

**FLATTER I DRGANIA NIEREGULARNE CIENKIEJ PŁYTY PROSTOKĄTNEJ  
PODDANEJ DZIAŁANIU SIŁY AERODYNAMICZNEJ**

JERZY MROZOWSKI, JAN AWREICEWICZ

*W pracy przedstawiono analizę jakościową drgań płyty prostokątnej znajdującej się pod działaniem siły aerodynamicznej. Na drodze analitycznej określono próg pojawienia się samowzbudnych drgań okresowych typu flutter. Za pomocą symulacji numerycznej potwierdzono istnienie tego progu, a ponadto stwierdzono możliwość pojawienia się złożonych drgań nieregularnych (chaotycznych) w wyniku kaskady bifurkacji podharmonicznych.*

Oznaczenia:

$a$	-	długość płyty,
$A_1$	-	bezwymiarowa amplituda drgań giętnych,
$A_2$	-	bezwymiarowa amplituda drgań skrętnych,
$b$	-	szerokość płyty,
$h$	-	grubość płyty,
$m$	-	masa przypadająca na jednostkę powierzchni płyty,
$m_1$	-	masa skupiona,
$M$	-	liczba Macha,
$N_x, N_y, N_{xy}$	-	blonowe siły normalne i blonowa siła styczna, przypadające na jednostkę długości przekroju poprzecznego,

$q$	-	liczba modalna ( $=n\pi/a$ ),
$t$	-	czas,
$\tau$	-	czas bezwymiarowy,
$U$	-	prędkość przepływu powietrza,
$x, y, z$	-	współrzędne prostokątnego kartezjańskiego układu współrzędnych,
$\beta$	-	stosunek masy skupionej do całkowitej masy płyty ( $=m_1/abm$ ),
$\gamma$	-	bezwymiarowy parametr związany z prędkością strumienia powietrza,
$\delta(x-x_0, y-y_0)$	-	delta Diraca w punkcie $(x_0, y_0)$ ,
$\rho$	-	masa właściwa powietrza,
$(\dot{\quad})$	-	pierwsza pochodna względem czasu bezwymiarowego,
$(\ddot{\quad})$	-	druga pochodna względem czasu bezwymiarowego.

## 1. Wstęp

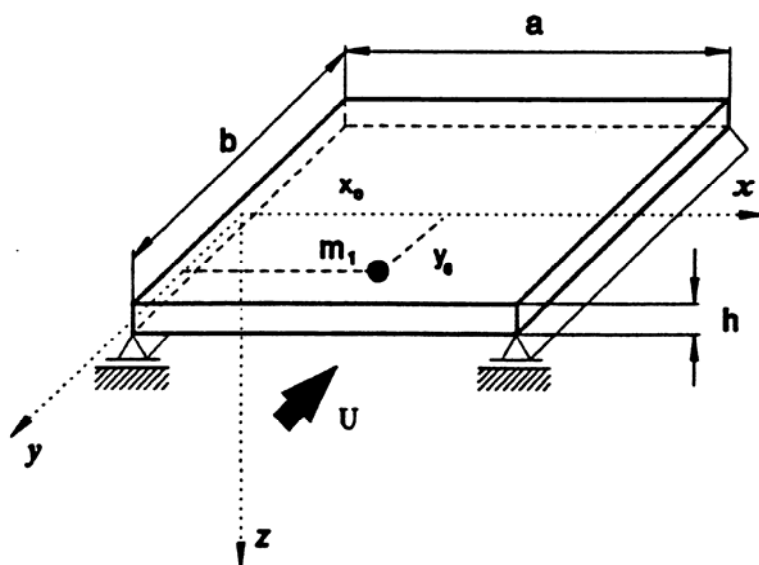
Aerosprężystość, a szczególnie aerosprężystość nieliniowa, jako dziedzina łącząca w sobie klasyczne obszary mechaniki płynów i mechaniki ciała stałego, jest bogatym źródłem zagadnień związanych z cyklami granicznymi i niestacnością dynamiczną. Siły aerosprężyste, działając na struktury sprężyste, których ruch na zasadzie sprzężenia zwrotnego modyfikuje te siły, mogą powodować złożone i różnorodne zachowania dynamiczne tych struktur. Przykładem takich zachowań może być ruch płyty pod działaniem strumienia gazu. Zagadnienie to było przedmiotem wielu prac teoretycznych i doświadczalnych m.in. [2],[3],[4].

Przedmiotem niniejszej pracy jest cienka płyta prostokątna z masą skupioną poddana działaniu siły aerodynamicznej. Płyta taka stanowić może uproszczony model dla pewnych zagadnień spotykanych w przemyśle lotniczym i budownictwie lądowym. Główny nacisk w analizie zachowań dynamicznych położony został na śledzenie jakościowych zmian w zachowaniu układu towarzyszących zmianie wybranych parametrów kontrolnych.

## 2. Model układu

### 2.1. Model fizyczny

Do badań przyjęto model fizyczny w postaci jednorodnej, długiej ( $a \gg b$ ), cienkiej płyty prostokątnej o wymiarach  $a \times b \times h$ , podpartej swobodnie na brzegach  $x=0, a$ . W punkcie  $(x_0, y_0)$  umieszczona jest masa skupiona  $m_1$ . Na płytę działa strumień powietrza o prędkości  $U$ , płynący równoległe do osi  $y$ . Prostokątny kartezjański układ współrzędnych przyjęty został w ten sposób, że osie  $x$  i  $y$  leżą w płaszczyźnie środkowej nieodkształconej płyty (rys.1.).



Rys.1. Model badanego układu.

## 2.2. Model matematyczny

Ruch przedstawionej wyżej płyty opisany jest równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m_1 \delta(x-x_0, y-y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho U^2}{M} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{U} \frac{\partial w}{\partial t} \right) = 0 \quad (1)$$

Przy przyjęciu rozwiązania w postaci:

$$w = a_1 \sin(qx) + a_2 y \sin(qx) \quad (2)$$

gdzie  $q = n\pi/a$ ,  $n=1,2,\dots$ , tzn. przy założeniu zginania i skręcania płyty oraz po dyskretyzacji układu metodą Galerkin, równanie (1) sprowadza się do dwóch równań różniczkowych zwyczajnych postaci:

$$\begin{cases} \bar{A}_1 + \beta_1 \bar{A}_2 + \varepsilon \bar{A}_1 + A_1 + \gamma A_2 = 0 \\ \alpha \bar{A}_2 + \beta_2 \bar{A}_1 + \varepsilon \bar{A}_2 + A_2 + \eta A_2^3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

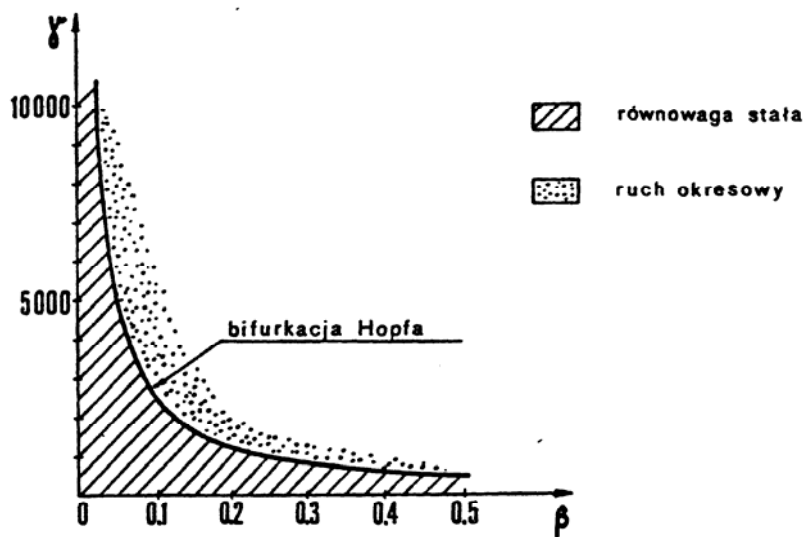
Bezwymiarowe współczynniki równania (3) są funkcjami parametrów fizycznych i geometrycznych płyty, prędkości  $U$  strumienia powietrza oraz liczby modalnej  $q$  w przyjętej postaci rozwiązania.

### 3. Drgania okresowe typu flutter

Spośród parametrów opisujących układ do analizy wybrano dwa bezwymiarowe *parametry kontrolne*:  $\beta$  - związany z masą skupioną  $m_1$  oraz  $\gamma$  - zawierający prędkość przepływu powietrza. W celu określenia progu pojawienia się drgań okresowych wyznaczono w sposób analityczny warunek istnienia *bifurkacji Hopfa*. Wyraża się on żądaniem, aby dwie wartości własne macierzy Jacobiego tworzyły parę sprzężonych, urojonych liczb zespolonych. Po wykonaniu niezbędnych obliczeń otrzymano równanie :

$$\gamma = \frac{49\beta^2 + (28\beta + 16)\kappa^2}{168(h/b)\beta^2 + 96(h/b)\beta} \quad (4)$$

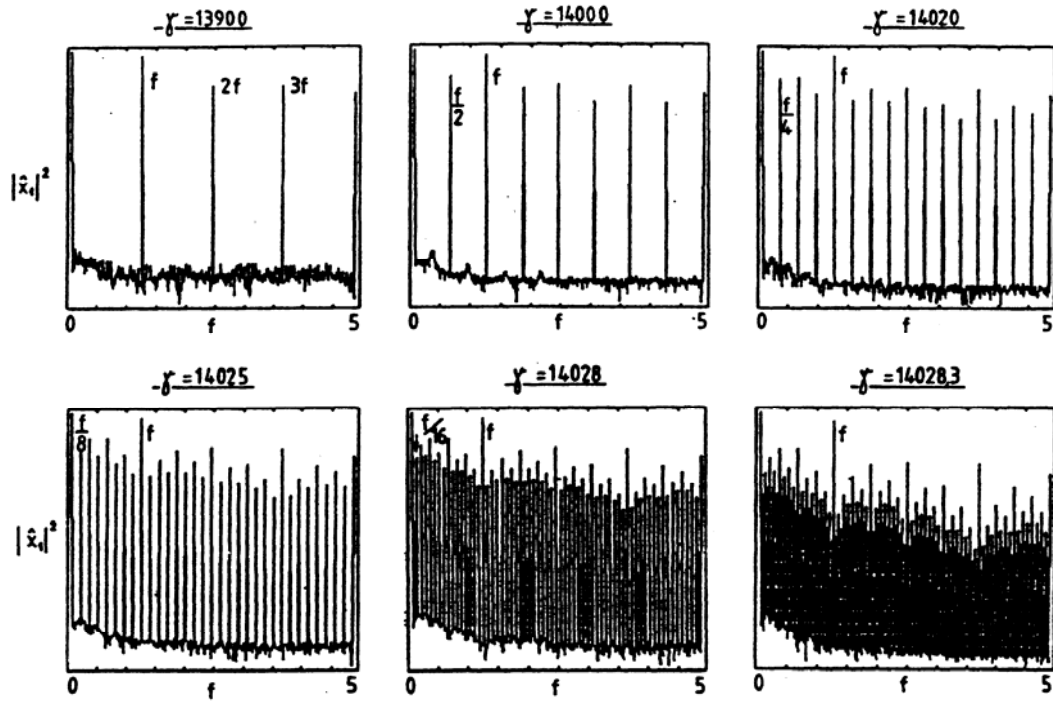
gdzie  $\kappa$  jest parametrem charakteryzującym fizyczne własności płyty. Zależność (4) określa miejsce pojawienia się bifurkacji Hopfa, a tym samym próg drgań okresowych, na płaszczyźnie parametrów kontrolnych  $\beta$ - $\gamma$ . Graficzna reprezentacja równania (4) dla wybranych przykładowo parametrów płyty przedstawiona jest na rys.2.



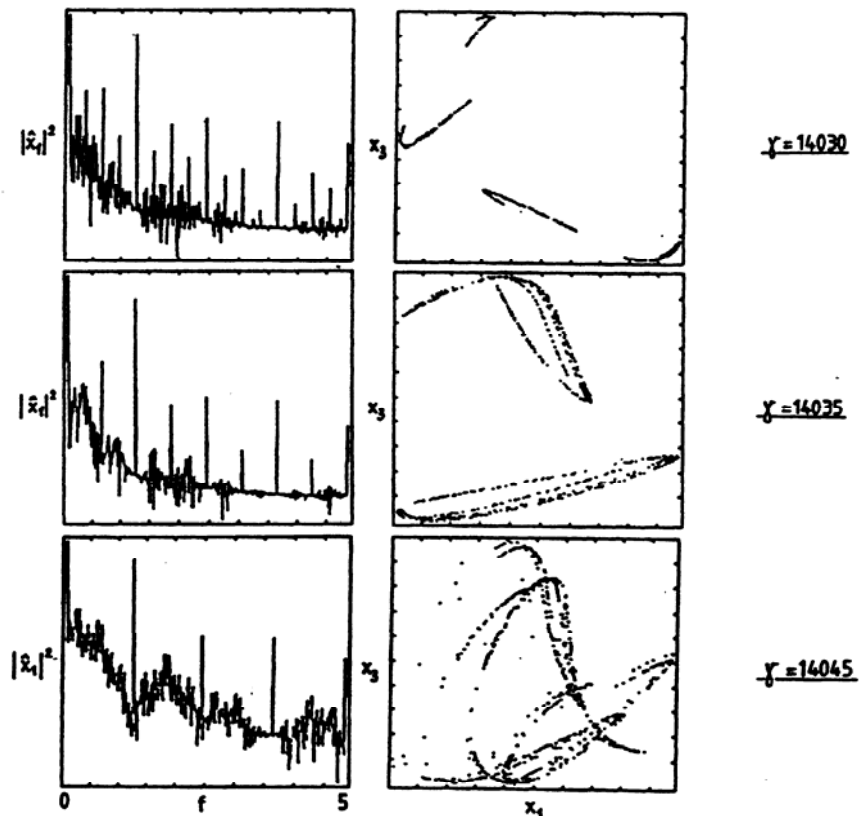
Rys.2. Wykres bifurkacji Hopfa - próg drgań okresowych.

### 4. Drgania nieregularne

Analizę zachowań płyty powyżej wyznaczonego analitycznie progu flutteru przeprowadzono na podstawie symulacji numerycznej. Obserwowano m.in. mapy Poincaré i widma Fouriera przy zmieniających się wartościach parametrów kontrolnych  $\beta$ ,  $\gamma$ . Stwierdzono istnienie przedziałów parametrów, w których układ poprzez kaskadę bifurkacji podharmonicznych osiąga stan chaosu. Rysunki 3 i 4 ilustrują drogę do chaosu i jego rozwój dla  $\beta=0.3$ , przy zmieniających się wartościach parametru  $\gamma$ .



Rys.3. Widma Fouriera. Droga do chaosu - kaskada bifurkacji podharmonicznych.



Rys.4. Widma Fouriera i mapy Poincaré. Rozwój chaosu - ewolucja dziwnego atraktora połączona z zanikaniem kolejnych podharmonicznych.

## 5. Wnioski

Przeprowadzone badania wskazują, że względnie prosty układ autonomiczny może wykazywać bardzo złożone zachowania dynamiczne. Klasyczna droga do chaosu prowadząca przez kaskadę bifurkacji podharmonicznych [5], znana przede wszystkim z analiz teoretycznych i doświadczeń na gruncie mechaniki płynów (konwekcja Rayleigha-Bénarda)[1], została potwierdzona w przypadku układu mechanicznego z siłą aerodynamiczną.

## Literatura

- [1] Bergé P., Pomeau Y., Vidal C.: *L'ordre dans le chaos*, Hermann, Paris, 1984.
- [2] Bolotin V.V.: *Nonconservative problems of the theory of elastic stability*, Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris, 1963.
- [3] Dowell E.H.: Flutter of buckled plate as an exemple of chaotic motion of a deterministic autonomous system, *Journal of Sound and Vibration*, **85**(3), 1982, 333-344.
- [4] Holmes P.J.: Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations: a finite dimensional analysis, *Journal of Sound and Vibration*, **53**(4), 1977.
- [5] Reiss E.L.: Cascading bifurcation, *Journal of Sound and Vibration*, **43**(1), 1983, 57-65.

### FLUTTER AND NON-LINEAR VIBRATION OF A THIN RECTANGULAR PLATE SUBMITTED TO AERODYNAMIC FORCE ACTION

#### Summary

The qualitative analysis of vibration of a rectangular plate submitted to an aerodynamic force action is presented. On the analytical way the *flutter* threshold is determined. With the numerical simulation the existence of this threshold and the possibility of non-regular (*chaotic*) vibration is confirmed.

### "FLUTTER" ET VIBRATIONS IRRÉGULIÈRES D'UNE MINCE PLAQUE RECTANGULAIRE SOUMISE À L'ACTION D'UNE FORCE AÉRODYNAMIQUE

#### Résumé

Dans le travail on a présenté l'analyse qualitative des vibrations d'une plaque rectangulaire soumise à l'action d'une force aérodynamique. On a déterminé par la voie analytique le seuil de l'apparition des vibrations périodiques auto-entretenuées de type *flutter*. La simulation numérique a confirmé l'existence de ce seuil et mis en évidence la possibilité des vibrations irrégulières (*chaotiques*).

dr inż. Jerzy Mrozowski

dr hab. inż. Jan Awrejcewicz

Katedra Automatyki i Dynamiki Maszyn, Politechnika Łódzka  
90-924 Łódź, ul. Stefanowskiego 1/15