

## ANALITYCZNO-NUMERYCZNA METODA ANALIZY UKŁADÓW NIELINIOWYCH DYSKRETNOCIĄGLYCH

Jan Awrejcewicz

W pracy przedstawiono analityczno-numeryczną metodę analizy układów nieliniowych dyskretno-ciągłych na przykładzie drgań generatora strunowego ze wzmacniaczem posiadającym opóźnienie czasowe. Nieliniowa dynamika tego układu opisana jest przez układ równań różniczkowych cząstkowych i zwyczajnych, oraz całkowych z opóźnieniem czasowym. Najpierw została zaprezentowana analityczna metoda perturbacyjna, dzięki której otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych uśrednionych amplitudowych. Następnie w wyniku analizy numerycznej tych równań zademonstrowano kilka interesujących zjawisk nieliniowych.

### 1. Wstęp

Analiza dynamiki układów dyskretno-ciągłych nieliniowych opisana jest układem równań różniczkowych cząstkowych i zwyczajnych (czasem równań całkowych), i ich bezpośrednia analiza numeryczna jest kłopotliwa. Przyczyna leży z jednej strony w ogólnie raczej skomplikowanych w użyciu metodach analizy równań różniczkowych nieliniowych cząstkowych w porównaniu z analizą równań różniczkowych zwyczajnych. Z drugiej strony zwykle analizowany układ dynamiczny posiada wiele parametrów i pełen przegląd jego dynamiki wymaga długotrwałych

obliczeń. W układzie takim można oczekiwać bardzo wiele różnorodnych zjawisk nieliniowych i ich pełna analiza jest żmudna przy użyciu metody bezpośredniego całkowania numerycznego. Ponadto, szczególnie w zagadnieniach dynamiki stosowanej, układ równań modeluje pewien proces i zwykle towarzyszą mu pewne a priori wiadomości dotyczące jego zachowania. To oczekiwane zachowanie układu może być odfiltrowane za pomocą metod perturbacyjnych lub odpowiedniego skalowania równań. W efekcie otrzymuje się układ nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych, które jest znacznie łatwiej rozwiązać niż równania początkowe.

## 2. Równania opisujące dynamikę analizowanego układu

Szczegółowa dyskusja analizowanego układu elektromechanicznego została przeprowadzona w [1]. Układ ten składa się z metalowej struny, drgania której opisane są równaniem różniczkowym cząstkowym. Dynamika wzmacniacza opisana jest prostym równaniem liniowego oscylatora o tłumieniu  $c$  i częstości  $\omega$ . Wzmacniacz dostarcza prąd do metalowej struny, która znajduje się w polu magnetycznym. Amplituda drgań natężenia prądu kontrolowana jest przez wzmacniacz działający z opóźnieniem czasowym. Elektromagnetyczna indukcja  $B(x)$  działająca wzdłuż struny generuje naprężenie na jej końcach

$$E(t) = \int_0^l B(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} dx, \quad (1)$$

gdzie  $x$  jest współrzędną przestrzenną,  $t$  oznacza czas,  $u(t, x)$  jest amplitudą drgań w punkcie  $x$  i  $l$  jest długością struny. Powstałe naprężenia generują siłę

$$Y(t) = h_1 E(t) - h_2 E^3(t), \quad (2)$$

gdzie  $h_1$  i  $h_2$  są stałymi współczynnikami. Dynamika wzmacniacza opisana jest równaniem

$$\ddot{I}(t) + 2\lambda\dot{I}(t) + kI(t) = \dot{Y}(t - \mu), \quad (3)$$

gdzie kropką oznaczono różniczkowanie względem czasu.  $\lambda$  jest współczynnikiem tłumienia, a  $\mu$  jest opóźnieniem czasowym. Zmiany w czasie natężenia prądu oraz indukcji  $B(x)$  wpływają na drgania struny według równania

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = -\frac{\epsilon}{\rho} \left( 2h_0 \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - B(x) I(t) \right), \quad (4)$$

gdzie  $h_0$  i  $\rho$  są stałymi, a  $\epsilon$  jest pewnym małym dodatnim parametrem. Częstości drgań własnych struny wynoszą  $\omega_s = \pi cs/l$ , ( $s=1, 3, 5, \dots$ ), a jednorodne warunki brzegowe mają postać

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0. \quad (5)$$

### 3. Metoda analityczna

Dla  $\epsilon=0$  rozwiązaniem (4) jest

$$u_0 = a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \sin(\pi x/l) + a_3 \cos(3\omega_1 t + \theta_3) \sin(3\pi x/l), \quad (6)$$

gdzie  $a_1$  i  $a_3$ , są amplitudami, a  $\theta_1$  oraz  $\theta_3$  są fazami drgań. Dla dostatecznie małych  $\epsilon \neq 0$  rozwiązaniem (4) jest

$$u = u_0 + \epsilon u_1(x, a_1, a_3, \theta_1, \theta_3) + O(\|\epsilon\|^2), \quad (7)$$

Zakładając, że indukcja  $B(x)$  jest symetryczna względem struny, mamy

$$B(x) = B_1 \sin(\pi x/l) + B_3 \sin(3\pi x/l). \quad (8)$$

Dla małych  $\mu$  prawa strona (3) może być przedstawiona jako  $(dY/dt)(1 - \mu)$ . Rozwiązanie (3) ma postać

$$I_0(t) = M_1 \cos \omega_1 t + N_1 \sin \omega_1 t + M_3 \cos 3\omega_1 t + N_3 \sin 3\omega_1 t, \quad (9)$$

gdzie  $M_i$ ,  $N_i$  ( $i=1, 3$ ) mogą być łatwo wyznaczone. Dalsza analiza jest typowa dla metod perturbacyjnych [2-4]. Ponieważ  $B(x)$  i  $I(t)$  są określone, to równanie (4) może być rozwiązane przy pomocy techniki perturbacji. W rezultacie otrzymujemy

następujący układ równań uśrednionych

$$\frac{da_i}{dt} = \epsilon P_i(a_1, a_3, \eta), \quad \frac{d\theta_i}{dt} = \epsilon Q_i(a_1, a_3, \eta). \quad (10)$$

Prawa strona równania (4) pozwala na wyznaczenie członów rezonansowych

$$\begin{aligned} R_{ic} &= \frac{2}{\pi l} \int_0^{l2\pi} \int_0^{l2\pi} R \sin \frac{\pi i x}{l} \cos \nu_{i0} d\nu_{i0} = \frac{B_i}{\rho} (M_i \cos \theta_i - N_i \sin \theta_i), \\ R_{is} &= \frac{2}{\pi l} \int_0^{l2\pi} \int_0^{l2\pi} R \sin \frac{\pi i x}{l} \sin \nu_{i0} d\nu_{i0} = \frac{B_i}{\rho} (N_i \cos \theta_i + M_i \sin \theta_i), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\nu_{i0} = i\omega_i t + \theta_i, \quad i=1, 3$$

gdzie  $R_c$ ,  $R_s$  odpowiadają wyrażeniom stojącym przy  $\cos \nu_{i0}$  i  $\sin \nu_{i0}$ . Porównanie wyrażen stojących przy lewej i prawej stronie równania (4) pozwala na obliczenie

$$\begin{aligned} P_i &= -\frac{1}{2} \frac{B_i (N_i \cos \theta_i + M_i \sin \theta_i)}{i \rho \omega_i}, \\ Q_i &= -\frac{1}{2} \frac{B_i (M_i \cos \theta_i - N_i \sin \theta_i)}{i \rho a_i \omega_i} \end{aligned} \quad (12)$$

W równaniach (10) występuje jedna zmienna  $\eta$ , zamiast  $\theta_1$  i  $\theta_3$ . Jest to jeden z ważniejszych kroków przedstawionej procedury uśredniania. Zmienną  $\eta$  definiujemy jako

$$\eta = \theta_3 - 3\theta_1, \quad (13)$$

i powtórnie stosujemy metodę uśrednienia, ale w pewien szczególny sposób. Dla  $i=1$  bierzemy  $\theta_1 = \eta + 3\theta_3$ , podczas gdy dla  $i=3$  bierzemy  $\theta_3 = (1/3)(\theta_1 - \eta)$ . W wyniku operacji uśrednienia otrzymujemy

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2a_1 \rho} \left\{ (B_1^2 h_1 l \omega_1 - \frac{3}{16} B_1^4 a_1^2 h_2 l^3 \omega_1^3 - \right. \\ &\left. \frac{27}{8} B_1^2 B_3^2 a_3^2 h_2 l^3 \omega_1^3) (m_1 (1 - \mu \omega_1) + \mu n_1 \omega_1) + \right. \\ &\left. \frac{9}{16} B_1^3 B_3 a_1 a_3 h_2 l^3 \omega_1^3 \left( (m_1 (1 - 7\mu \omega_1) + \mu n_1 \omega_1) \cos \eta - (n_1 (1 - 7\mu \omega_1) - \mu m_1 \omega_1) \sin \eta \right) \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_3 = & \frac{1}{2d_3\rho} \left\{ (3B_3^2 h_1 l \omega_1 - \frac{9}{8} B_1^2 B_3^2 a_1^2 h_2 l^3 \omega_1^3 - \right. \\
& \left. \frac{81}{16} B_3^4 a_3^2 h_2 l^3 \omega_1^3) (m_3(1-3\mu\omega_1) + 3\mu n_3 \omega_1) + \right. \\
& \left. \frac{1}{16a_3} B_1^3 B_3 a_1^3 h_2 l^3 \omega_1^3 ((m_3(1-\mu\omega_1) + 3\mu n_3 \omega_1) \cos \eta + (n_3(1-\mu\omega_1) - 3\mu m_3 \omega_1) \sin \eta) \right\}, \\
P_1 = & -\frac{a_1 h_0}{\rho} + \frac{1}{2d_1\rho} \left\{ (-B_1^2 h_1 a_1 l \omega_1 + \frac{3}{16} B_1^4 a_1^3 h_2 l^3 \omega_1^3 + \right. \\
& \left. \frac{27}{8} B_1^2 B_3^2 a_1 a_3^2 h_2 l^3 \omega_1^3) (n_1(1-\mu\omega_1) - \mu m_1 \omega_1) - \right. \\
& \left. \frac{9}{16} B_1^3 B_3 a_1^2 a_3 h_2 l^3 \omega_1^3 ((n_1(1-7\mu\omega_1) - \mu m_1 \omega_1) \cos \eta + (m_1(1-7\mu\omega_1) + \mu n_1 \omega_1) \sin \eta) \right\}, \\
P_3 = & -\frac{a_3 h_0}{\rho} + \frac{1}{2d_3\rho} \left\{ (-3B_3^2 a_3 h_1 l \omega_1 + \frac{9}{8} B_1^2 B_3^2 a_1^2 a_3 h_2 l^3 \omega_1^3 + \right. \\
& \left. \frac{81}{16} B_3^4 a_3^3 h_2 l^3 \omega_1^3) (n_3(1-3\mu\omega_1) - 3\mu m_3 \omega_1) + \right. \\
& \left. \frac{1}{16} B_1^3 B_3 a_1^3 h_2 l^3 \omega_1^3 ((m_3(1-\mu\omega_1) + 3\mu n_3 \omega_1) \sin \eta - \right. \\
& \left. (n_3(1-\mu\omega_1) - 3\mu m_3 \omega_1) \cos \eta) \right\}.
\end{aligned} \tag{14}$$

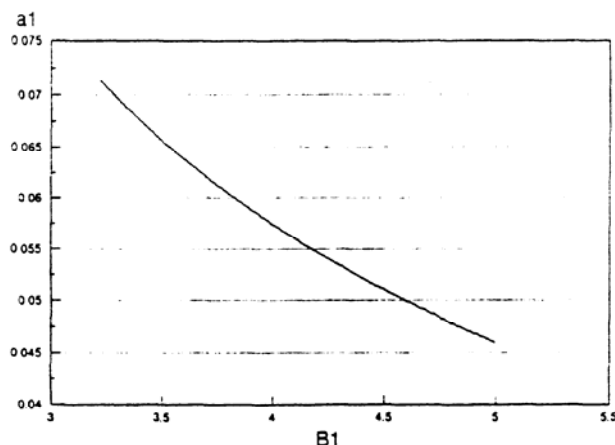
Otrzymany układ równań różniczkowych jest sztywnym układem równań ( $a_3$  występuje w mianowniku  $Q_3$ ). Zmiany amplitud i faz następują w czasie bardzo powoli, co wymaga długiego czasu całkowania.

#### 4. Analiza numeryczna

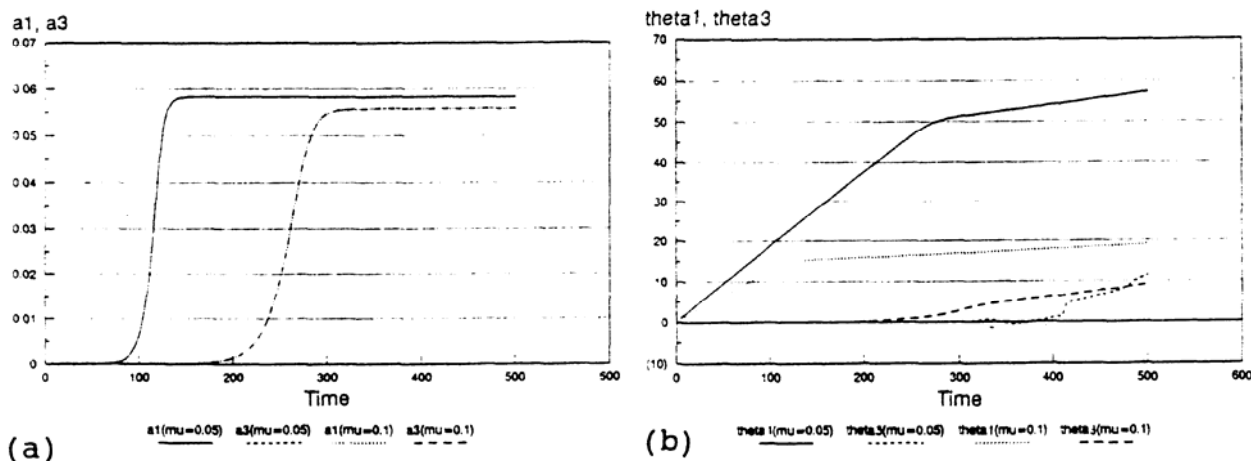
Rozważmy najpierw rozwiązanie stacjonarne

$$P_1(a_1, a_3, \eta) = 0, \quad P_3(a_1, a_3, \eta) = 0, \quad P = \frac{d\theta_3}{dt} - 3 \frac{d\theta_1}{dt} = 0. \tag{15}$$

W celu rozwiązania (15) użyto hybrydowej metody Powella i odmiany metody Newtona. Następujące parametry przyjęto jako stałe:  $l=0.1$ ,  $\omega=4.1$ ,  $\lambda=0.01$ ,  $k=25$ ,  $h_1=0.01$ ,  $h_2=0.6$ ,  $\epsilon/\rho=1$ ,  $h_1=0$ ,  $B_3=0.4$ . Opóźnienie czasowe i amplituda  $B_1$  wybrane zostały jako parametry kontrolne. Interesującym rezultatem jest to, że ze wzrostem amplitudy elektromagnetycznej indukcji  $B_1$  amplituda  $a_1$  maleje ( $a_3$  i  $\eta$  są stałe) - rys.1.

Rys.1. Wykres zależności  $B_1(a_1)$ 

Ponadto w przedziale  $B_1 \in (3.0, 5.0)$  dla każdej wartości  $B_1$  istnieją dwa rozwiązania  $a_1$  i jedno  $a_3$ . Odpowiadające wartości  $\eta$  zmieniają się w szerokim zakresie. Obliczenia przeprowadzone dla pełnego układu równań (10) i dla parametrów  $l=0.1$ ,  $\omega_i=4.9$ ,  $\lambda=0.001$ ,  $k=25$ ,  $h_1=0.01$ ,  $h_2=0.6$ ,  $\epsilon/\rho=1$ ,  $h_0=0.01$ ,  $B_1=10.0$ ,  $B_3=0.1$  pokazują, że dla  $\mu=0$  amplitudy  $a_1$  i  $a_3$  są stateczne. Pojawienie się niezerowego opóźnienia powoduje skok wartości  $a_1$  i towarzyszą temu zmiany  $Q_1$  i  $Q_3$  (rys.2).

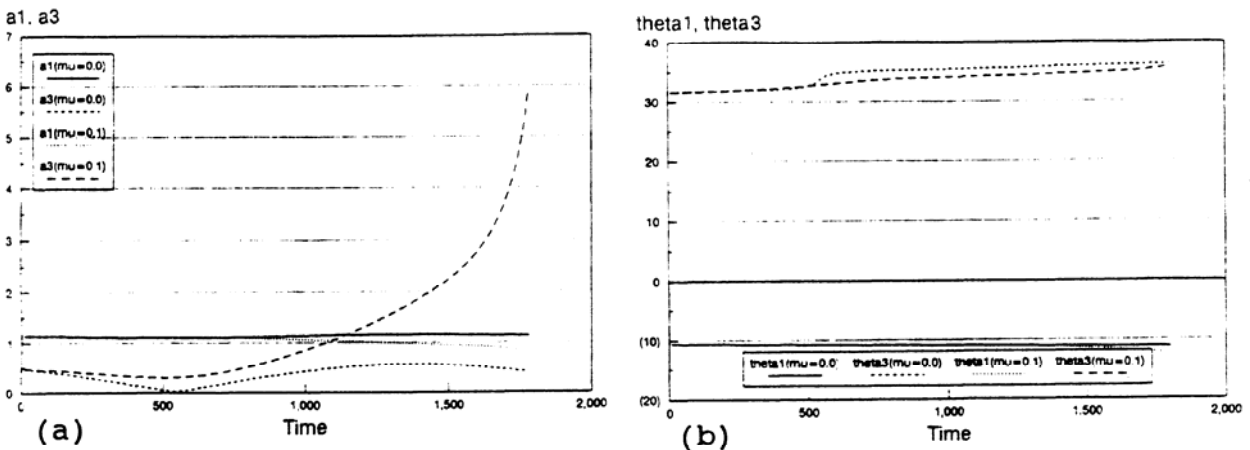


Rys.2. Ewolucja amplitud (a) i faz (b) w czasie

Na rys.3, ( $l=0.1$ ,  $\omega_i=1.7$ ,  $\lambda=0.001$ ,  $k=25$ ,  $h_1=0.01$ ,  $h_2=0.6$ ,  $\epsilon/\rho=1$ ,  $h_0=0$ ,  $B_1=2.5$ ,  $B_3=0.5$ ) zademonstrowano istnienie nieograniczonego rozwiązania. Dla  $\mu=0.1$  amplituda  $a$  najpierw wolno opada w czasie, a następnie gwałtownie wzrasta.

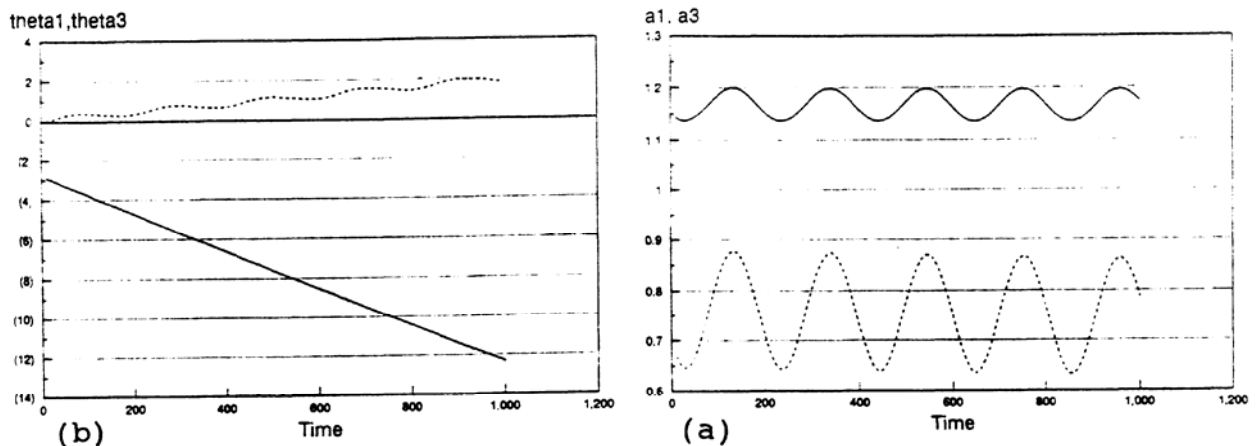
Wreszcie dla  $l=0.1$ ,  $\mu=0.0$ ,  $\omega_i=1.7$ ,  $\lambda=0.001$ ,  $k=25$ ,  $h_1=0.01$ ,  $h_2=0.6$ ,  $\epsilon/\rho=1$ ,  $h_0=0$ ,  $B_1=4.981$ ,  $B_3=0.2$  znaleziono również rozwiązanie okresowe (rys.4).





Rys.3. Nieograniczone rozwiązania  $a_1$  i  $a_3$  (a) i  $\theta_1$ ,  $\theta_3$  (b), dla  $\mu=0.0$  i  $\mu=0.1$ .

Ciekawym zjawiskiem jest to, że  $\theta_3$  nie zmienia się oscylacyjnie w przeciwieństwie do pozostałych zmiennych.



Rys.4. Oscylacyjne zmiany amplitud (a) i towarzyszące im zmiany faz (b)

## 5. Wnioski

W tej pracy na przykładzie układu elektromechanicznego dokonano analizy dynamiki układu nieliniowego dyskretno-ciągłego. Szczególną uwagę zwrócono na zastosowanie metody perturbacyjnej, pozwalającej na redukcję zagadnienia do analizy czterech równań różniczkowych nieliniowych zwyczajnych. Równanie te otrzymano przy użyciu rachunku symbolicznego z wykorzystaniem pakietu programów "Mathematica". Analiza numeryczna tych równań wykazała istnienie statecznych i niestatecznych położań równowagi, oraz istnienie ograniczonych i nieograniczonych, oscylacyjnych oraz nieoscylacyjnych rozwiązań.

Praca ta wydaje się posiadać jeszcze jeden ważny aspekt.

Prezentuje ona bowiem ogólne metody analizy skomplikowanych układów słabonieliniowych dyskretno-ciągłych. Użycie metody perturbacyjnej wspomaganiej rachunkiem symbolicznym pozwala na redukcję zagadnienia do analizy numerycznej równań różniczkowych nieliniowych zwyczajnych. Przedstawiona metodyka postępowania może być stosowana do innych, również bardziej złożonych nieliniowych układów dyskretno-ciągłych.

#### Literatura

- [1] Rubanik W. P.: Kolebanija sloznych kwazilinieinykh sistem s zapazdywaniem, Minsk, Izd. Uniwersitetskoie, 1985.
- [2] Malkin I. G.: Niekotoryje zadaczi teorii ustoiczivosti dvizhenia, Nauka, Moskva, 1956.
- [3] Zubov W. U.: Teoria kolebanij, Wysszaia Szkola, Moskwa, 1979.
- [4] Guckenheimer J., Holmes P.: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, New York, 1983.

#### ANALYTICAL-NUMERICAL METHOD TO A STUDY OF THE NONLINEAR-CONTINUOUS SYSTEMS.

##### Summary.

The symbolic-numerical approach is applied to a study of the oscillations of a string-type generator with a time-delay amplifier. First an analytical perturbation method (supported by symbolic computation) which yields the averaged ordinary differential equations is presented. Then the obtained equations are analyzed numerically showing some surprising phenomena.

Аналитическо-нумерический метод анализа систем  
с дискретными и распределёнными параметрами

##### Резюме

В работе использован метод символическо-нумерический вычисленный для анализа колебаний в струнном генераторе с запаздыванием в усилителе. Сначала применен асимптотический метод с использованием символического вычисления, который позволяет найти усреднённую систему дифференциальных обыкновенных уравнений. Полученные уравнения были потом анализированы численно.

**Jan Awrejcewicz**  
Katedra Dynamiki Maszyn i Automatyki Politechniki Łódzkiej  
ul. Stefanowskiego 1/15 90-924 ŁÓDŹ