez tworzenie odpowiednich związków konstytutywnych [11, 12].

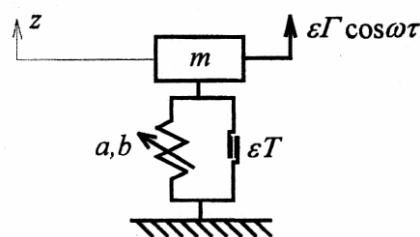
Z drugiej strony w literaturze daje się zauważyć znaczny wzrost prac dotyczących ruchów chaotycznych w układach dynamicznych [13-16]. Spośród tych prac można wyodrębnić podzbiór związany z analizą ruchów chaotycznych w układach mechanicznych z tarcie [17-20]. Wspomniane wyżej prace koncentrują się na wykrywaniu i analizie ruchów chaotycznych przy użyciu metod numerycznych. W odróżnieniu od nich w tej pracy pokazano, że stosując analityczną metodę Mielnikowa [11, 12] można określić zbiór parametrów krytycznych analizowanego oscylatora Duffinga z tarcie suchym, w okolicach których pojawia się ruch chaotyczny. Analizę chaosu przeprowadzono przy użyciu pakietu MATLAB-Simulink.

## 2. Badany układ

Model fizyczny wymuszanego harmonicznie oscylatora Duffinga z dyssypacją energii w postaci tarcia suchego został przedstawiony na rys. 1. Jego ruch jest opisany równaniem różniczkowym drugiego rzędu

$$m \frac{d^2 z}{d\tau^2} - az + bz^3 = \varepsilon \Gamma \cos \omega \tau - \varepsilon T \operatorname{sign} \frac{dz}{d\tau} \quad (1)$$

przy czym  $m$  oznacza masę, która posiada jeden stopień swobody wzdłuż współrzędnej  $z$ . Współczynniki  $a, b > 0$  charakteryzują element sprężysty, natomiast  $T$  oznacza siłę tarcia. Cały układ jest wymuszany siłą harmoniczną o amplitudzie  $\Gamma$  i częstotliwości  $\omega$ .



Rys. 1. Model fizyczny oscylatora Duffinga z tarcie suchym.

Założono, że wielkość amplitudy wymuszenia oraz siły tarcia są niewielkie. Dla uwidocznienia tego faktu w równaniu ruchu wprowadzony został w sposób formalny mały parametr  $\varepsilon \geq 0$ . Równanie (1) można zapisać w postaci bezwymiarowej

$$\ddot{x} - \mu x + x^3 = \varepsilon \gamma \cos t - \varepsilon \delta \operatorname{sign} \dot{x} \quad (2)$$

po przyjęciu oznaczeń:  $x = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{b}{m}} z$ ,  $t = \omega \tau$ ,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a = \frac{k_1}{\Omega^2 m}, \quad \gamma = \frac{\Gamma}{\omega^3} \sqrt{\frac{b}{m^3}},$$

$\delta = \frac{T}{\omega^3} \sqrt{\frac{b}{m^3}}$ . Z kolei równanie (2) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \mu x - x^3 + \varepsilon [\gamma \cos t - \delta \operatorname{sign} v] \end{aligned} \quad (3)$$

Układ równań (3) dla  $\varepsilon = 0$  posiada Hamiltonian określony wzorem

$$H = \frac{1}{2} \left( v^2 - \mu x^2 + \frac{x^4}{2} \right) \quad (4)$$

Dla  $\mu > 0$  mamy trzy położenia równowagi (trzy punkty stałe): dwa stabilne o współrzędnych fazowych  $(\pm \sqrt{\mu}, 0)$  oraz jeden niestabilny w początku układu współrzędnych z orbitą homokliniczną będącą rozwiązaniem równania

$$\frac{dx}{dt} = x \sqrt{\mu - \frac{x^2}{2}} = \sqrt{\mu} x \sqrt{1 - \frac{x^2}{2\mu}} \quad (5)$$

daną w postaci parametrycznej za pomocą wzorów

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \pm\sqrt{2\mu} \operatorname{sech}\sqrt{\mu}t \\ v_0(t) &= \mu\sqrt{2} \operatorname{sech}\sqrt{\mu}t \tanh\sqrt{\mu}t \end{aligned} \quad (6)$$

Funkcja Mielnikowa [11, 12] dla układu (3) opisana jest zależnością

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \gamma v_0(t-t_0) \cos t + \delta v_0(t-t_0) \operatorname{sign}[v_0(t-t_0)] \right\} dt \quad (7)$$

Wykorzystując zależność  $v_0 \operatorname{sign} v_0 = v_0 \frac{|v_0|}{v_0} = |v_0|$ , podstawienie  $\tau = t - t_0$  oraz

drugie równanie (6) w (7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \mu\sqrt{2}\gamma \sin t_0 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left( \operatorname{sech}\sqrt{\mu}\tau \tanh\sqrt{\mu}\tau \sin \tau \right) d\tau + \\ &+ \mu\sqrt{2}\delta \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}\sqrt{\mu}\tau \tanh\sqrt{\mu}\tau |d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

Druga całka z uwagi na nieparzystość funkcji  $\operatorname{sech}\sqrt{\mu}\tau \tanh\sqrt{\mu}\tau$  jest równa

$$\begin{aligned} \mu\sqrt{2}\delta \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}\sqrt{\mu}\tau \tanh\sqrt{\mu}\tau |d\tau &= \\ &= 2\mu\sqrt{2}\delta \int_0^{\infty} \operatorname{sech}\sqrt{\mu}\tau \tanh\sqrt{\mu}\tau d\tau = \\ &= 2\delta\sqrt{2\mu} \end{aligned}$$

Pierwsza całka może być obliczona za pomocą residuów i wynosi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \operatorname{sech}\sqrt{\mu}\tau \tanh\sqrt{\mu}\tau \sin \tau \right) d\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Stąd ostatecznie otrzymujemy

$$M(t_0) = \pi\gamma\sqrt{2\mu} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin t_0 + 2\delta\sqrt{2\mu} \quad (9)$$

Funkcja Mielnikowa posiada jednokrotne pierwiastki, gdy spełniony jest warunek

$$\gamma > \gamma_g = \frac{2\delta}{\pi} \operatorname{cosh}\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (10)$$

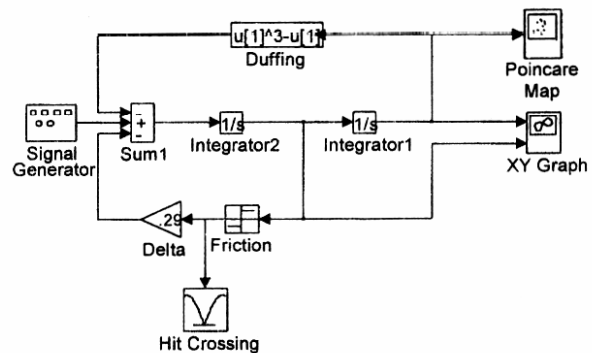
dla dowolnego  $\mu > 0$ . Po przekształceniu (10) otrzymujemy fundamentalny rezultat tej pracy

$$\frac{\gamma_g}{\delta_g} = \frac{2}{\pi} \operatorname{cosh}\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 1.597... \quad (11)$$

Otrzymana liczba jest wartością charakterystyczną dla rozpatrywanego układu (przy założeniu niewielkiej wartości siły tarcia oraz amplitudy wymuszenia) niezależną od parametrów opisujących układ.

### 3. Schematy blokowe

Na rys. 2 przedstawiony został schemat blokowy rozpatrywanego układu zbudowany przy pomocy pakietu MATLAB-SIMULINK for Windows firmy MathWorks. Inc.

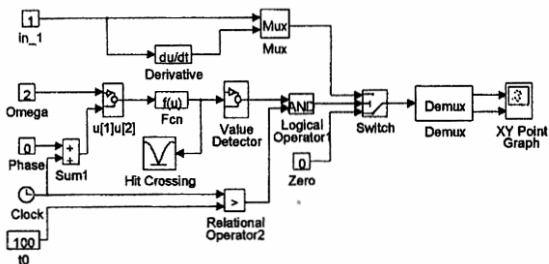


Rys. 2. Schemat blokowy analizowanego układu.

Do jego budowy zostały użyte między innymi następujące standardowe bloki:

1. „Signal Generator” realizujący wymuszenie w postaci sinusoidalnie zmiennej fali o zadanej amplitudzie i częstotliwości;
2. „Duffing” reprezentujący element restytucyjny o sztywności Duffinga;
3. „XY Graph”, który pozwala na monitoring i zapis dwuwymiarowego portretu fazowego odpowiadającego ruchowi rozpatrywanego oscylatora;
4. „Integrator”, na wyjściu którego jest generowany sygnał otrzymany przez scałkowanie sygnału wejściowego. Służy on w tym przypadku dwukrotnie: do obliczenia prędkości na podstawie znanego przebiegu przyspieszenia oraz uzyskania przemieszczenia na podstawie prędkości;
5. „Friction” realizujący zarys charakterystyki tarcia;
6. „Sumator” pozwalający na obliczenie sumy dwu lub większej liczby sygnałów oraz blok nie wchodzący w skład pakietu MATLAB-SIMULINK;

„Mapa Pioncarego” pozwalający na otrzymanie mapy Pioncarego dla układów nieautonomicznych, która jest obrazem stroboskopowym wykresu fazowego w chwilach wzajemnie oddalonych o okres wymuszenia. Tego rodzaju mapy pozwalają na stwierdzenie występowanie ruchu nieregularnego (chaotycznego) analogicznie jak tradycyjne mapy Pioncarego, lecz są znacznie prostsze do realizacji komputerowej. Schemat blokowy takiej mapy został przedstawiony na rys. 3. Posiada on jedno wejście „in\_1”, na które jest podawany sygnał analizowanego przebiegu w czasie. Blok „Phase” pozwala na określenie momentu w wymiarze czasowym, w którym jest sporządzana mapa. Podanie wartości „t0” umożliwi określenie okresu przejściowego, po którym rozpoczęte zostanie rysowanie mapy Pioncarego. Wielkość „omega” jest częstością wymuszenia przyłożonego do układu. Zastosowanie bloku „Hit Crossing” pozwala na zwiększenie dokładności obliczeń poprzez dodatkowe automatyczne sterowanie wielkością kroku obliczeń w newralgicznych punktach obliczeń.



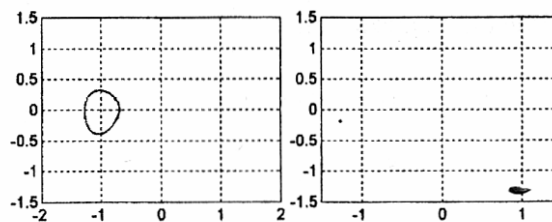
Rys. 3. Blok „Mapa Pioncarego”.

Cały układ jest połączony zgodnie z zasadami pakietu MATLAB-SIMULINK, co pozwala na symulację komputerową ruchu rozpatrywanego układu. Jako wyniki obliczeń otrzymujemy wykresy fazowe oraz mapy Pioncarego.

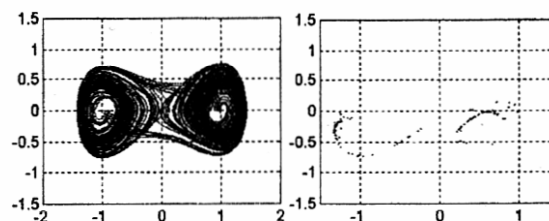
#### 4. Symulacje numeryczne

W celu weryfikacji otrzymanych rezultatów przeprowadzone zostały symulacje komputerowe z wykorzystaniem pakietu MATLAB-SIMULINK dla wybranych wartości parametrów. Podstawiając dowolną wartość  $\mu > 0$  oraz  $\delta = 0.2$  do (10)

otrzymamy wartość graniczną  $\gamma_g \approx 0.319$ , powyżej której rozpatrywany układ wykazuje dynamikę chaotyczną. Przykładowe trajektorie na płaszczyźnie fazowej oraz odpowiadające im mapy Pioncarego ilustrujące powyższe zależności przedstawiono na rys. 4 oraz rys. 5.



Rys. 4. Trajektorja fazowa oraz mapa Pioncarego dla  $\delta = 0.2$ ,  $\mu = 1$  i  $\gamma_g > \gamma = 0.3$ .



Rys. 5. Trajektorja fazowa oraz mapa Pioncarego dla  $\delta = 0.2$ ,  $\mu = 1$  i  $\gamma_g < \gamma = 0.33$ .

Zgodnie z warunkiem (10) poniżej wartości granicznej amplitudy  $\gamma_g$  układ porusza się ruchem okresowym, który jest przedstawiony na rys. 4. Dla amplitudy wymuszenia większej niż jej wartość graniczna pojawiły się ruchy nieregularne (chaotyczne), co jest przedstawione na rys. 5. Mapa Pioncarego w tym przypadku przedstawia atraktor o strukturze fraktalnej.

#### 5. Podsumowanie

Analityczna metoda Mielnikowa została zastosowana do układu drgającego Duffinga z tarcie suchym. W rezultacie otrzymano oryginalny wynik, że dla małych wartości siły (współczynnika) tarcia i amplitudy wymuszenia, ich stosunek na granicy pojawienia się chaosu homoklinicznego jest wartością stałą, niezależną od wartości parametrów układu. Symulacje numeryczne przeprowadzone w oparciu o pakiet MATLAB-SIMULINK potwierdziły otrzymany analitycznie rezultat.

#### 6. Literatura

1. Stoker, J. J. [1950] *Nonlinear Vibrations* (Interscience Publishers, New York).

2. Den Hartog, J. P. [1956] *Mechanical Vibrations* (McGraw - Hill Book Company, New York).
3. Kauderer, H. [1958] *Nonlinear Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin).
4. Minorsky, N. [1962] *Nonlinear Oscillations* (Van Nostrand Company Inc., Princeton).
5. Andronov, A. A., Vitt, A. A. & Khaikin, S. E. [1966] *Theory of oscillations* (Pergamon Press).
6. Kaliski, S. [1966] *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.
7. Magnus, K. [1976] *Vibrations* (B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart).
8. Hagedorn, P. [1978] *Oscillations* (Akademische Verlagsanstalt, Wreibaden).
9. Pfeiffer, F. [1992] *Introduction to dynamics* (B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart).
10. Awrejcewicz, J. [1996] *Drgania deterministyczne układów dyskretnych* (WNT, Warszawa).
11. Oden, J. T. & Martins, J. C. [1985] "Models and computational methods for dynamic friction phenomena", *Comp. Meth. App. Mech. Eng.* **52**, 527-634.
12. Martins, J. C., Oden, J. T., Simoes, F. M. [1990] "A study of static and kinetic friction", *International Journal of Engineering Science* **28**(1), 29-92.
13. Awrejcewicz, J. [1989] *Bifurcation and Chaos in Simple Dynamical Systems* (Word Scientific, Singapore).
14. Awrejcewicz, J. [1991] *Bifurcation and Chaos in Coupled Oscillators* (Word Scientific, Singapore).
15. Awrejcewicz, J. [1995] *Bifurcation and Chaos: Theory and Applications* (Springer Verlag, Berlin).
16. Awrejcewicz, J. [1995] *Nonlinear Dynamics: New Theoretical and Applied Results*. (Akademie Verlag, Berlin).
17. Popp, K. & Stelzer, P. [1990] "Stick-slip vibrations and chaos", *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **332**, 89-105.
18. Popp, K., [1991] "Chaotic motion of an oscillator with friction and simultaneous self and external excitations", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics ZAMM* **4**, T71-T74.
19. Stelzer, P. [1992] "Nonlinear vibrations of structures induced by dry friction", *Nonlinear Dynamics* **3**, 329-345.
20. Awrejcewicz, J. & Delfs, J. [1990] "Dynamics of a self-excited stick-slip oscillator with two degrees of freedom. Part I and Part II", *European J. Mech. A/Sol.* **9**(4), 269-282 and 397-418.
21. Wiggins, S. [1990] *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (Springer Verlag, New York).
22. Yagasaki, K. [1992] "Chaotic dynamics of quasiperiodically forced oscillators detected by Melnikov's method", *SIAM J. Math. Anal.*, **23**, 1230-1254.

◇