



Fakulteta za
industrijski inženiring
Faculty of Industrial Engineering

LINEARNI IN NELINEARNI VALOVI V MIKROSTRUKTURIRANIH TRDNINAH:

Homogenizacija in asimptotični pristopi

I. V. Andrianov
J. Awrejcewicz
V. Danishevskyy

"All Rights Reserved"

"Authorised translation from the English
language edition published by CRC Press, a
member of the Taylor & Francis Group LLC"

KOLOFON

I. V. Andrianov, J. Awrejcewicz, V. Danishevskyy

**LINEARNI IN NELINEARNI VALOVI V MIKROSTRUKTURIRANIH TRDNINAH:
Homogenizacija in asimptotični pristopi**

Znanstvena monografija

1. izdaja

Prevod iz angleškega izvirnika

Naslov izvirnika: *Linear and Nonlinear Waves in Microstructured Solids: Homogenization and Asymptotic Approaches* (CRC Press, Taylor & Francis Group, USA, 2021)

Znanstvena recenzenta: prof. dr. Julius Kaplunov, prof. dr. Simon Muhič

Prevajalec:izr. prof. dr. Anatolij Nikonov

Redaktorja prevoda: dr. Barbara Zupančič, prof. dr. Rudolf Pušenjak

Oblikovanje in tisk: BS Team, tiskarske storitve

Izdala in založila: Fakulteta za industrijski inženiring Novo mesto

Kraj založbe: Šegova ulica 112, Novo mesto

Leto izida: 2023

Število natisnjenih izvodov: 50

Cena izvoda: 50,00 €

This edition of **Linear and Nonlinear Waves in Microstructured Solids: Homogenization and Asymptotic Approaches** by **I. V. Andrianov, J. Awrejcewicz and V. Danishevskyy** is published by arrangement with CRC Press, a member of the Taylor & Francis Group LLC". (ISBN 9780367704124)

Prevod knjige **Linearni in nelinearni valovi v mikrostrukturiranih trdninah: Homogenizacija in asimptotični pristopi** avtorjev **I. V. Andrianov, J. Awrejcewicz and V. Danishevskyy** je izšel v dogovoru s **CRC Press, a member of the Taylor & Francis Group LLC**.

Ali Rights Reserved

No part of this production may be reproduced or transmitted in any form or by any means electronic or mechanical, including photocopy, recording, or any information storage and retrieval system, without permission in writing from the publisher.

Authorised translation from the English language edition published by CRC Press, a member of the Taylor & Francis Group LLC.

Fakulteta za industrijski inženiring Novo mesto je izključni imetnik vseh materialnih avtorskih pravic na tej publikaciji. Prepovedano je kopiranje ali kakršnokoli razmnoževanje dela brez dovoljenja urednika.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

534.18:62-419

ANDRIANOV, Igor V.

Linearni in nelinearni valovi v mikrostrukturiranih trdninah : homogenizacija in asimptotični pristopi / I. V. Andrianov, J. Awrejcewicz, V. Danishevskyy ; [prevajalec Anatolij Nikonov]. - 1. izd. - Novo mesto : Fakulteta za industrijski inženiring, 2023

Prevod dela: *Linear and nonlinear waves in microstructured solids : homogenization and asymptotic approaches*

ISBN 978-961-7097-08-5

COBISS.SI-ID 145099267

Izdajo knjige je sofinancirala Agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije.

**Linearni in nelinearni valovi
v mikrostrukturiranih trdninah:
Homogenizacija in asimptotični pristopi**

I.V. Andrianov
Aachen, Nemčija

J. Awrejcewicz
Lodz, Polska

V. Danishevskyy
Dnipro, Ukrajina

Novo mesto, 2023

POSVETILO

*To je skromen prispevek, posvečen delu in znanstveni zapuščini
profesorja Leonida I. Manevitcha (02.04.1938 - 20.08.2020),
uglednega znanstvenika na področju dinamike in mehanike kompozitnih
materialov*

Kazalo

Predgovor

1 Modeli in metode za preučevanje elastičnih valov v nelinearnih in nehomogenih materialih	1
1.1. Kratek pregled literature	1
1.2. Kratek "vodnik"	6
1.3. Analitične in numerične rešitve v teoriji kompozitnih materialov	17
1.4. Nekaj splošnih rezultatov teorije homogenizacije	19
2 Širjenje valovanja v večslojnih kompozitih: linearni problemi	21
2.1. Enodimenzionalni (1D) dinamični problem	21
2.2. Metoda homogenizacije višjega reda	22
2.3. Bloch-Floquetova metoda in eksaktna disperzijska enačba	27
2.4. Numerični izračuni	31
3 Širjenje valovanja v vlaknastih kompozitih: linearni problemi	35
3.1. Dvodimenzionalni (2D) dinamični problem	35
3.2. Metoda homogenizacije višjega reda	36
3.3. Bloch-Floquetova metoda in rešitev na osnovi Fourierove vrste	42
3.4. Numerični rezultati	43
3.5. Disperzija strižnih valov v cilindrično strukturirani gobasti viskoelastični kostnini	45
4 Longitudinalno valovanje v večslojnih kompozitih z upoštevanjem fizikalnih in geometrijskih nelinearnosti	57
4.1. Temeljne relacije nelinearne teorije elastičnosti	57
4.2. Vhodni problem robnih vrednosti	58
4.3. Makroskopska valovna enačba	60
4.4. Analitična rešitev za stacionarno valovanje	65
4.5. Analiza rešitev in numerični rezultati	69
5 Izvenravninsko strižno valovanje v vlaknastih kompozitih s strukturno nelinearnostjo	73
5.1. Robni problem v primeru nepopolnega stika	73
5.2. Makroskopska valovna enačba	75
5.3. Analitična rešitev za stacionarno valovanje	84
5.4. Analitična rešitev in numerični rezultati	87
6 Nastanek lokaliziranih nelinearnih valov v večslojnih kompozitih	91
6.1. Začetni model in psevdospektralna metoda	91
6.2. Fourier-Pad'jeva aproksimacija	92

6.3. Numerično modeliranje nestacionarnega nelinearnega valovanja	96
7 Lokalizacija nihanj v 1D linearnih in nelinearnih mrežah: diskretni in zvezni modeli	101
7.1. Uvod	101
7.2. Enoatomska mreža s perturbirano maso	102
7.3. Enoatomska mreža s perturbirano maso – zvezna aproksimacija	104
7.4. Dvoatomska mreža	105
7.5. Dvoatomska mreža s perturbirano maso	107
7.6. Dvoatomska mreža s perturbirano maso – zvezna aproksimacija	110
7.7. Nihanja mreže na podpori z defektom	112
7.8. Nelinearne nihanja mreže	113
7.9. Vpliv nelinearnosti na prepustne in zaustavitvene pasove	115
8 Prostorska lokalizacija linearnih elastičnih valov v kompozitnih materialih z defekti	118
8.1. Uvod	118
8.2. Lokalizacija valov v večslojnem kompozitnem materialu: metoda prenosne matrike	119
8.3. Lokalizacija valov v večslojnem kompozitnem materialu: mrežni pristop	124
8.4. Izvenravniško strižno valovanje v vlaknastem kompozitu	125
9 Nelinearna nihanja viskoelastičnih heterogenih trdnin končne velikosti: notranje resonance in interakcije nihajnih načinov	129
9.1. Uvod	129
9.2. Vhodni problem in homogenizirana dinamična enačba	130
9.3. Postopek diskretizacije	132
9.4. Metoda več časovnih skal	134
9.5. Numerična simulacija sklopitve nihajnih načinov	135
9.6. Zaključne opombe	138
10 Nelokalni, gradientni in lokalni modeli elastičnih struktur: enodimenzionalni primer	139
10.1. Uvod	139
10.2. Veriga elastično sklopljenih mas	141
10.3. Klasični zvezne aproksimacije	143
10.4. “Prekoračitve”	145
10.5. Kontinualizacija ovojnice	146
10.6. Vmesni zvezni modeli	147
10.7. Uporaba padéjevih aproksimacij	148
10.8. Razvoj normalnih načinov nihanja	151
10.9. Teorije elastičnosti s sklopljenimi napetostmi	154
10.10. Odnosi med funkcijami diskretnih argumentov in aproksimacijskimi analitičnimi funkcijami	155
10.11. Jedra integrodiferencialnih enačb diskretnih in zveznih sistemov	156
10.12. Disperzivno širjenje valovanja	159
10.13. Greenova funkcija	160

10.14. Dvojne in trojne disperzivne enačbe	161
10.15. Todina mreža	163
10.16. Diskretni pregibi	165
10.17. Kontinualizacija mreže β -FPU	167
10.18. Akustična veja mreže α -FPU	170
10.19. Antikontinuumska meja	170
10.20. 2D mreža	170
10.21. Simulacije molekularne dinamike in kontinualizacija: rokovanje	172
10.22. Kontinualizacija in diskretizacija	173
10.23. Možne posplošitve in aplikacije ter odprti problemi	174
11 Regularna in kaotična dinamika, temelječa na kontinualizaciji in diskretizaciji	175
11.1. Uvod	175
11.2. Integrabilne navadne diferencialne enačbe (NDE)	177
11.3. Kontinualizacija s Padéjevimi aproksimacijami	177
11.4. Numerične izračuni	179
Literatura	187

PREGOVOR

Za širjenje valov v heterogenih materialih in strukturah so značilni številni pomembni pojavi, ki jih v homogenih trdnih snoveh nikoli ni mogoče opaziti. V zadnjih letih so bile intenzivne študije posvečene fononskim zapornim pasovom, negativnemu lomu, dinamični anizotropiji in fokusiranju valov, akustičnim diodam, akustično nevidnim plaščem, lokalizaciji valov v strukturah z defekti. Vsi ti izjemni učinki in lastnosti imajo velik praktični pomen za široko paleto aplikacij v fiziki, inženirstvu, biomehaniki in mnogih drugih področjih. Kompozitni materiali, meta-materiali in akustični kristali, sestavljeni iz več komponent z različnimi fizikalnimi in mehanskimi lastnostmi, se široko uporabljajo v sodobnem gradbeništvu in strojništvu, letalski in raketni industriji. Primeri kompozitov so ojačana plastika, beton, laminiran les, vezan les in številni drugi materiali. V zadnjih letih se intenzivno razvijajo tehnologije za izdelavo nanokompozitov, pri katerih imajo ojačitveni delci (fulereni, nanocevke) značilno velikost od 1 nm do 100 nm. Za razliko od običajnih snovi je v nanodelcih večina atomov nameščena na površini, kar vodi do njihove izjemno visoke togosti in trdnosti. Zaradi tega so za nanokompozite značilne posebne mehanske lastnosti, ki bistveno presegajo lastnosti tradicionalnih materialov.

Z vidika mehanike je glavna značilnost modeliranja in izračuna kompozitnih materialov upoštevati heterogenost njihove notranje strukture. Zato lahko modele in metode teorije kompozitov uporabimo tudi za proučevanje prostorsko heterogenih struktur, kot so tramovi z pritrjenimi masami, plastne, rebraste, perforirane plošče in lupine, pilotni temelji in mnogi drugi.

Širjenje elastičnih deformacijskih valov v kompozitnih materialih spremlja večkratni odboj in lom signala na nehomogenosti notranje strukture, kar vodi do disperzije valovnega polja in sipanja mehanske energije. Vpliv nelinearnosti, nasprotno, vodi v koncentracijo energije in generiranje višjih harmonikov. V primeru ravnotežja med učinki disperzije in nelinearnosti je možno nastajanje stacionarnih nelinearnih valov (periodičnih ali osamljenih), ki se širijo brez spreminjanja oblike in hitrosti.

Lastnosti linearnih in nelinearnih deformacijskih valov, ki se širijo v nehomogenem mediju, so v veliki meri odvisne od značilnosti mikrostrukture. S proučevanjem procesov nastajanja in širjenja valov lahko dobimo podrobne informacije o notranji strukturi in napakah kompozitnega materiala.

Lokalizirani nelinearni valovi nakopičijo znatno količino mehanske energije, kar lahko privede do lokalnega uničenja struktur. Zato je pri razvoju novih, izpopolnjenih meril za dinamično trdnost potrebno upoštevati nelinearne učinke.

Posebne lastnosti nelinearnih valov (kot so disperzija, lokalizacija, odvisnost oblike in hitrosti širjenja od amplitude) se lahko uporabijo za izdelavo različnih vrst akustičnih instrumentov in naprav: blažilnikov vibracij, filtrov, sprejemnikov, oddajnikov in valovodov.

Linearne in nelinearne elastične valove v trdnih snoveh so raziskovali številni avtorji. V večini študij so bili obravnavani homogeni materiali in strukture, kadar je pojav disperzije posledica geometrijskih dejavnikov (prisotnost upogibnih sil, odboj valov od stranskih površin valovoda itd.). Širjenje deformacijskih valov v kompozitnih materialih je bilo veliko manj

raziskano. Številni pristopi so fenomenološke narave, zato numerične vrednosti koeficientov v valovnih enačbah pogosto niso definirane. Domneva se, da jih je mogoče najti eksperimentalno. Vendar pa za mnoge realne materiale natančne vrednosti fenomenoloških parametrov ostajajo neznane.

Zato je kritičen problem razvoj novih metod za modeliranje linearnih in nelinearnih valov v kompozitnih materialih ter iskanje rešitev, ki bi omogočale upoštevanje vpliva notranje strukture medija na procese širjenja valov na makroskali.

To monografijo lahko obravnavamo kot podaljšek/nadaljevanje naše prejšnje monografije [19]. V omenjeni knjigi smo obravnavali statične probleme teorije kompozitov z uporabo asimptotičnih pristopov. V tej knjigi so ti pristopi posplošeni na dinamični primer. Uporabljajo se enake asimptotične metode, to so homogenizacijski pristop, singularna in regularna asimptotika ter eno- in večtočkovni Padéjevi približki.

V prvem poglavju knjige ponazarjamo in obravnavamo matematične modele in metode, namenjene preučevanju elastičnih valov, ki se širijo v nelinearnih in nehomogenih materialih.

Najprej je predstavljen kratek pregled literature, ki poudarja različne učinke evolucije valov, vključno z nelinearnostjo, disperzijo in disipacijo. Nelinearnost, ki jo izkazuje trdno telo, lahko vključuje geometrijske, fizikalne in strukturne komponente. Zatem je predstavljeno najnovejše stanje na področju analitičnih/numeričnih pristopov s poudarkom na učinkih skal, preučeni s pomočjo metode asimptotične homogenizacije. Znano je namreč, da lahko odboji in lomi valovanja povzročijo učinke polarizacije, disperzije in dušenja tako na mikro kot na makro skali, ko valovna dolžina signala potujočega vala postane primerljiva z značilno velikostjo heterogenosti.

Poleg tega so opisane prednosti asimptotičnih metod in metode homogenizacije.

Drugo poglavje je namenjeno proučevanju valov v slojevitih materialih z vidika linearne analize. Najprej je obravnavan 1D dinamični problem s pomočjo Bloch-Floquetove metode. Opisana je uporaba metode homogenizacije višjega reda. Nato se rešitev natančne disperzijske enačbe primerja z rešitvijo, pridobljeno po Bloch-Floquetovi metodi. Predstavljena sta dva numerična primera.

Podobna metodologija je predstavljena v 3. poglavju, kjer se valovi v vlaknastih kompozitih raziskujejo v okviru linearne postavitve. Najprej je obravnavan 2D dinamični problem. Nato se za rešitev problema uporabi metoda homogenizacije višjega reda. Primerjava rešitev, ki jih dobimo po Bloch-Floquetovi metodi in s približkom v obliki standardne Fourierjeve vrste, je izvedena na podlagi numeričnih raziskav. Poleg tega je modelirana in analizirana disperzija strižnih valov v cilindrično strukturiranih poroznih viskoelastičnih kosteh.

V 4. poglavju so analizirani vzdolžni valovi v večplastnih kompozitnih materialih, ki kažejo tako fizično kot geometrijsko nelinearnost. Na začetku so predstavljena temeljne relacije nelinearne teorije elastičnosti. Nato je izpeljana rešitev makroskopske valovne enačbe.

Poleg tega je pridobljena analitična rešitev za konstantno hitrost in obliko širjenja stacionarnih valov, vključno s primerom nelinearnosti z regresivno in progresivno karakteristiko. Navedeni so numerični primeri, ki potrjujejo pridobljene rešitve.

Poglavje 5 je posvečeno izvenravninskim strižnim valovom v vlaknastem kompozitu z upoštevanjem strukturne nelinearnosti. Najprej je definiran problem robnih vrednosti za nepopolne pogoje vezi. Nato se z metodo homogenizacije reši enačba mikroskopskega vala.

Izpeljana je analitična rešitev, ki ureja stacionarno širjenje valov, vključno z učinki nelinearnosti z regresivno in progresivno karakteristiko.

Nastajanje in širjenje lokaliziranih nelinearnih valov v kompozitnih materialih sta obravnavana v 6. poglavju. Model vzdolžnih valov, ki se širijo v večplastnem kompozitu v smeri, pravokotni na razporeditev plasti, je izpeljan in rešen z uporabo psevdospektralne metode in Fourier-Padéjevega približka. Poleg tega je izvedena numerična analiza oblikovanja in širjenja nestacionarnih nelinearnih valov z upoštevanjem treh načinov: (i) generiranje enega samega lokaliziranega vala; (ii) generiranje niza lokaliziranih valov; (iii) sipanje začetnega impulza napetosti.

Lokalizacija vibracij v 1D linearnih in nelinearnih rešetkah, ki temeljijo na razvitem diskretnem in zveznem modelu, je analizirana v 7. poglavju. Najprej je preučena enoatomska rešetka z moteno maso na osnovi aproksimacije z metodo koncentriranih mas. Nato se isti problem reši na podlagi aproksimacije z zvezno porazdelitvijo mase. Enaka metodologija je uporabljena za preučevanje dvoatomske rešetke. Rešen je problem vibracij rešetke na nosilcu z defektom. Poleg tega je rešen problem, ki ga tvori sistem vodilnih NDE drugega reda z nelinearnostjo Duffingovega tipa in opisuje vibracije rešetke. Opisani so učinki nelinearnosti na prehodne in zaporne pasove.

Poglavje 8 obravnava prostorsko lokalizacijo linearnih elastičnih valov v kompozitnih materialih z defekti. Začnemo s preprostim problemom elastičnega kompozitnega materiala, sestavljenega iz dveh izmeničnih plasti, ki ga rešujemo z metodo prenosne matrike. Nato je rešen problem lokalizacije v večplastnem kompozitnem materialu, ki temelji na pristopu uporabe rešetke. Poleg tega so analizirani izvenravninski strižni valovi v vlaknastem 2D kompozitu.

Namen 9. poglavja je preučiti, kako viskozno dušenje vpliva na sklapljanje načinov nihanja pri nelinearnih vibracijah mikrostrukturiranih trdnih teles. Upoštewane so naravne vzdolžne vibracije slojevitega kompozita. Makroskopska dinamična enačba je pridobljena z asimptotično homogenizacijo. Vhodni kontinuirani problem je analiziran s postopkom prostorske diskretizacije. Asimptotična rešitev je razvita z metodo več časovnih lestvic, za numerične simulacije pa je uporabljena Runge-Kutta metoda četrtega reda. Predvidene in analizirane so notranje resonance in prenos energije med vibrirajočimi načini. Obravnavani so pogoji za morebitno skrajšanje prvotnega neskončnega sistema. Dobljeni numerični in analitični rezultati se dobro ujemajo.

Poglavje 10 se osredotoča na kontinuirane modele, ki izhajajo iz diskretne mikrostrukture. Analizirani so različni postopki kontinualizacije, ki približno upoštevajo nelokalno interakcijo med spremenljivkami diskretnega medija. V obravnavi so tudi teorije elastičnosti s pari napetosti. Analizirana so nadaljevanja (kontinualizacije) FPU rešetak. Opisani so tudi odnosi med simulacijami molekularne dinamike in kontinualizacijo ter med kontinualizacijo in diskretizacijo.

V 11. poglavju preučujemo različne različice Verhulstove NDE in navadne diferenčne enačbe. Običajno Verhulstova NDE služi kot primer determinističnega sistema, diskretna logistična enačba pa je klasičen primer preprostega sistema z zelo zapletenim (kaotičnim) obnašanjem. Predstavljamo primere deterministične diskretizacije in kaotične kontinualizacije. Postopek kontinualizacije temelji na Padé približkih. Za pravilno karakterizacijo dinamike

dobljene ODE smo izmerili tako karakteristične parametre kaotičnih dinamičnih sistemov, kot so Ljapunovski eksponenti in Ljapunovske dimenzije.

Predpostavlja se, da bralec pozna osnove matematične analize, pa tudi elementarnih lastnosti NDE in PDE, trdnosti materialov ter teorije elastičnosti in teorije nihanja. Naša prejšnja monografija vsebuje obsežen vodič v obravnavano snov, ki ga v tej knjigi ne ponavljamo, priporočamo pa ga za hitro seznanitev z uporabljenimi tehniko.

Nadaljnji razvoj knjige, opisane v tej monografiji je mogoče nadaljevati v naslednjih smereh :

1. Rešitev specifičnih nalog, pomembnih za prakso, na primer preučevanje valov v viskoelastičnih kompozitih z nepopolno vezjo med komponentami, širjenje valov v slojevitih kompozitih z degradiranimi matrikami na mestih nepopolne vezi itd. [30, 31].
2. Izračun dinamike kompozitnih materialov končne velikosti [21, 24]. Morda je bolj učinkovito, da se za preučevanje teh sistemov od samega začetka uporabijo spektralne ali psevdospektralne metode. Metode za premagovanje Wilbraham-Gibbsovega fenomena zahtevajo nadaljnji razvoj. Zlasti prejšnji rezultati kažejo, da kombinacija Padéjevih približkov in filterske funkcije izboljša konvergenco uporabljenih vrst.
3. Uporaba kratkovalovne homogenizacijske metode [126, 130, 133] se zdi obetavna.
4. Večina realnih kompozitov vsebuje naključne mikrostrukture. Za analizo teh kompozitov je v literaturi mogoče najti veliko tehnik homogenizacije, kot je povprečje družine funkcij [459]. Primeri izračunov kažejo, da sta učinkovit modul in «učinkovita gostota» operatorja, ki sta nelokalna v prostoru in času [313, 460, 461].

Zato je za pridobitev natančne homogenizirane rešitve potreben na splošno neskončen nabor korelacijskih funkcij, ki so namenjene statističnemu opisu mikrogeometrije kompozita. Seveda v mnogih primerih tak opis ni na voljo. Po drugi strani pa različne metode omogočajo oceno meja za učinkovite lastnosti z uporabo le omejene količine mikrostrukturnih informacij. Kot je bilo prikazano, ima navaden kompozit v mnogih primerih izjemno učinkovite lastnosti med ustreznimi naključnimi strukturami [75, 76, 252, 477]. Zato lahko rešitev za popolnoma pravilno sestavljen kompozit obravnavamo kot meje učinkovitega koeficienta med naključnimi koeficienti, vsaj za tresočo se geometrijo naključnih struktur[33].

Omejenost analitičnih pristopov je motivirala uporabo enotske celice z modelom končnih elementov. Numerična homogenizacija ni vezana na določene geometrije za strukturo enotske celice [7, 312]. Numerične rešitve niso pomembne le same po sebi, temveč omogočajo tudi vrednotenje uporabnosti analitičnih rešitev in njihovo izpopolnjevanje. Hkrati se lahko analitične rešitve uporabijo kot referenčne vrednosti za numerične rezultate v vzorčnih primerih. Analitične rešitve so pomembne tudi za reševanje optimizacijskih problemov in kot prvi približek v numeričnih pristopih.

Zahvaljujemo se A. L. Kalamkarovu, V. I. Malyi-ju, L.I. Manevitchu, V.V. Mityushevu, A.V. Porubovu, G.A. Starushenko, H. Topolu, D. Weichertu za koristne in navdihujoče izmenjave idej, plodno sodelovanje, spodbudne razprave, spodbudne pripombe in premišljene kritike, ki smo jih prejeli v preteklih letih.

Poleg tega želimo izraziti posebno hvaležnost, da je nekatere rezultate, predstavljene v tej monografiji, podprla (i) Nemška raziskovalna fundacija (Deutsche Forschungs-gemeinschaft), grant št. WE736/30-1 (I.V. Andrianov), (ii) Alexander von Humboldt Foundation (grant št. 3.4-

Fokoop-UKR/1070297) in Program za raziskave in inovacije Obzorje Evropske unije 2020 (MariaSkłodowska-Curie, grant št. 6551177) in (iii) Polish National Science Centre v okviru projekta OPUS14 št. 2017/27/B/ST /01330 (J. Awrejcewicz).

Zavedamo se, da knjiga lahko vsebuje sporne trditve, preveč osebne ali enostranske argumente, netočnosti in tipografske napake. Cenimo vse pripombe, komentarje in kritike v zvezi s knjigo.

Aachen, Nemčija

Igor V. Andrianov

Lodz, Polska

Jan Awrejcewicz

Dnipro, Ukrajina

Vladyslav V. Danishevskyy

1 Modeli in metode za preučevanje elastičnih valov v nelinearnih in nehomogenih materialih

V tem poglavju so obravnavani problemi širjenja valov v heterogenih materialih in strukturah ter analizirani obstoječi pristopi za iskanje učinkovitih rešitev. Glavne značilnosti, ki jih je treba upoštevati, so disperzija, disipacija in nelinearnost. Povzročajo jih polarizacija, odboji in lom na mikro nehomogenostih, kot tudi geometrijske, fizikalne in strukturne nelinearnosti. Obstoječe metode za analizo teh pojavov v glavnem temeljijo na homogenizaciji in Bloch-Floquetovem pristopu. Splošne ideje o homogenizaciji višjega reda so opisane na podlagi preprostega praktičnega primera. Pregledani so tudi članki in knjige, ki obravnavajo analitične in numerične rešitve, ter analizirane relacije med numeričnimi in analitičnimi rešitvami. Izpostavljene so prednosti analitičnih pristopov. Predstavljeni in obravnavani so splošni rezultati, dobljeni z uporabo teorije homogenizacije.

1.1. KRATEK PREGLED LITERATURE

Kompozitni materiali so materiali, sestavljeni iz več komponent z različnimi fizikalnimi in mehanskimi lastnostmi. S posebnim izborom njihovih prostorninskih deležev in geometrijskih oblik lahko ustvarjamo nove konstrukcijske materiale, ki izkazujejo boljše lastnosti, kot so na primer materiali z visoko trdnostjo in togostjo, obenem pa z majhno maso, materiali z izboljšano toplotno in električno prevodnostjo, materiali, za katere je značilna odpornost na agresivna okolja itd.

Upoštevajmo karakteristično dimenzijo l notranje strukture kompozita, tj. velikost ojačitvenega delca ali zrna, ki je majhna v primerjavi z velikostjo strukture same. Hkrati predpostavimo, da je l veliko večja od medatomskih razdalj. V tem primeru je mogoče opisati fizikalno obnašanje kompozitnega materiala z uporabo enačb mehanike kontinuuma.

Literatura, posvečena statiki kompozitnih materialov je temeljito analizirana v [19]. V tej monografiji pa se osredotočamo na dinamične probleme. Na splošno se pri študiji problemov dinamike eden od učinkov skaliranja pojavlja v obliki disperzije valovanja v kompozitih, ki jo povzročajo lokalni odboji in lomi signala na nehomogenostih v mediju. Boutin [89–91], Boutin in Auriault [92], Bakhvalov in Eglit [53, 54], Fishand Chen [120, 170, 171] so z uporabo metode homogenizacije višjega reda dobili rešitve, primerne za analizo dolgih valov ($\eta \ll 1$). Disperzijo v nehomogenih medijih lahko opišemo tudi na podlagi teorije učinkovite togosti [4, 144, 145, 206, 425] in teorije zmesi [59–61, 93, 203, 391]. Podroben pregled mikrostrukturnih teorij višjega reda podajajo Ting [431], Cattani in Rushchitsky [112], Rushchitsky [392], obenem pa je pregled različnih konsistentnih metod podan v [225–228]. Parnell in Abrahams [347–351] sta raziskovala vpliv začetnih napetosti na širjenje valov v kompozitnih materialih. Sipanje in uklon valov na posameznih nehomogenih medijih (razpoke, luknje, vključki) sta bila obravnavana v [57].

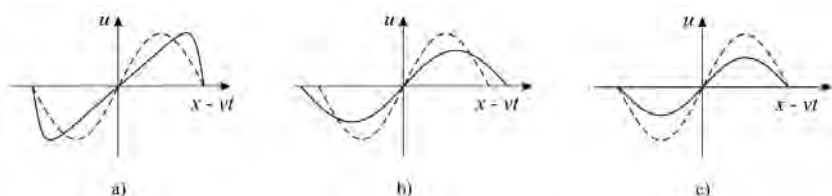
Ko se valovna dolžina zmanjša in postane sorazmerna z velikostjo notranje strukture, v kompozitu lahko zaznamo prepustni in zaustavitveni pas. Če je frekvenca znotraj zaustavitvenega pasu, nastane v materialu stoječe valovanje, katerega skupinska hitrost je enaka nič. V slednjem primeru amplituda signala na makro ravni eksponentno upada. Tako ima kompozit vlogo selektivnega valovnega filtra. Rezultati eksperimentalnih študij pasov prepustnosti in zaustavitve akustičnih valov v nehomogenih medijih so predstavljeni v Wolfovi monografiji [462] in v referencah [284, 320, 427, 433].

Rešitev za kratke valove je mogoče dobiti z uporabo Blochove predstavitve [82], ki je interpretacija Floquetovega izreka [176] za diferencialne enačbe s periodičnimi koeficienti. Po tej metodi se rešitev išče v obliki produkta harmoničnega valovanja $\exp(i\mu x) \cdot \exp(i\omega t)$ in neke modulacijske funkcije $F(x)$, zaradi periodičnosti kompozitne strukture pa funkcija $F(x)$ izpolnjuje tudi pogoj periodičnosti, tj. $F(x) = F(x + l)$. Za določitev $F(x)$ dobimo sistem linearnih algebrskih enačb. Če determinanto tega sistema izenačimo z nič, lahko poiščemo disperzijsko razmerje med frekvenco ω in valovnim številom μ . Metoda Bloch-Floquet je podrobno opisana v knjigah Brillouina [98], Bedforda in Drumhellerja [60] ter v preglednih člankih Karpova in Stolyarova [232] ter Shul'ge [408, 409].

Za enodimenzionalne periodične materiale (na primer za večslojne kompozite) je pogosto moč dobiti natančne disperzijske enačbe [97, 197, 408]. Za dvodimenzionalne in tridimenzionalne periodične medije (vlaknaste in zrnate kompozite) je mogoče najti približne disperzijske enačbe s predstavitvijo funkcije $F(x)$ s Fourierovim razvojem [262–266, 411–414], Rayleighovim multipolnim razvojem za valovni potencial [193, 326, 367, 368, 380, 472] ali njenimi modifikacijami [223, 284, 378].

Elastični valovi deformacij, ki se širijo v mikronehomogenih kompozitih, so običajno povezani z različnimi učinki nelinearnosti, disperzije in disipacije.

Nelinearnost povzroči lokalizacijo energije, ustvarja višje harmonike in implicira prenos energije iz nizkofrekvenčnega dela spektra v visokofrekvenčni del. Naj ima val v začetnem času sinusno obliko (črtkana krivulja na sliki 1.1a), kjer je u pomik, v fazna hitrost x in t pa prostorska oziroma časovna koordinata. Sinusoida se deformira v času (polna krivulja) in hitrost njenih točk narašča z večanjem razdalje, izmerjene glede na os x . Ukrivljenost valovne fronte se nenehno povečuje, kar lahko povzroči njen lom. Omenjeno obnašanje je dobro raziskano v hidrodinamiki, kjer čas loma običajno prepoznamo kot prehod iz navadnega v kaotični režim gibanja. Pri trdnih telesih omenjenega pojava ne opazimo, ker se učinek nelinearnosti kompenzira z delovanjem disperzijskih in disipacijskih pojavov.



Slika 1.1. Vpliv različnih učinkov na širjenje valovanja:
(a) - nelinearnost; (b) - disperzija; (c) disipacija.

Disperzija pomeni sipanje energije. Ukrivljenost valovne fronte se zmanjša, posledično pa je vpliv nelinearnosti manj izražen (slika 1.1b). Sipanje je povezano s prehodom kinetične

energije gibanja v toplotno energijo, kar povzroči zmanjšanje amplitude valovanja (slika 1.1c), obenem so nelinearni učinki manj izraženi. Opomnimo pa, da globlje študije vpliva sipanja v okviru te knjige niso obravnavane. Privzemamo, da lahko v primeru idealno elastične deformacije in ob zanemarjenem vplivu notranjega trenja učinke sipanja izpustimo. Slednja postavitev problema omogoča natančnejše raziskovanje vpliva nelinearnosti in disperzije na proučevane procese ter razkrivanje njihove posebne vloge pri širjenju valov deformacij v kompozitih.

Če se hkrati pojavita oba dinamična pojava, torej nelinearnost in disperzija, bosta kompenzirala svoj medsebojni vpliv. V tem primeru lahko opazimo širjenje stacionarnih periodičnih nelinearnih valov. Povečanje nelinearnosti povzroči pojav lokaliziranih valov zvonaste oblike (solitoni ali kinki). Ti valovi akumulirajo veliko količino energije in se lahko širijo na velike razdalje, pri tem pa ohranijo svojo obliko in hitrost. J.S. Russel (1834) [456] je bil med pionirji, ki so opazili pojav solitona na površini tekočine. Od takrat so bili lokalizirani nelinearni valovi večkrat zaznani in izmerjeni. Vključujejo udarne valove v zraku in tekočini (cunami), vrtince, seizmične valove v litosferi, živčne impulze kot tudi signale v optičnih vlaknih. Nelinearni deformacijski valovi igrajo pomembno vlogo v mehaniki kompozitnih materialov [112, 153, 158, 306, 369, 392, 398]. Nastajanje lokaliziranih valov je povezano s povečanjem njihove amplitude. Slednje lahko povzročajo nastanek plastičnih območij in nastanek mikrorazpok. To pomeni, da nelinearni dinamični učinki močno vplivajo na trdnost in vzdržljivost konstrukcij.

Poudariti je treba, da so nelinearni elastični moduli trdnih teles zelo občutljivi na spremembo mikrostrukture [469]. Zato lahko zaznava in spremljanje značilnosti nelinearnih valov omogoči posredno detekcijo majhnih sprememb v notranji strukturi materiala, ki jih ni mogoče zaznati s tradicionalnimi metodami kontrole. To odpira možnost razvoja novih natančnejših metod akustične diagnostike in spremljanje zdravja konstrukcije ter diagnostiko in kontrolo.

Sposobnost oblikovanja in širjenja lokaliziranih nelinearnih valov pod vplivom začetnih motenj z ohranitvijo oblike in hitrosti se lahko uporabi za odkrivanje napak v inženirskih konstrukcijah. Študija lastnosti nelinearnih seizmičnih valov lahko prinese dodatne informacije o strukturi zemeljske litosfere in različnih izkopavanjih. Posebne dinamične značilnosti nehomogenih medijev (disperzija valov, prepustni in zaustavitveni pasovi) pa je mogoče uporabiti tudi pri izdelavi novih materialov za različne tehnične aplikacije, vključno s protihrupnimi in antivibracijskimi plastmi, dušilci vibracij, akustičnimi filtri, ultrazvočnimi oddajniki in sprejemniki, valovodi itd.

Trdna telesa izkazujejo naslednje tipe nelinearnosti glede na izvor:

1. Geometrijska nelinearnost. Temelji na nelinearnih odvisnostih med deformacijami in gradienti deformacij. Geometrijsko nelinearnost popisuje bodisi Cauchy-Greenov tenzor ali Almanzijev deformacijski tenzor. Pri Cauchy-Greenovem tenzorju se diferenciacija izvaja po koordinatah v referenčni konfiguraciji (Eulerjev opis), medtem ko se pri Almanzijevem tenzorju nanaša na postdeformacijske konfiguracije (Lagrangeov opis). Razlika med omenjenima tenzorjema izgine le v primeru linearne aproksimacije. Opozoriti je potrebno na pomembnost pravilne ocene konfiguracije pri formuliranju nelinearnega problema.
2. Fizikalna nelinearnost. Temelji na nelinearnih odvisnostih med napetostmi in deformacijami, ki izvirajo iz anharmoničnosti potenciala med atomi. V nasprotju z geometrijsko nelinearnostjo omenjenega učinka ni mogoče modelirati z natančno formulo, pač pa osnovano na različnih hipotezah, ki so vezane na deformacije

elastičnega telesa. V splošnem primeru je fizikalna nelinearnost odvisna od načina opisa notranje energije. Najbolj priljubljeni in priznani v znanstveni skupnosti so modeli šibke nelinearnosti, ki temeljijo na predstavitvi energijske deformacijske gostote v okrnjeni potenčni vrsti za majhne deformacije ali v deformacijskem tenzorju. V literaturi se omenjena vrsta imenuje elastični Murnaghanov potencial.

3. Strukturna nelinearnost. Nastane zaradi nehomogenosti notranje strukture danega materiala. Ima ključno vlogo, če je kompozit sestavljen iz komponent z visokimi tlačnimi lastnostmi: praznine, razpoke, dislokacije na mejah kristalov itd. Te nehomogenosti povzročajo lokalno koncentracijo deformacij in posledično strukturna nelinearnost prevladuje pri dinamičnem obnašanju. Obnašanje materiala izkazuje močne nelinearne lastnosti [469]. Še zlasti je visoka strukturna nelinearnost značilna za minerale, ki tvorijo kamnine [101, 390]. V kompozitnih materialih je lahko učinek strukturne nelinearnosti induciran z nepopolnim stikom med matrico in vključki.

Nelinearne dinamične lastnosti kompozitov s prednapetimi stanji so bile obravnavane v delih [347, 348, 351].

Disperzijski učinki lahko spadajo pod geometrijske in strukturne nelinearnosti. Geometrijska disperzija je značilna predvsem za končno velikost telesa in ni odvisna od mikrostrukture. Geometrijska disperzija se izkazuje v prečnih valovih, ki se pojavljajo v nosilcih in ploščah (ki jih povzročajo upogibne napetosti), kot tudi v vzdolžnih valovih v palicah (zaradi odboja valov od površin palice) itd. V nasprotju geometrijsko strukturna nelinearnost nastane zaradi nehomogenosti notranje strukture kompozitnih materialov. Večkratni odboji in lomi signala na mejnih plasteh med komponentami pomenijo disperzijo valovnega polja. Disperzija povzroči delokalizacijo energije in izniči delovanje nelinearnosti.

Nelinearne elastične valove, ki se pojavljajo v trdnih telesih, so raziskovali številni avtorji [152, 306, 369, 398], a je bila tu glavna pozornost usmerjena v homogene materiale in konstrukcije, kjer je bil učinek disperzije impliciran z geometrijskimi dejavniki. Popolnega in podrobnega modeliranja 3D nelinearnega medija pa ne opredeljujejo enostavne naloge. Iz tega razloga so bili 3D problemi poenostavljeni v 1D problem [158] ali 2D problem [398], kar je omogočilo iskanje analitičnih rešitev, ki kvalitativno opisujejo proučevane nelinearne pojave.

Eksperimentalne študije nelinearnih deformacij v trdnih telesih so bile izvedene v delih [141, 142, 201, 398]. Nelinearni elastični valovi konstantnih oblik niso bili samo eksperimentalno opazovani, ampak so bili predhodno tudi dobro napovedani s teoretičnimi izsledki. Mnogi temeljni rezultati teh raziskav so povzeti v monografijah [153, 158, 306, 369, 398].

Konstitutivne enačbe, vezane na različne vrste nelinearnih valov v kompozitnih materialih (ravninski in prostorski, s kvadratnimi in kubičnimi nelinearnostmi), so opisane v [112, 392].

Doslej opisane metode z matematičnega vidika uvajajo dodatne gradientne člene, ki se pojavljajo v vhodnih valovnih enačbah z upoštevanjem disperzijskega učinka. Opozoriti je treba, da slednji pristop vsebuje fenomenološki vidik, saj vrednosti koeficientov pogosto niso definirane. V nekaterih primerih jih je mogoče oceniti eksperimentalno (na primer podrobni podatki o lastnostih kamninotvornih mineralov so podani v monografiji [101]), za večino realnih materialov pa natančne vrednosti fenomenoloških parametrov ostajajo neznane.

Drugi način ocenjevanja vpliva mikrostrukturnih učinkov temelji na uporabi asimptotične metode homogenizacije [55, 70, 224]. Uvedimo parameter motenj $\eta = l/L$, kjer L pomeni značilno velikost telesa na makroravni (na primer dolžina celotnega telesa), l pa je značilna velikost mikrostrukture (na primer velikost osnovne celice). Namesto vhodne koordinate x

uporabljamo "počasno" $x = x$ in "hitro" $y = \eta^{-1}x$ spremenljivko, medtem ko je $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + \eta^{-1} \frac{\partial}{\partial y}$ diferencialni operator. Polje premikov u v periodičnem nehomogenem kompozitnem materialu je mogoče aproksimirati z dvostopenjskim asimptotičnim razvojem potenčne vrste v parametru η v naslednji obliki

$$u = u_0(x) + \eta u_1(x, y) + \eta^2 u_2(x, y) + \dots, \quad (1.1)$$

kjer prvi člen u_0 ni odvisen od hitrih spremenljivk in predstavlja povprečen del rešitve, ki se »počasi« spreminja na mikroravni, nadaljnji členi u_i , $i = 1, 2, 3 \dots$ pa uvajajo popravke reda η^i in pomenijo "hitre" oscilacijske rešitve na mikroravni. Zaradi prostorske periodičnosti preiskovanega materiala členi u_i izpolnjujejo tudi pogoj periodičnosti, to je $u_i(x, y) = u_i(x, y + L)$.

Če razdelimo originalni problem z robnimi pogoji glede na potence parametra η , dobimo ponavljajočo se množico problemov z robnimi pogoji, kjer lahko vsakega od njih obravnavamo na intervalih posamezne periodične celice. Rešitev problema za posamezno celico da izraza za u_i . Nato z integracijo po hitrih koordinatah dobimo povprečno enačbo, ki ureja širjenje valov na makroravni. Koeficienti teh enačb so ovrednoteni na podlagi podatkov, ki vsebujejo fizikalne lastnosti komponent in njihovo geometrijsko obliko. Tako metoda homogenizacije poda eksplisitne informacije o notranji strukturi kompozita.

Vpliv neidealnih razmer na stiku med sloji je bil raziskan v [239]. Pokazalo se je, da delaminacija kompozitnih slojev pomeni dekompozicijo nelinearnega valovanja v zaporedje solitonov različnih amplitud in hitrosti. O eksperimentalni potrditvi omenjenega učinka so poročali v [140]. V primeru valovanja, ki se širi pravokotno na postavitev slojev, prevladuje učinek strukturne disperzije, ki ga lahko analiziramo z metodo homogenizacije višjega reda [171, 334].

Diferencialne enačbe, ki popisujejo širjenje valov v kompozitnih materialih, so Boussinesqovega tipa s četrnim parcialnim odvodom po prostorski koordinati. Boussinesqova enačba je bila izpeljana pri modeliranju nelinearnih površinskih valov [88]. Predstavlja ravnotežje med medsebojnim delovanjem nelinearnosti in disperzije, zato ga je mogoče najti pri vseh problemih, povezanih s temi učinki. Model KdV kaže podobne lastnosti [246]. Ker je le-ta običajno predstavljen v obliki enačbe tretjega reda, ga lahko dobimo iz Boussinesqove enačbe z izvedbo njene aproksimacijske faktorizacije [258, 401, 456]. V drugi polovici XX. stoletja so bile enačbe Boussinesqovega tipa in tipa KdV široko uporabljene za modeliranje dinamičnih lastnosti različnih nelinearnih sistemov vključno s tekočino, plazmo, diskretnimi verigami delcev in trdnimi telesi. Najdena in proučena je bila rešitev v obliki lokaliziranih nelinearnih valov (soliton). Zabusky in Kruskal [468] sta med pionirji, ki so raziskovali širjenje in medsebojno interakcijo solitonov v nelinearnih disperznih medijih. Več informacij o matematičnih modelih, ki temeljijo na Boussinesqovih enačbah in njihovi uporabi v fiziki in tehniki, ter o metodah reševanja aplikativnih problemov je na voljo v [99].

Zaharov [470] je pokazal, da je mogoče Boussinesqove enačbe integrirati z metodo teorije inverznega sipanja a iskanje rešitve pripadajočega spektralnega problema ne sodi med lahke naloge in je eksaktne analitične rešitve mogoče dobiti le za določene začetne pogoje [77, 139]. V primeru ravnih stacionarnih valov, ki se širijo brez spremembe oblike, lahko Boussinesqovo enačbo zreduciramo na enačbo, ki opisuje dinamiko anharmoničnega oscilatorja, njeno rešitev pa izrazimo z eliptičnimi funkcijami.

S praktičnega vidika ima raziskovanje nestacionarnih dinamičnih procesov pomembno vlogo. Z analizo razvoja začetnih impulzov različnih amplitud in oblik je moč opredeliti, za katere pogoje in kako hitro se lahko v materialu pojavijo lokalizirani nelinearni valovi. Integracijo Boussinesqove enačbe s poljubnimi začetnimi pogoji lahko vedno rešimo na numerični način. Še posebej široko uporabljena je psevdospektralna metoda, kjer je integracija po času izvedena z diferenčnimi shemami (na primer metode Runge-Kutta), medtem ko je aproksimacija po prostorskih koordinatah realizirana z razvojem v vrsto na osnovi baznih funkcij (na primer Fourierova vrsta) [175, 393]. Omenjeni pristop je učinkovit pri reševanju disipativnih in nelinearnih enačb, ki imajo odvode višjega reda [69, 243, 395, 396]. Generiranje solitonov iz perturbacije začetnega stanja je bilo obravnavano v [381, 395, 396]. Raziskave razvoja ločenih impulzov so bile izvedene v [243, 372]. Ponazorjeno je bilo, da se glede na začetno obliko impulza deformacije in glede na njen predznak (stiskanje ali raztezanje) lahko uresniči različni scenariji: nastanek ločenega solitona, nastanek nekaj solitonov različnih amplitud in širin ter divergenca začetnega impulza brez ustvarjanja stabilnega vala.

Na splošno so numerične metode univerzalne in omogočajo popisovanje dinamičnih procesov bolj splošnih oblik za razliko od tistih, ki temeljijo na analitičnih rešitvah. Vendar je treba omeniti, da je v mnogih primerih težko pravilno interpretirati dobljene rezultate numeričnega modeliranja. Poleg tega je ocena področja uporabnosti dobljenih rezultatov nemogoča brez analitične analize proučevanega problema. Najučinkovitejši pristop tako temelji na ujemanju numeričnih in analitičnih metod. Analitične rešitve, najdene v posebnem primeru stacionarnih valov, lahko uporabimo tudi za testiranje numeričnih shem integracije vodilnih enačb. Poleg tega analitična analiza daje pomembne informacije o kvalitativnih lastnostih rešitev, kot so karakter elastičnih valov, tlačnih valov, nateznih valov, informacije o odvisnosti med hitrostjo, širino in amplitudo lokaliziranih nelinearnih valov itd.

1.2. KRATEK “VODNIK”

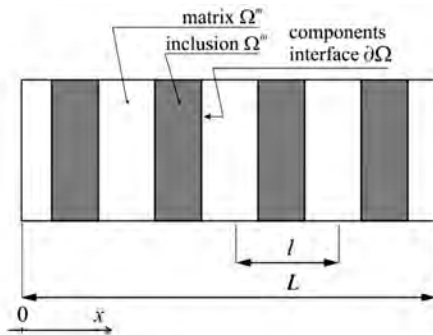
Številne študije v teoriji kompozitnih materialov temeljijo na uvajanju klasičnega modela kontinuuma ob predpostavki, da prvotno heterogeni medij lahko simuliramo s homogenim, ki izkazuje določene homogenizirane (t.i. efektivne) mehanske lastnosti. Takšen pristop naravno izhaja iz hipoteze, da naj bi bila velikost heterogenosti l bistveno manjša od makroskopske velikosti L celotnega vzorca materiala, tako da lahko v prvem približku postavimo $l/L = 0$. Vendar pa za večino praktičnih primerov tega ni mogoče predpostaviti, obenem pa v realnih kompozitnih materialih učinki mikrostrukturne skale lahko povzročijo posebne nelokalne pojave, ki jih ni mogoče predvideti v okviru teorije homogeniziranega medija.

Učinke velikostne skale je mogoče sistematično analizirati z metodo asimptotične homogenizacije. V skladu s tem pristopom so fizikalna polja v kompozitu predstavljena z asimptotičnimi razvoji potenčne vrste v parametru $\eta = l/L$, ki označuje stopnjo heterogenosti strukture. To vodi do dekompozicije rešitve na makro in mikro komponente, ki jih je mogoče ovrednotiti iz ponavljajočega se zaporedja tako imenovanih robnih problemov za posamezno celico. Teoretične osnove metode so bile razvite v [55, 70], številni novejši primeri uporabe pa so predstavljeni v [224].

Večina avtorjev se je omejila le na vrednotenje homogeniziranih koeficientov prvega reda. Člene višjega reda v statičnih problemih so obravnavali Gambin in Kröner [181], Boutin [90] ter Cherednichenko in Smyshlyaev [121]. Pokazali so, da heterogenost medija inducira neskončno zaporedje polj premikov z zaporedoma nižjimi amplitudami. Vodi tudi do

nelokalnih učinkov na makro ravni; namesto homogeniziranih ravnotežnih enačb mehanike kontinuuma dobimo nove ravnotežne enačbe, ki vključujejo prostorske odvode višjega reda in tako predstavljajo vpliv mikrostrukturne heterogenosti na makroskopsko obnašanje materiala. S kvantitativnega vidika je stopnja tega vpliva določena z velikostjo parametra η .

V dinamičnih problemih je vloga učinkov velikostne skale še pomembnejša. Ko postane valovna dolžina signala potujočega vala primerljiva s karakteristično velikostjo heterogenosti, zaporedni odboji in lomi valov na mejnih plasteh med komponentami v kompozitnih materialih vodijo do specifičnih pojavov, kot so polarizacija, disperzija in slabljenje.



Slika 1.2. Struktura obravnavanega kompozita.

Upoštevamo enoosno prečno deformacijo laminiranega kompozitnega materiala, prikazanega na sliki 1.2. Enačba statičnega ravnotežja je

$$E^a \frac{\partial^2 u^a}{\partial x^2} = -X, \quad (1.2)$$

kjer so E^a elastični moduli komponent, u^a so pomiki v smeri x , X pa je gostota volumskih sil. Tukaj in v nadaljevanju spremenljivke, indeksirane z "in", ustrezajo domeni vključkov Ω^{in} , indeksirane z "m" pa matrični domeni Ω^m , medtem ko se indeks "a" nanaša na oboje: "a" = "m", "in".

Da bi se izognili težavam, vezanim na obnašanje rešitev v neskončnosti, uvedemo regularizacijske parametre λ^a , kot sledi:

$$E^a \frac{\partial^2 u^a}{\partial x^2} = -X + \lambda^a u^a. \quad (1.3)$$

Na mejnih plasteh med komponentami $\partial\Omega$ predpostavimo pogoje idealnega stika, ki vodijo do naslednjih enakosti za napetosti

$$E^{in} \frac{\partial u^{in}}{\partial x} = E^m \frac{\partial u^m}{\partial x} \Big|_{\partial\Omega} \quad (1.4)$$

in pomike

$$u^{in} = u^m \Big|_{\partial\Omega}. \quad (1.5)$$

Prisotnost dveh različnih prostorskih skal omogoča uvedbo parametra

$$\eta = l/L. \quad (1.6)$$

ki označuje stopnjo heterogenosti kompozitne strukture. Tukaj mikroskopska velikost l ustreza dolžini periodično ponovljive osnovne celice, medtem ko makroskopsko velikost L lahko povežemo z minimalno periodo Fourierovega razvoja zunanje obremenitve (v statičnem primeru) ali z minimalno valovno dolžino potujočega signala (v dinamičnem primeru). Da bi ločili makro in mikro komponente rešitve, uvedemo tako imenovano počasno x in hitro y spremenljivko

$$x = x, \quad y = x\eta^{-1} \quad (1.7)$$

in poiščimo pomike v obliki naslednjega razvoja

$$u^a = u_0(x) + \eta u_1^a(x, y) + \eta^2 u_2^a(x, y) + \dots \quad (1.8)$$

Prvi člen u_0 predstavlja homogeni del rešitve, ki se počasi spreminja znotraj celotnega vzorca materiala in ni odvisen od hitre koordinate y ($\partial u_0 / \partial y = 0$). Naslednji členi u_i^a , $i = 1, 2, 3, \dots$ pa opisujejo lokalne variacije polja pomikov na velikostni skali heterogenosti. Mikroperiodičnost medija inducira enako periodičnost za u_i^a glede na y , tj. velja

$$u_i^a(x, y) = u_i^a(x, y + L). \quad (1.9)$$

Prostorski odvodi zavzamejo naslednjo eksplicitno obliko

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + \eta^{-1} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\eta^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \eta^{-2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (1.10)$$

Sedaj vstavimo izraze (1.7), (1.8), (1.10) v izhodiščni robni problem (1.3) – (1.5) in ga razdelimo glede na η . Enačba (1.3) da

pri η^{-2}

$$E^a \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0, \quad (1.11)$$

pri η^{-1}

$$E^a \left(2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_1^a}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (1.12)$$

pri η^0

$$E^a \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1^a}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2^a}{\partial y^2} \right) = -X + \lambda^a u_0, \quad (1.13)$$

pri η^1

$$E^a \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2^a}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_3^a}{\partial y^2} \right) = \lambda^a u_1, \quad (1.14)$$

pri η^2

$$E^a \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_3^a}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_4^a}{\partial y^2} \right) = \lambda^a u_2, \quad (1.15)$$

in tako naprej.

Enačba (1.4) da
pri η^{-1}

$$E^m \frac{\partial u_0}{\partial y} = E^m \frac{\partial u_0}{\partial y} \Big|_{\partial\Omega}, \quad (1.16)$$

pri η^0

$$E^{in} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1^{in}}{\partial y} \right) = E^m \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1^m}{\partial y} \right) \Big|_{\partial\Omega}, \quad (1.17)$$

pri η^1

$$E^{in} \left(\frac{\partial u_1^{in}}{\partial x} + \frac{\partial u_2^{in}}{\partial y} \right) = E^m \left(\frac{\partial u_1^m}{\partial x} + \frac{\partial u_2^m}{\partial y} \right) \Big|_{\partial\Omega}, \quad (1.18)$$

pri η^2

$$E^{in} \left(\frac{\partial u_2^{in}}{\partial x} + \frac{\partial u_3^{in}}{\partial y} \right) = E^m \left(\frac{\partial u_2^m}{\partial x} + \frac{\partial u_3^m}{\partial y} \right) \Big|_{\partial\Omega}, \quad (1.19)$$

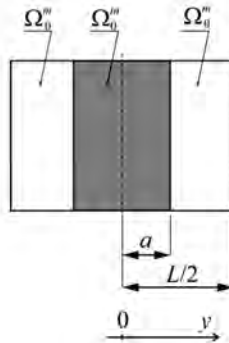
pri η^3

$$E^{in} \left(\frac{\partial u_3^{in}}{\partial x} + \frac{\partial u_4^{in}}{\partial y} \right) = E^m \left(\frac{\partial u_3^m}{\partial x} + \frac{\partial u_4^m}{\partial y} \right) \Big|_{\partial\Omega}, \quad (1.20)$$

in tako naprej.

Iz enačbe (1.5) sledi

$$u_i^{in} = u_i^m \Big|_{\partial\Omega}. \quad (1.21)$$



Slika 1.3. Periodično ponavljajoča se osnovna celica.

Enačbi (1.11) in (1.16) sta trivialno izpolnjeni, saj je $\partial u_0 / \partial y = 0$. Vse naslednje enačbe sistema (1.11) – (1.21) določajo ponavljajoče se zaporedje robnih problemov za posamezne celice; zaradi periodičnosti u_i^a (glej formulo (1.9)) lahko probleme te probleme obravnavamo znotraj le ene periodično ponovljive osnovne celice kompozitne strukture (slika 1.3). Rešitev problemov za clice omogoča ocenjevanje členov u_i^a in s tem določitev pomikov in napetostnih polj na mikroravni. Poleg tega uporaba operatorja homogenizacije

$$\left(\int_{\Omega_0^m} (\cdot) dy + \int_{\Omega_0^m} (\cdot) dy \right) L^{-1} \quad (1.22)$$

po domeni osnovne celice $\Omega_0 = \Omega_0^{in} + \Omega_0^m$ v enačbah (1.13), (1.14), (1.15) in tako naprej daje možnost izpeljave makroskopskih ravnotežnih enačb različnih redov. Pri izračunu integralov v operatorju homogenizacije je treba upoštevati, da enačbe (1.16) - (1.20) vodijo do

$$E^{in} \int_{\Omega_0^{in}} \frac{\partial^2 u_i^{in}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_{i+1}^{in}}{\partial y^2} dy + E^m \int_{\Omega_0^m} \frac{\partial^2 u_i^m}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_{i+1}^m}{\partial y^2} dy = 0. \quad (1.23)$$

Robni pogoji za u_i^a , morajo biti takšni, da polje globalnih pomikov (1.8) izpolnjuje določene makroskopske pogoje pri $x = 0$ in $x = L$, na primer

$$u^m = U_1|_{x=0}, \quad u^m = U_2|_{x=L}. \quad (1.24)$$

Po drugi strani pa lahko enačbe periodičnosti (1.9) nadomestimo z ničelnimi robnimi pogoji v središču in na zunanjem robu osnovne celice:

$$u_i^{in} = 0|_{y=0}, \quad u_i^{in} = 0|_{y=\pm \frac{L}{2}}. \quad (1.25)$$

Makroskopske pogoje (1.24) lahko uporabimo za homogeno komponento u_0 :

$$u_0 = U_1|_{x=0}, \quad u_0 = U_2|_{x=L}. \quad (1.26)$$

Robni pogoji (1.26) skupaj z makroskopsko ravnotežno enačbo določajo makroskopski robni problem za u_0 .

Opozoriti je treba, da opisani postopek ne predvideva robnih učinkov, ki se pojavljajo v bližini zunanjih robov realnih kompozitnih materialov. Običajno lahko to stanje obravnavamo kot kvazistatično in ga ocenimo z dobro poznanimi metodami [19].

Problem prvega reda za celice definirajo enačbe (1.12), (1.17), (1.22) in (1.25). Integracija enačb (1.12) omogoča pridobitev eksaktne analitične rešitve:

$$\begin{aligned} u_1^{in} &= A_1 y \frac{\partial u_0}{\partial x}, \\ u_1^m &= \left(B_1 y + \frac{1}{2} C_1 L \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \text{pri } y > 0, \\ u_1^m &= \left(B_1 y - \frac{1}{2} C_1 L \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \text{pri } y < 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

kjer so $A_1 = -\frac{(1-c)(E^{in}-E^m)}{(1-c)E^{in}+cE^m}$, $B_1 = \frac{c(E^{in}-E^m)}{(1-c)E^{in}+cE^m}$, $C_1 = -B_1$, c je prostorninski delež vključkov, $c = 2a/L$.

Izrazi, ki vsebujejo u_2^a , so izločeni z uporabo pogoja (1.23). Kot rezultat izpeljemo makroskopsko ravnotežno enačbo reda $O(\eta^0)$

$$\langle E \rangle_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = -X + \langle \lambda \rangle u_0, \quad (1.28)$$

kjer sta

$$\langle E \rangle_0 = \frac{E^{in}E^m}{(1-c)E^{in}+cE^m}, \quad \langle \lambda \rangle = (1-c)\lambda^m + c\lambda^{in} \quad (1.29)$$

efektivna modula reda $O(\eta^0)$.

Izraz (1.29) sovпада z dobro znano formulo za efektivni modul elastičnosti laminiranega kompozitnega materiala, ki ga dobimo s preprostim aritmetičnim povprečenjem voljnosti materialov posameznih komponent:

$$\langle E \rangle_0 = \left(\frac{c}{E^{in}} + \frac{1-c}{E^m} \right)^{-1}. \quad (1.30)$$

To je tako imenovano Reussovo povprečenje in znano je, da daje spodnjo mejo za dejanski efektivni parameter.

Rešitev problema za celice (1.13), (1.18), (1.21), (1.25) je sledeča pri $y > 0$:

$$\begin{aligned} u_2^{in} &= \left[-\frac{1}{2} \left(1 + 2A_1 - \frac{\lambda^{in}}{\langle \lambda \rangle} \frac{\langle E \rangle_0}{E^{in}} \right) y^2 + \frac{1}{4} A_2 L y \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \\ u_2^m &= \left[-\frac{1}{2} \left(1 + 2B_1 - \frac{\lambda^m}{\langle \lambda \rangle} \frac{\langle E \rangle_0}{E^m} \right) y^2 + \frac{1}{4} B_2 L y + \frac{1}{8} C_2 L^2 \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

pri $y < 0$:

$$\begin{aligned} u_2^{in} &= \left[-\frac{1}{2} \left(1 + 2A_1 - \frac{\lambda^{in}}{\langle \lambda \rangle} \frac{\langle E \rangle_0}{E^{in}} \right) y^2 - \frac{1}{4} A_2 L y \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \\ u_2^m &= \left[-\frac{1}{2} \left(1 + 2B_1 - \frac{\lambda^m}{\langle \lambda \rangle} \frac{\langle E \rangle_0}{E^m} \right) y^2 - \frac{1}{4} B_2 L y + \frac{1}{8} C_2 L^2 \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

kjer

$$\begin{aligned}
A_2 &= -\frac{c(1-c)E^m(E^{in}\lambda^{in}-E^m\lambda^m)}{[(1-c)\lambda^m+c\lambda^{in}][(1-c)E^{in}+cE^m]^2}, \\
B_2 &= c\frac{(1-c)[(1+2c)\lambda^{in}-2c\lambda^m](E^{in})^2}{[(1-c)\lambda^m+c\lambda^{in}][(1-c)E^{in}+cE^m]^2}- \\
&\quad c\frac{\left\{[(1-3c+4c^2)\lambda^m-4c^2\lambda^{in}]E^{in}E^m+2c[(1-c)\lambda^m+c\lambda^{in}](E^m)^2\right\}}{[(1-c)\lambda^m+c\lambda^{in}][(1-c)E^{in}+cE^m]^2}, \\
C_2 &= -c^2\frac{(1-c)(\lambda^{in}-\lambda^m)(E^{in})^2}{[(1-c)\lambda^m+c\lambda^{in}][(1-c)E^{in}+cE^m]^2}- \\
&\quad c^2\frac{[(1-2c)\lambda^m+2c\lambda^{in}]E^{in}E^m-[(1-c)\lambda^m+c\lambda^{in}](E^m)^2}{[(1-c)\lambda^m+c\lambda^{in}][(1-c)E^{in}+cE^m]^2}.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Z vstavljanjem izrazov (1.31) v enačbo (1.14) in izvedbo homogenizacije dosežemo, da se vsi integrali in operatorju homogenizacije izničijo. Zato v obravnavanem problemu komponente pomikov u_2^0 ne prispevajo k makroskopski enačbi.

Rešitev problema za celice (1.14), (1.19), (1.21), (1.25) je sledeča pri $y > 0$:

$$\begin{aligned}
u_3^{in} &= \left\{ \frac{1}{6} \left[2 + 3A_1 + (A_1 - 2) \frac{\lambda^{in} \langle E \rangle_0}{\langle \lambda \rangle E^{in}} \right] y^3 - \frac{1}{4} A_2 L y^2 + \frac{1}{24} A_3 L^2 y \right\} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}, \\
u_3^m &= \left\{ \frac{1}{6} \left[2 + 3B_1 + (B_1 - 2) \frac{\lambda^m \langle E \rangle_0}{\langle \lambda \rangle E^m} \right] y^3 - \frac{1}{4} \left(B_2 + C_1 - C_1 \frac{\lambda^m \langle E \rangle_0}{\langle \lambda \rangle E^m} \right) L y^2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{24} B_3 L^2 y + \frac{1}{48} C_3 L^3 \right\} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}.
\end{aligned}$$

pri $y < 0$: (1.33)

$$\begin{aligned}
u_3^{in} &= \left\{ \frac{1}{6} \left[2 + 3A_1 + (A_1 - 2) \frac{\lambda^{in} \langle E \rangle_0}{\langle \lambda \rangle E^{in}} \right] y^3 + \frac{1}{4} A_2 L y^2 + \frac{1}{24} A_3 L^2 y \right\} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}, \\
u_3^m &= \left\{ \frac{1}{6} \left[2 + 3B_1 + (B_1 - 2) \frac{\lambda^m \langle E \rangle_0}{\langle \lambda \rangle E^m} \right] y^3 + \frac{1}{4} \left(B_2 + C_1 - C_1 \frac{\lambda^m \langle E \rangle_0}{\langle \lambda \rangle E^m} \right) L y^2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{24} B_3 L^2 y - \frac{1}{48} C_3 L^3 \right\} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3},
\end{aligned}$$

kjer

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{c(1-c)E^m(E^{in}\lambda^{in} - E^m\lambda^m)[(1-c)E^{in} - cE^m]}{[(1-c)\lambda^m + c\lambda^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^3}, \\
B_3 &= c \frac{(1-c)[3c^2\lambda^m + (1-c)(1+3c)\lambda^{in}](E^{in})^3}{[(1-c)\lambda^m + c\lambda^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^3} \\
&\quad - c \frac{[(1+c+4c^2-9c^3)\lambda^m + c(1-c)(2+9c)\lambda^{in}](E^{in})^2E^m}{[(1-c)\lambda^m + c\lambda^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^3} \\
&\quad - c^2 \frac{[(1-2c+9c^2)\lambda^m - 9c^2\lambda^{in}]E^{in}(E^m)^2 + c[(1-c)\lambda^m + c\lambda^{in}](E^m)^3}{[(1-c)\lambda^m + c\lambda^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^3}, \\
C_3 &= -c^2 \frac{(1-c)[c\lambda^m + (1-c)\lambda^{in}](E^{in})^3}{[(1-c)\lambda^m + c\lambda^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^3} \\
&\quad - c^2 \frac{[(1+c-3c^2)\lambda^m + (1-c)(1-3c)\lambda^{in}](E^{in})^2E^m}{[(1-c)\lambda^m + c\lambda^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^3} + \\
&\quad - c^3 \frac{[(1-c)\lambda^m + c\lambda^{in}](E^m)^3}{[(1-c)\lambda^m + c\lambda^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^3}, \tag{1.34}
\end{aligned}$$

Z uporabo operatorja homogenizacije za enačbi (1.13), (1.15) in z združevanjem rezultatov pridemo do makroskopske ravnotežne enačbe reda $O(\eta^2)$:

$$\langle E \rangle_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \eta^2 L^2 \langle E \rangle_2 \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} = -X + \langle \lambda \rangle u_0, \tag{1.35}$$

kjer

$$\langle E \rangle_2 = \frac{1}{48} \frac{c^2(1-c)^2 E^{in} E^m (E^{in}\lambda^{in} - E^m\lambda^m)^2}{[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}]^2 [(1-c)E^{in} + cE^m]^3} \tag{1.36}$$

lahko obravnavamo kot efektivni modul reda $O(\eta^2)$.

Če predpostavimo, da je $\lambda^{in} = \lambda^m$, potem

$$\langle E \rangle_2 = \frac{1}{48} \frac{c^2(1-c)^2 E^{in} E^m (E^{in} - E^m)^2}{[(1-c)E^{in} + cE^m]^3}, \tag{1.37}$$

Drugi člen na levi strani enačbe (1.35) predstavlja vpliv učinka mikrostrukturne skale na obnašanje materiala na makroskali. Preprosto se lahko opazi, da učinek velikostne skale izgine v primeru homogenega materiala ($c = 0, c = 1$ ali $E^{in} = E^m$). Analiza razmerja med drugim in prvim konstitutivnim členom v enačbi (1.35) omogoča ovrednotenje obsega uporabnosti postopka homogenizacije.

Zdaj pa se usmerimo v obravnavo dinamičnega problema za laminiran kompozitni material, ki ga popisujejo naslednje parcialne diferencialne enačbe:

$$E^a \frac{\partial^2 u^a}{\partial x^2} = \rho^a \frac{\partial^2 u^a}{\partial t^2}, \tag{1.38}$$

kjer so ρ^a masne gostote komponent.

Pogoje popolnega stika med matrico in vključki predstavljata enačbi (1.5) in (1.6).

Po zgoraj predstavljenem algoritmu uvedemo parameter η (glej enačbo (1.6)), počasno x in hitro y koordinato (1.7) in poiščemo pomike z asimptotičnim razvojem (1.8). Razdelitev enačbe (1.38) glede na potence η da:

pri η^{-2}

$$E^a \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0, \quad (1.39)$$

pri η^{-1}

$$E^a \left(2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_1^a}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (1.40)$$

pri η^0

$$E^a \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1^a}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2^a}{\partial y^2} \right) = \rho^a \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad (1.41)$$

pri η^1

$$E^a \left(\frac{\partial^2 u_1^a}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2^a}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_3^a}{\partial y^2} \right) = \rho^a \frac{\partial^2 u_1^a}{\partial t^2}, \quad (1.42)$$

pri η^2

$$E^a \left(\frac{\partial^2 u_2^a}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_3^a}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_4^a}{\partial y^2} \right) = \rho^a \frac{\partial^2 u_2^a}{\partial t^2} \quad (1.43)$$

in tako naprej.

Nabor enačb (1.16) – (1.20) in enačb (1.21) – (1.26) ostaja enak kot v statičnem primeru. V dinamičnem problemu morajo makroskopske robne pogoje (1.26) spremljati določeni začetni pogoji, npr.

$$u_0 = U_3|_{t=0}, \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} = U_4|_{t=0}. \quad (1.44)$$

Enačbi (1.16) in (1.39) sta trivialno izpolnjeni, saj je $\partial u_0 / \partial y = 0$. Problem prvega reda za celico definirajo enačbe (1.17), (1.21), (1.25), (1.40) in tako sovpadе z problemom prvega reda za celico v statičnem primeru. Rešitev za u_1^a je podana z izrazi (1.27). Z vstavljanjem u_1^a v enačbo (1.41) in z uporabo operatorja homogenizacije

$$\left(\int_{\Omega_0^a} (\cdot) dy + \int_{\Omega_0^a} (\cdot) dy \right) L^{-1}, \quad (1.45)$$

lahko izpeljemo makroskopsko gibalno enačbo reda $O(\eta^0)$:

$$\langle E \rangle_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \langle \rho \rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad (1.46)$$

kjer je $\langle E \rangle_0$ efektivni modul reda $O(\eta^0)$ določen s formulo (1.29), $\langle \rho \rangle$ pa homogenizirana masna gostota kompozitnega materiala, $\langle \rho \rangle = (1 - c)\rho^m + c\rho^{in}$.

Rešitev problema za celico (1.18), (1.21), (1.25), (1.41) je sledeča pri $y > 0$:

$$\begin{aligned} u_2^{in} &= \left[-\frac{1}{2} \left(1 + 2A_1 - \frac{\rho^{in} \langle E \rangle_0}{\langle \rho \rangle E^{in}} \right) y^2 + \frac{1}{4} A_2 L y \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \\ u_2^m &= \left[-\frac{1}{2} \left(1 + 2B_1 - \frac{\rho^m \langle E \rangle_0}{\langle \rho \rangle E^m} \right) y^2 + \frac{1}{4} B_2 L y + \frac{1}{8} C_2 L^2 \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

pri $y < 0$:

$$\begin{aligned} u_2^{in} &= \left[-\frac{1}{2} \left(1 + 2A_1 - \frac{\rho^{in} \langle E \rangle_0}{\langle \rho \rangle E^{in}} \right) y^2 - \frac{1}{4} A_2 L y \right] \frac{d^2 u_0}{dx^2}, \\ u_2^m &= \left[-\frac{1}{2} \left(1 + 2B_1 - \frac{\rho^m \langle E \rangle_0}{\langle \rho \rangle E^m} \right) y^2 - \frac{1}{4} B_2 L y + \frac{1}{8} C_2 L^2 \right] \frac{d^2 u_0}{dx^2}, \end{aligned}$$

kjer

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{c(1-c)E^m(E^{in}\rho^{in} - E^m\rho^m)}{[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^2}, \\ B_2 &= c \frac{(1-c)[(1+2c)\rho^{in} - 2c\rho^m](E^{in})^2}{[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^2} - \\ &= c \frac{[(1-3c+4c^2)\rho^m - 4c^2\rho^{in}]E^{in}E^m + 2c[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}](E^m)^2}{[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^2}, \\ C_2 &= -c^2 \frac{(1-c)(\rho^{in} - \rho^m)(E^{in})^2}{[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^2} - \\ &= c^2 \frac{[(1-2c)\rho^m + 2c\rho^{in}]E^{in}E^m - [(1-c)\rho^m + c\rho^{in}](E^m)^2}{[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^2}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Z vstavljanjem izrazov (1.47) v enačbo (1.42) in izvedbo homogenizacije dosežemo, da se vsi integrali v operatorju homogenizacije izničijo. Zato v obravnavanem problemu komponente pomika u_2^a ne prispevajo k makroskopski enačbi. Sta pa Boutin in Auriault [92] pokazala, da se takšen doprinos pojavlja pri dinamičnih problemih za anizotropne kompozitne materiale, kjer makroskopska enačba reda $O(\eta^1)$ opisuje pojav polarizacije.

Rešitev celičnega problema (1.19), (1.21), (1.25), (1.42) je sledeča pri $y > 0$:

$$\begin{aligned}
u_3^{in} &= \left\{ \frac{1}{6} \left[2 + 3A_1 + (A_1 - 2) \frac{\rho^{in} \langle E \rangle_0}{\langle \rho \rangle E^{in}} \right] y^3 - \frac{1}{4} A_2 L y^2 + \frac{1}{24} A_3 L^2 y \right\} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}, \\
u_3^m &= \left\{ \frac{1}{6} \left[2 + 3B_1 + (B_1 - 2) \frac{\rho^m \langle E \rangle_0}{\langle \rho \rangle E^m} \right] y^3 - \frac{1}{4} \left(B_2 + C_1 - C_1 \frac{\rho^m \langle E \rangle_0}{\langle \rho \rangle E^m} \right) L y^2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{24} B_3 L^2 y + \frac{1}{48} C_3 L^3 \right\} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3},
\end{aligned}$$

pri $y < 0$: (1.49)

$$\begin{aligned}
u_3^{in} &= \left\{ \frac{1}{6} \left[2 + 3A_1 + (A_1 - 2) \frac{\rho^{in} \langle E \rangle_0}{\langle \rho \rangle E^{in}} \right] y^3 + \frac{1}{4} A_2 L y^2 + \frac{1}{24} A_3 L^2 y \right\} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}, \\
u_3^m &= \left\{ \frac{1}{6} \left[2 + 3B_1 + (B_1 - 2) \frac{\rho^m \langle E \rangle_0}{\langle \rho \rangle E^m} \right] y^3 + \frac{1}{4} \left(B_2 + C_1 - C_1 \frac{\rho^m \langle E \rangle_0}{\langle \rho \rangle E^m} \right) L y^2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{24} B_3 L^2 y - \frac{1}{48} C_3 L^3 \right\} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3},
\end{aligned}$$

kjer

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{c(1-c)E^m(E^{in}\rho^{in} - E^m\rho^m)[(1-c)E^{in} - cE^m]}{[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^3}, \\
B_3 &= c \frac{(1-c)[3c^2\rho^m + (1-c)(1+3c)\rho^{in}](E^{in})^3}{[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^3} - \\
&\quad c \frac{[(1+c+4c^2-9c^3)\rho^m + c(1-c)(2+9c)\rho^{in}](E^{in})^2 E^m}{[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^3} - \\
&\quad c^2 \frac{[(1-2c+9c^2)\rho^m - 9c^2\rho^{in}]E^{in}(E^m)^2}{[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^3} - \\
&\quad c^3 \frac{[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}](E^m)^3}{[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^3}, \\
C_3 &= -c^2 \frac{(1-c)[c\rho^m + (1-c)\rho^{in}](E^{in})^3}{[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^3} + \\
&\quad c^2 \frac{[(1+c-3c^2)\rho^m + (1-c)(1-3c)\rho^{in}](E^{in})^2 E^m}{[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^3} - \\
&\quad c^2 \frac{[(1-c-3c^2)\rho^m + 3c^2\rho^{in}]E^{in}(E^m)^2}{[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^3} + \\
&\quad c^3 \frac{[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}](E^m)^3}{[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}][(1-c)E^{in} + cE^m]^3}.
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Z uporabo operatorja homogenizacije v enačbah (1.41), (1.43) in združevanjem rezultatov pridemo do makroskopske gibalne enačbe reda $O(\eta^2)$:

$$\langle E \rangle_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \eta^2 L^2 \langle E \rangle_2 \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} = \langle \rho \rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}. \quad (1.51)$$

Kjer je

$$\langle E \rangle_2 = \frac{1}{48} \frac{c^2(1-c)^2 E^{in} E^m (E^{in} \rho^{in} - E^m \rho^m)^2}{[(1-c)\rho^m + c\rho^{in}]^2 [(1-c)E^{in} + cE^m]^3} \quad (1.52)$$

efektivni modul reda $O(\eta^2)$ v dinamičnem primeru.

Drugi člen v enačbi (1.51) predstavlja vpliv učinka mikrostrukturne skale, ki vodi do pojava disperzije na makroravni. Če sta impedanci komponent enaki ($E^{in}\rho^{in} = E^m\rho^m$), potem $\langle E \rangle_2$ izgine in se makroskopska enačba (1.51) spremeni v nedisperzivno obliko (1.46). S fizikalnega vidika to pomeni, da na mejnih plasteh med komponentami ni odbojev valov.

Ob predpostavki $\rho^{in} = \rho^m$ dobimo (1.37). Tudi izraz (1.52) sovпада s tistimi, dobljenimi v [120, 170, 171, 399]. Prav tako kot je prikazano v podpoglavju 2.3, prvi členi v razvoju rešitve eksaktne disperzijske enačbe (ki jo lahko dobimo za obravnavani problem) v vrsto za parameter η sovpadajo s tistimi, dobljenimi z asimptotično homogenizacijsko metodo.

V delu [399] je bila rešitev enačbe (1.52) primerjana z numerično rešitvijo originalnega problema. Izbrana je bila Gaussova začetna motnja. Razlika med numerično rešitvijo eksaktnega in homogeniziranega problema postane dovolj velika šele pri zelo velikih časih.

Presenetljivo je, da nekateri matematiki predstavitev oblike (1.51) imenujejo "kriminalni algoritem", ker zmeša različne potence parametra η v eno homogenizirano enačbo višjega reda [10, 269, 399]. Hkrati je treba opozoriti, da imajo takšne enačbe višjo stopnjo aproksimacije [10].

Rešitev (1.52) kaže, da v tem primeru homogenizacijski pristop daje oceno zgornje meje za lastne vrednosti. Ker gre za konstruktivno oceno, je zanimivo raziskati, kaj je znanega o apriornih ocenah. V splošnem primeru lahko problem konstruiranja takšnih ocen formuliramo na naslednji način. Za številne probleme so lastne vrednosti minimumi nekaterih kvadratnih funkcionalov. Poleg tega začetna formulacija problema pogosto izkazuje simetrijo, medtem ko so spremenljivi koeficienti kvadratnih form asimetrični. Študija obnašanja minimumov takih funkcionalov s spremembo stopnje asimetrije koeficienta je bila izvedena v [207, 473, 475]. V [475] je bilo za širok nabor problemov pokazano, da se lastne frekvence nihanj ne zmanjšajo, ko je gostota simetrizirana. V [207, 473] je bil ta rezultat posplošen na simetrizacijo togosti originalnega sistema.

1.3. ANALITIČNE IN NUMERIČNE REŠITVE V TEORIJ KOMPozITNIH MATERIALOV

"The speed of computation as a limiting factor in simulating physical systems has largely been replaced by the difficulty of extracting useful information from large data sets".

J. Guckenheimer [191]

Živimo v dobi velepodatkov (Big Data), umetne inteligence (AI), umetnih nevronske mreže (ANN) in zmogljivih komercialnih kod. Veliki nabori podatkov postajajo vse bolj dostopni in pomembni v znanosti in tehnologiji. Vendar pa naša sposobnost razumevanja potekajočih procesov tako kot prej temelji na preprostih modelih [35]. Kot pred 50 leti še vedno drži »Namen računalništva je vpogled, ne številke« [200]. Po našem mnenju ne gre za vprašanje "asimptotično ali računalniško (numerično) modeliranje". Obe znanstveni smeri sta enako pomembni [14, 15].

Kot je prikazano v [13], je brez jasnega razumevanja asimptotične narave katerega koli modela uporabne matematike nemogoče pravilno določiti njegovo mesto v hierarhiji opisovanja različnih vidikov pojava. Zmogljivejši kot so numerični algoritmi, bolj pomembna postane vloga ničtega približka. Vsi ti algoritmi zahtevajo ustrezna semena za inicializacijo aproksimacije. Pri izrazito nelinearnih problemih je pomembno vedeti, v bližini katerih semen gradimo rešitev. V nasprotnem primeru bo najnaprednejši numerični algoritem nestabilen, rešitev bo lahko divergirala ali pa bomo dobili parazitsko rešitev. Asimptotične rešitve pogosto omogočajo iskanje primernih semen za inicializacijo.

»Ko združimo zahtevne algoritme v knjižnice in jih umestimo v pakete za lažjo uporabo, ustvarimo de facto standarde, ki olajšajo ignoriranje numerične analize. Obstoječo bazo smatramo za statično in vlagamo v razvoj okolij za reševanje problemov in višjih jezikov. To je sicer potrebno, vendar pa moramo ohraniti tudi naložbo v nadaljnje raziskave samih algoritmov« [192]. Povečanje števila programskih paketov, razvitih na osnovi uporabnikom neznanih principov, ima za posledico povečanje možnosti, da spregledamo njihove omejitve in glavne sistemske napake.

S tega vidika asimptotične metode niso samo uporabno orodje za analizo, ampak zagotavljajo tudi pomembne in uporabne primerjalne rešitve.

Možnost pridobivanja informacij se je v zadnjih letih močno povečala. To pomeni razpoložljivost kakovostnih orodij za njihovo varno hrambo in preoblikovanje na človeku razumljiv način. Zadnja zahteva se nanaša na: a) konstrukcijo nizkodimenzionalnih modelov; b) združevanje visokodimenzionalnih informacij; c) ekstrakcijo najpomembnejših singularnosti v obnašanju sistema (na primer bifurkacijskih točk) itd. Najprimernejša orodja za realizacijo omejenih zahtev so povezana z analitičnimi, še posebej z asimptotičnimi metodami.

Diskretno numerično reševanje se nanaša na aplikacije končnih elementov in diferenčnih metod. Te metode so močne in njihova uporaba je smiselna, ko so geometrija in fizikalni parametri določeni. Mnogi strokovnjaki dojemajo nedotaknjen računski blok (paket) kot eksaktno formulo: samo zamenjajte podatke in dobite rezultat! Vendar pa polna vreča števil ni tako uporabna kot analitična formula. Izključno numerični postopki so praviloma neuspešni za kritične parametre, zato je analitično ujemanje z asimptotičnimi rešitvami lahko koristno celo za numerične izračune [457]. Poleg tega so numerični paketi včasih predstavljeni kot zdravilo za vse bolezni. Ponovno je vredno poudariti, da so numerične rešitve uporabne, če nas zanima fiksna geometrija in fiksni nabor parametrov za inženirske namene. Analitične formule so uporabne za strokovnjake, ki razvijajo kode za kompozite, zlasti za optimalno načrtovanje. Govorimo o ustvarjanju visoko specializiranih kod, ki omogočajo reševanje ozkega razreda problemov z izjemno veliko hitrostjo. »Treba je poudariti, da pri problemu optimizacije oblike zahteve po točnosti niso zelo visoke. Ključno vlogo igra sposobnost modela, da predvidi, kako se bo sistem odzval na spremembo konstrukcijskih parametrov. Ta kombinacija zahtev odpira pot k renesansi aproksimativnih analitičnih in polanalitičnih modelov, ki so jih v zadnjih desetletjih praktično nadomestile »univerzalne kode« [169].

Asimptotični pristopi nam omogočajo definiranje res pomembnih parametrov sistema. Pomembni parametri pri robnem problemu so tisti, ki ob prisotnosti manjše motnje povzročijo velike razlike v rešitvah. Z drugimi besedami, asimptotične metode omogočajo ovrednotenje občutljivosti sistema. Ni potrebno posebej omenjati, da so v resničnih problemih parametri kompozitov znani z določeno (pogosto ne zelo visoko) stopnjo točnosti. To povzroča priljubljenost različnih vrst presoj v inženirski praksi. Poleg tega je mehki objektno usmerjen (v nekem smislu robusten) model uporaben za inženirja. Večparametrični modeli imajo redko to kakovost. »Model lahko naredite bolj zapleten in bolj blizu realnosti ali pa ga naredite enostavnejšega in lažjega za uporabo. Samo najbolj naiven znanstvenik verjame, da je popoln model tisti, ki predstavlja resničnost« [186]. Ne smemo pozabiti, da so za izdelavo večparametričnih modelov potrebne zelo podrobne informacije o stanju sistema. Pridobivanje takšnih informacij je za inženirja zaradi številnih objektivnih razlogov pogosto zelo težko ali pa zahteva veliko časa in denarja. Poudariti je treba, da najbolj naraven način konstruiranja dovolj natančnih manjparametričnih modelov temelji na uporabi asimptotičnih metod.

1.4. NEKAJ SPLOŠNIH REZULTATOV TEORIJE HOMOGENIZACIJE

V preteklih letih so se metode homogenizacije izkazale za zmogljive tehnike za proučevanje heterogenih medijev. Homogenizacijski pristop se lahko uporablja za lokalne in integracijske funkcionale [338]. Za analizo navadnih diferencialnih enačb (NDE) in parcialnih diferencialnih enačb (PDE) klasična orodja vključujejo razvoje na več skalah [70] ali Bakhvalov ansatz [55, 345], ki so običajno v uporabi.

Pristop, ki temelji na Fourierovi analizi, je bil predlagan v [128]. Ta metoda deluje na naslednji način. Najprej se prvotni operator transformira v ekvivalentni operator v Fourierovem prostoru. Standardna Fourierova vrsta se uporablja za razvoj koeficientov operatorja, Fourierova transformacija pa se uporablja za dekompozicijo integralov. Nato Fourierove transformirane integralov razvijemo z uporabo ustreznega razvoja na dveh skalah, homogenizirani problem pa v končnem izpeljemo, ko zanemarimo člene višjega reda v zgornjih razvojih ob premikanju k meji, ko gre perioda proti nič.

Druga uporaba Fourierove analize za homogenizacijo NDE in PDE je bila predlagana v [34]. Ta različica homogenizacije temelji na asimptotičnih rezultatih Vishika in Lyusternika za NDE in PDE s hitro spreminjajočimi se koeficienti in robnimi pogoji [451]. Omenimo tudi članke o homogenizaciji z uporabo negladkih transformacij [365, 366].

G- in Γ -variacijske teorije konvergence [132, 338] se uporabljajo za identifikacijo asimptotične meje za integracijske funkcionale.

V naši knjigi obravnavamo lokalne operatorje, tj. PDE in NDE s hitro oscilirajočimi ali periodično nezveznimi koeficienti, in uporabljamo metodo homogenizacije, ki temelji na razvoju na večih skalah.

Matematična metoda homogenizacije omogoča pridobitev številnih splošnih rezultatov, uporabnih za probleme, obravnavane v naši knjigi [48–52, 56, 149, 150].

V teoriji kompozitov je pomembno vprašanje variacijska formulacija problemov. V [48] sta rešena naslednja problema. (1) Dokazano je, da za določeno interpretacijo Eulerjeve enačbe za stacionarno točko periodičnega funkcionala v aproksimaciji poljubnega reda točnosti glede na parameter η Eulerjeva enačba ustreza nekemu "povprečnemu" funkcionalu. (2) Naj bo periodični medij tak, da za nekatere procese v njem obstaja integral energije. V tem primeru ima homogenizirana enačba tudi integral energije.

Pomembno vprašanje je, ali je možen pojav disipacije v kompozitu, sestavljenem iz komponent brez disipacije. Pri kompozitih s periodično strukturo do disipacije ne pride [48]. V naključnih kompozitih pride do viskoznosti in s tem do disipacije, tudi če je ni v vseh komponentah [50].

Problemi homogenizacije za zmesi so strogo matematično obravnavani v [51, 56]. Utemeljene so povprečne enačbe, ki opisujejo širjenje majhnih dolgovalovnih motenj v močno nehomogeni mešanici šibko viskoznih kapljev in plinov. Takšne enačbe so bile predhodno sestavljene in utemeljene za mešanice trdnih snovi. Pod nekaterimi dodatnimi omejitvami na določujoče parametre medija so povprečne enačbe upravičene za mešanice naključne strukture in pod temi pogoji se povprečne enačbe izkažejo za enake kot za periodični primer.

Enačbe dinamike kompozitov periodičnih ali naključnih struktur, sestavljenih iz šibko stisljivih elastičnih komponent, so bile obravnavane v [49]. Ob določenih omejitvah za odločilne parametre (razmerje med linearno skalo nehomogenosti in linearno skalo motenj ter razmerje Laméjevih koeficientov) so povprečne enačbe upravičene. Te enačbe so zapisane eksplicitno in opisujejo zlasti učinek zmanjšanja hitrosti zvoka v kompozitih, sestavljenih iz izrazito heterogenih materialov.

Oglejmo si nenavaden "paradoks", opisan v [52]. Obravnavana sta naslednja primera. V prvem primeru se homogenizacija uporablja za medije s prazninami. V drugem primeru se postopek homogenizacije uporabi za medije z mehкими vključki, nato pa se v homogeniziranih izrazih predpostavi, da so značilnosti vključkov enake nič. Tako dobljena homogenizirana sistema ne sovpadata.

2 Širjenje valovanja v večslojnih kompozitih: linearni problemi

V poglavju je obravnavano enodimenzionalno širjenje linearnih valov v nehomogenih medijih. Uporabljena je metoda homogenizacije višjega reda za neskončni prostor. Nato je uporabljena Bloch-Floquetova metoda za izpeljavo disperzijske enačbe v analitični obliki. Raziskanih je nekaj limitnih primerov. Podana sta dva numerična zgleda, kjer so rezultati grafično predstavljeni v obliki disperzijskih krivulj in koeficientov dušenja valov za kompozite jeklo-aluminij in CE plastika-jeklo.

2.1. ENODIMENZIONALNI (1D) DINAMIČNI PROBLEM

Procesi širjenja valov v homogenem in nehomogenem mediju so kvalitativno različni. V kompozitnih materialih pomenita lokalni odboj in lom na mejah med komponentami disperzijo valov na mikronivoju. Pojav disperzije lahko opišemo s pomočjo metode homogenizacije višjega reda, s čimer lahko dobimo zanesljivo rešitev problema dolgovalovne analize. Če se valovna dolžina zmanjša in postane primerljiva z dimenzijo notranje strukture, se pojavijo prehodni in zaporni pasovi, zato ima kompozitni material vlogo valovnega filtra. Omenjeni pojav je mogoče opisati s pomočjo odsekoma homogenih modelov, zlasti z uporabo Bloch-Floquetove metode [82, 176].

Oglejmo si problem širjenja elastičnih valov v dvoslojnem kompozitu, sestavljenem iz komponent $\Omega^{(1)}$ in $\Omega^{(2)}$ (slika 2.1). Vzemimo, da se vzdolžni val širi v smeri, ki je pravokotna na ravnino slojev, napetosti pa naj bodo odvisne od koordinate x . Vodilne enačbe imajo naslednjo obliko

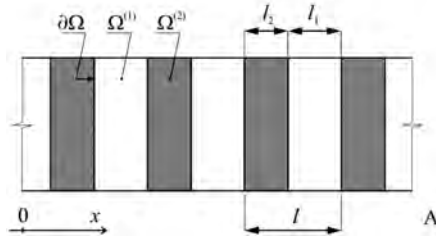
$$E^{(a)} \frac{\partial^2 u^{(a)}}{\partial x^2} = \rho^{(a)} \frac{\partial^2 u^{(a)}}{\partial t^2}. \quad (2.1)$$

Na mejah med komponentami predpostavimo idealen stik, tj.

$$\left\{ u^{(1)} = u^{(2)} \right\} \Big|_{\partial\Omega}, \quad (2.2)$$

$$\left\{ E^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = E^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \right\} \Big|_{\partial\Omega}. \quad (2.3)$$

1D problem, opisan z enačbami (2.1) - (2.3), dopušča, da najdemo eksaktno disperzijsko enačbo. Zato ga lahko obravnavamo kot referenčni primer za raziskovanje področja uporabnosti metode homogenizacije višjega reda. Praktična prednost homogenizacijskega pristopa se izkaže v primerih, ko eksaktne disperzijske enačbe niso znane (2D in 3D problemi, nelinearni kompoziti itd.).



Slika 2.1. Slojeviti kompozit.

2.2. METODA HOMOGENIZACIJE VIŠJEGA REDA

Začnimo z uvedbo majhnega parametra $\eta = l / L$, kjer l pomeni velikost osnovne celice periodičnega kompozita, L pa opisuje valovno dolžino. Uvedimo "počasno" spremenljivko x in "hitro" spremenljivko $y = \eta^{-1}x$, in zapišimo

$$\partial/\partial x = \partial/\partial x + \eta^{-1}\partial/\partial y. \quad (2.4)$$

Iskano rešitev predstavimo v obliki naslednje potenčne vrste

$$u^{(a)} = u_0(x) + \eta u_1^{(a)}(x, y) + \eta^2 u_2^{(a)}(x, y) + \dots, \quad (2.5)$$

kjer je $u_i^{(a)}(x, y) = u_i^{(a)}(x, y + L)$, $i = 1, 2, 3, \dots$.

Ob predpostavki, da imajo komponente lastnosti enakega velikostnega reda: $E^{(2)}/E^{(1)} = O(\eta^0)$, $\rho^{(2)}/\rho^{(1)} = O(\eta^0)$, izvedemo razcepitev problema robnih pogojev (2.1) – (2.3) glede na η . Posledično dobimo zaporedje problemov robnih vrednosti na osnovni celici, ki vključujejo mikroskopske enačbe gibanja:

$$E^{(a)} \left(\frac{\partial^2 u_{i-2}^{(a)}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{i-1}^{(a)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_i^{(a)}}{\partial y^2} \right) = \rho^{(a)} \frac{\partial^2 u_{i-2}^{(a)}}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

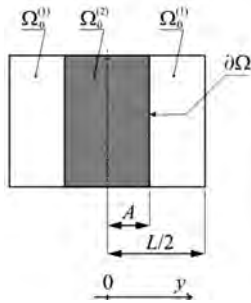
kjer je $u_{i-1}^{(a)} = 0$ skupaj z mikroskopskimi pogoji idealnega stika

$$\left\{ u_i^{(1)} = u_i^{(2)} \right\} \Big|_{\partial\Omega}, \quad (2.7)$$

$$\left\{ E^{(1)} \left(\frac{\partial u_{i-1}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial y} \right) = E^{(2)} \left(\frac{\partial u_{i-1}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial y} \right) \right\} \Big|_{\partial\Omega}. \quad (2.8)$$

V primeru neskončno razsežnega kompozita lahko pogoje periodičnosti za $u_i^{(a)}$ nadomestimo z ničelnimi robnimi pogoji v središču celice in na meji med celicami (slika 2.2).

$$\left\{ u_i^{(2)} = 0 \right\} \Big|_{y=0}, \quad \left\{ u_i^{(1)} = 0 \right\} \Big|_{y=\pm \frac{l}{2}}. \quad (2.9)$$



Slika 2.2. Osnovna celica periodičnega kompozita (z ozirom na koordinato y).

Algoritem postopka homogenizacije je naslednji. Rešitev i -tega problema robnih vrednosti (2.6) - (2.9) omogoča določitev izraza $u_i^{(a)}$. Ko poznamo $u_i^{(a)}$, uporabimo za $(i + 1)$ -to enačbo (2.6) povprečni operator $l^{-1} \int_{\Omega_0} (\cdot) dy$ vzdolž površine celice $\Omega_0 = \Omega_0^{(1)} + \Omega_0^{(2)}$.

Členi $u_{i+1}^{(a)}$ odpadejo na osnovi robnega pogoja (2.8), ki s pomočjo periodičnosti $u_{i+1}^{(a)}$ v y daje

$$E^{(1)} \int_{\Omega_0^{(1)}} \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_{i+1}^{(1)}}{\partial y^2} dy + E^{(2)} \int_{\Omega_0^{(2)}} \frac{\partial^2 u_i^{(2)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_{i+1}^{(2)}}{\partial y^2} dy = 0. \quad (2.10)$$

Kot rezultat dobimo naslednjo homogenizirano enačbo reda η^{i-1}

$$\begin{aligned} E^{(1)} \int_{\Omega_0^{(1)}} \frac{\partial^2 u_{i-1}^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial x \partial y} dy + E^{(2)} \int_{\Omega_0^{(2)}} \frac{\partial^2 u_{i-1}^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i^{(2)}}{\partial x \partial y} dy = \\ \rho^{(1)} \int_{\Omega_0^{(1)}} \frac{\partial^2 u_{i-1}^{(1)}}{\partial t^2} dy + \rho^{(2)} \int_{\Omega_0^{(2)}} \frac{\partial^2 u_{i-1}^{(2)}}{\partial t^2} dy. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Če združimo enačbe (2.11) za $i = 1, 2 \dots n$, dobimo makroskopsko valovno enačbo reda η^n .

Tu izvedemo izračune do vrednosti $n = 3$. Analitične rešitve na celici so naslednje za $y > 0$ *

$$\begin{aligned}
u_1^{(2)} &= A_1 y \frac{\partial u_0}{\partial x}, & u_1^{(1)} &= \left(B_1 y + \frac{1}{2} C_1 L \right) \frac{\partial u_0}{\partial x}, \\
u_2^{(2)} &= \left[-\frac{1}{2} \left(1 + 2A_1 - \frac{\rho^{(2)} E_0}{\rho_0 E^{(2)}} \right) y^2 + \frac{1}{4} A_2 L y \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \\
u_2^{(1)} &= \left[-\frac{1}{2} \left(1 + 2B_1 - \frac{\rho^{(1)} E_0}{\rho_0 E^{(1)}} \right) y^2 + \frac{1}{4} B_2 L y + \frac{1}{8} C_2 L^2 \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \\
u_3^{(2)} &= \left\{ \frac{1}{6} \left[2 + 3A_1 + (A_1 - 2) \frac{\rho^{(2)} E_0}{\rho_0 E^{(2)}} \right] y^3 - \frac{1}{4} A_2 L y^2 + \frac{1}{24} A_3 L^2 y \right\} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}, \\
u_3^{(1)} &= \left\{ \frac{1}{6} \left[2 + 3B_1 + (B_1 - 2) \frac{\rho^{(1)} E_0}{\rho_0 E^{(1)}} \right] y^3 - \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{4} \left(B_2 + C_1 - C_1 \frac{\rho^{(1)} E_0}{\rho_0 E^{(1)}} \right) L y^2 + \frac{1}{24} B_3 L^2 y + \frac{1}{48} C_3 L^3 \right\} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3},
\end{aligned} \tag{2.12}$$

za $y < 0$

$$\begin{aligned}
u_1^{(2)} &= A_1 y \frac{\partial u_0}{\partial x}, & u_1^{(1)} &= \left(B_1 y - \frac{1}{2} C_1 L \right) \frac{\partial u_0}{\partial x}, \\
u_2^{(2)} &= \left[-\frac{1}{2} \left(1 + 2A_1 - \frac{\rho^{(2)} E_0}{\rho_0 E^{(2)}} \right) y^2 - \frac{1}{4} A_2 L y \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \\
u_2^{(1)} &= \left[-\frac{1}{2} \left(1 + 2B_1 - \frac{\rho^{(1)} E_0}{\rho_0 E^{(1)}} \right) y^2 - \frac{1}{4} B_2 L y + \frac{1}{8} C_2 L^2 \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \\
u_3^{(2)} &= \left\{ \frac{1}{6} \left[2 + 3A_1 + (A_1 - 2) \frac{\rho^{(2)} E_0}{\rho_0 E^{(2)}} \right] y^3 + \frac{1}{4} A_2 L y^2 + \frac{1}{24} A_3 L^2 y \right\} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}, \\
u_3^{(1)} &= \left\{ \frac{1}{6} \left[2 + 3B_1 + (B_1 - 2) \frac{\rho^{(1)} E_0}{\rho_0 E^{(1)}} \right] y^3 + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{4} \left(B_2 + C_1 - C_1 \frac{\rho^{(1)} E_0}{\rho_0 E^{(1)}} \right) L y^2 + \frac{1}{24} B_3 L^2 y - \frac{1}{48} C_3 L^3 \right\} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Sledijo koeficienti A_i, B_i, C_i

$$\begin{aligned}
A_1 &= -(1 - c^{(2)}) (E^{(2)} - E^{(1)}) / D, & B_1 &= c^{(2)} (E^{(2)} - E^{(1)}) / D, \\
C_1 &= -B_1, & D &= (1 - c^{(2)}) E^{(2)} + c^{(2)} E^{(1)}, \\
A_2 &= - \left[(1 - c^{(2)}) \left\{ \left[(1 - c^{(2)}) \rho^{(1)} + 2c^{(2)} \rho^{(2)} \right] E_0 + \rho_0 E^{(1)} \right\} E^{(2)} + \right. \\
&\quad \left. (c^{(2)})^2 \rho^{(2)} E^{(1)} E_0 \right] / (\rho_0 E^{(2)} D),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= \left(c^{(2)} E^{(1)} \left[c^{(2)} \left(\rho^{(2)} - 2\rho^{(1)} \right) E_0 - 2\rho_0 E^{(1)} \right] + \right. \\
& \left. E^{(2)} \left\{ \left(1 + 2c^{(2)} \right) \rho_0 E^{(1)} - \left[1 - \left(c^{(2)} \right)^2 \right] \rho^{(1)} E_0 \right\} \right) / \left(\rho_0 E^{(1)} D \right), \\
C_2 &= c^{(2)} \left[\rho_0 \left(E^{(1)} \right)^2 + \left(1 - c^{(2)} \right) \rho^{(1)} E^{(2)} E_0 - E^{(1)} \left\{ \rho_0 E^{(2)} + \right. \right. \\
& \left. \left. \left[c^{(2)} \rho^{(2)} + \rho^{(1)} \left(1 - 2c^{(2)} \right) \right] E_0 \right\} \right] / \left(\rho_0 E^{(1)} D \right), \\
A_3 &= - \left\{ \left(c^{(2)} \right)^3 \rho^{(2)} \left(E^{(1)} \right)^2 E_0 + \left(1 - c^{(2)} \right) \left(E^{(2)} \right)^2 \left[\rho^{(1)} E_0 \left(1 - c^{(2)} \right)^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. \rho_0 E^{(1)} \right] + \left\{ 3E_0 \left(1 - c^{(2)} \right) \left[c^{(2)} \rho^{(2)} + \left(1 - c^{(2)} \right) \rho^{(1)} \right] - \rho_0 E^{(1)} \right\} \times \right. \\
& \left. c^{(2)} E^{(1)} E^{(2)} \right\} / \left(\rho_0 E^{(2)} D^2 \right), \\
B_3 &= \left(\left\{ \left(c^{(2)} \right)^2 E_0 \left[5c^{(2)} \rho^{(2)} + 3\rho^{(1)} \left(1 - 4c^{(2)} \right) \right] - 2c\rho_0 E^{(2)} \left(1 - 3c^{(2)} \right) \right\} \times \right. \\
& \left(E^{(1)} \right)^2 + E^{(1)} E^{(2)} \left\{ \rho_0 E^{(2)} \left(1 - c^{(2)} \right) \left(1 + 3c^{(2)} \right) + 3 \left(c^{(2)} \right)^2 E_0 \times \right. \\
& \left. \left[\rho^{(2)} \left(1 - c^{(2)} \right) - \rho^{(1)} \left(4 - 5c^{(2)} \right) \right] \right\} - 3 \left(c^{(2)} \right)^2 \rho_0 \left(E^{(1)} \right)^3 + \\
& \left. \rho^{(1)} \left(E^{(2)} \right)^2 E_0 \left(1 - c^{(2)} \right) \left[1 + c^{(2)} - 5 \left(c^{(2)} \right)^2 \right] \right) / \left(\rho_0 E^{(1)} D^2 \right), \\
C_3 &= c^{(2)} \left[\left(E^{(1)} \right)^2 \left\{ \rho_0 E^{(2)} \left(1 - 2c^{(2)} \right) - c^{(2)} E_0 \left[2c^{(2)} \rho^{(2)} + 3\rho^{(1)} \left(1 - 2c^{(2)} \right) \right] \right\} - \right. \\
& \left. E^{(1)} E^{(2)} \left\{ \rho_0 E^{(2)} \left(1 - c^{(2)} \right) + \rho^{(1)} E_0 \left[1 - 6c^{(2)} + 6 \left(c^{(2)} \right)^2 \right] \right\} + \right. \\
& \left. c^{(2)} \rho_0 \left(E^{(1)} \right)^3 + \rho^{(1)} \left(E^{(2)} \right)^2 E_0 \left(1 - c^{(2)} \right) \left(1 - 2c^{(2)} \right) \right] / \left(\rho_0 E^{(1)} D^2 \right).
\end{aligned}$$

V prikazanih formulah

$$E_0 = \left[c^{(2)} / E^{(2)} + \left(1 - c^{(2)} \right) / E^{(1)} \right]^{-1} \quad (2.15)$$

pomeni efektivni modul elastičnosti slojevitega kompozita v kvazihomogenih primerih (tj. za $\eta = 0$),

$$\rho_0 = \left(1 - c^{(2)} \right) \rho^{(1)} + c^{(2)} \rho^{(2)} \quad (2.16)$$

je povprečna gostota, $c^{(2)} = l_2 / l = 2A / L$ pa je prostorninski delež komponente $\Omega^{(2)}$, $A = l_2 / (2\eta)$.

Makroskopska valovna enačba reda η^2 ima naslednjo obliko

$$E_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \eta^2 L^2 E_2 \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + O(\eta^4) = \rho_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad (2.17)$$

kjer koeficient

$$E_2 = \frac{1}{12} \left(c^{(2)} \right)^2 \left(1 - c^{(2)} \right)^2 \frac{E_0^3 \left(E^{(2)} \rho^{(2)} - E^{(1)} \rho^{(1)} \right)^2}{\rho_0^2 \left(E^{(1)} E^{(2)} \right)^2} \quad (2.18)$$

lahko interpretiramo kot efektivni modul elastičnosti reda η^2 .

Drugi člen na levi strani enačbe (2.17) kaže disperzijski učinek sipanja valov na mikronehomogenostih kompozita. Koefficient E_2 postane enak nič in disperzija izgine v primeru (a) homogenega materiala ($c^{(1)} = 0, c^{(2)} = 1$) in (b) ob enakosti komponente zvočne impedance ($E^{(2)} r^{(2)} = E^{(1)} r^{(1)}$), kjer ni lokalne refleksije na meji $\partial\Omega$ med obema domenama. Oglejmo si harmonični val

$$u_0 = U \exp(i\mu x) \exp(i\omega t) \quad (2.19)$$

z amplitudo U , frekvenco ω in valovnim številom $\mu = 2\pi/L$.

Če vstavimo (2.19) v (2.17), dobimo naslednjo disperzijsko enačbo

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[1 - 4\pi^2 \frac{E_2}{E_0} \eta^2 + O(\eta^4) \right], \quad (2.20)$$

kjer je $\eta = l/L = \mu l / (2\pi)$, $\omega_0 = \mu / v_0$ je frekvenca in $v_0 = \sqrt{E_0 / \rho_0}$ pomeni hitrost v kvazihomogenem primeru.

Fazno hitrost v_p in skupinsko hitrost v_g določata naslednji enačbi

$$v_p^2 = \left(\frac{\omega}{\mu} \right)^2 = v_0^2 \left[1 - 4\pi^2 \eta^2 \frac{E_2}{E_0} + O(\eta^4) \right], \quad (2.21)$$

$$v_g^2 = \left(\frac{d\omega}{d\mu} \right)^2 = v_0^2 \frac{\left(1 - 8\pi^2 \eta^2 E_2 / E_0 \right)^2}{1 - 4\pi^2 \eta^2 E_2 / E_0} + O(\eta^4). \quad (2.22)$$

Asimptotična rešitev (2.20) – (2.22) opisuje dolgovalovni približek. Zmanjšanje valovne dolžine L (in povečanje frekvence ω) ima za posledico zmanjšanje skupinske hitrosti v_g . Pogoj $v_g = 0$ definira mejo, kjer se pojavi prvi zaporni pas. Zgornjo frekvenčno mejo ω_{max} lahko najdemo na podlagi enačb (2.20), (2.22).

$$\omega_{max}^2 = \frac{\langle E \rangle_0^2}{4l^2 \langle E \rangle_2 \langle \rho \rangle} + O(\eta^4). \quad (2.23)$$

Opozoriti je potrebno, da je podani postopek homogenizacije razvit za neskončni prostor. S tem je mogoče definirati disperzijske relacije za kompozitni material neodvisno od vrste robnih pogojev na makroskopskem nivoju. Če upoštevamo kompozitno strukturo končne dimenzije, je potrebno homogenizirano rešitev dopolniti z makroskopskimi robnimi pogoji. Formalni prehod dobljenih rezultatov za neskončno domeno na primer kompozita končne dimenzije lahko povzroči napake v robnih pogojih na makroskopskem nivoju.

2.3. BLOCH-FLOQUETOVA METODA IN EKSAKTNA DISPERZIJSKA ENAČBA

Rešitev, primerno za kratke valove, je mogoče najti z uporabo Bloch-Floquetovega pristopa [82,176]. Na podlagi dane metode lahko zapišemo enačbo, ki popisuje širjenje harmoničnega valovanja v kompozitnem mediju

$$u^{(a)} = F^{(a)}(x) \exp(i\mu x) \exp(i\omega t), \quad (2.24)$$

kjer je $F^{(a)}(x)$ periodična funkcija ob upoštevanju mikrostrukture materiala, in sicer $F^{(a)}(x) = F^{(a)}(x + l)$.

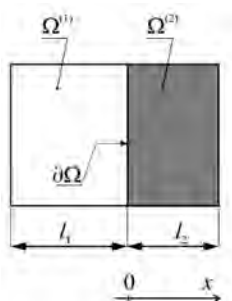
Periodičnost $F^{(a)}(x)$ implicira

$$u^{(a)}(x+l) = u^{(a)}(x) \exp(i\mu l). \quad (2.25)$$

Če vstavimo izraz (2.24) v valovno enačbo (2.1), dobimo

$$F^{(a)}(x) = F_1^{(a)} \exp(i[\mu^{(a)} - \mu]x) + F_2^{(a)} \exp(-i[\mu^{(a)} + \mu]x), \quad (2.26)$$

kjer $m^{(a)} = \omega \sqrt{\rho^{(a)}/E^{(a)}}$ pomeni kompleksno valovno število.



Slika 2.3. Osnovna celica periodičnega kompozita (z ozirom na koordinato x).

Za določitev koeficientov $F_1^{(a)}$, $F_2^{(a)}$ moramo uporabiti pogoje (2.2), (2.3). Oglejmo si osnovno celico periodičnega kompozita, prikazano na sliki 2.3. Na meji $x = 0$ imamo

$$\left\{ u^{(1)} = u^{(2)} \right\} \Big|_{x=0}, \quad \left\{ E^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = E^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \right\} \Big|_{x=0}. \quad (2.27)$$

Pomike in napetosti na mejah $x = -l_1$ lahko povežemo s pomočjo enačbe (2.25) na naslednji način

$$\begin{aligned} u^{(2)} \Big|_{x=l_2} &= u^{(1)} \Big|_{x=-l_1} \exp(i\mu l), \\ E^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \Big|_{x=l_2} &= E^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=-l_1} \exp(i\mu l). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Če uporabimo izraza (2.24), (2.26) v robnih pogojih (2.27), (2.28), dobimo naslednje štiri linearne algebraine enačbe

$$\begin{aligned}
 F_1^{(1)} + F_2^{(1)} - F_1^{(2)} - F_2^{(2)} &= 0, \\
 F_1^{(1)} z_1 - F_2^{(1)} z_1 - F_1^{(2)} z_2 + F_2^{(2)} z_2 &= 0, \\
 F_1^{(1)} \exp[-i(\mu^{(1)} - \mu)l_1] + F_2^{(1)} \exp[i(\mu^{(1)} + \mu)l_1] - \\
 F_1^{(2)} \exp[i(\mu^{(2)} - \mu)l_2] - F_2^{(2)} \exp[-i(\mu^{(2)} + \mu)l_2] &= 0, \\
 F_1^{(1)} z_1 \exp[-i(\mu^{(1)} - \mu)l_1] - F_2^{(1)} z_1 \exp[i(\mu^{(1)} + \mu)l_1] - \\
 F_1^{(2)} z_2 \exp[i(\mu^{(2)} - \mu)l_2] + F_2^{(2)} z_2 \exp[-i(\mu^{(2)} + \mu)l_2] &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

kjer so $z^{(a)} = \sqrt{E^{(a)}\rho^{(a)}}$ komponente impedance.

Sistem (2.29) ima netrivialno rešitev le, če je determinanta matrike, sestavljene iz njegovih koeficientov, enaka nič. Dani pogoj omogoča zapis disperzijske enačbe v eksplicitni analitični obliki

$$\begin{aligned}
 \cos(\mu l) &= \cos(\mu^{(1)}l_1) \cos(\mu^{(2)}l_2) - \\
 \frac{1}{2} \left(\frac{z^{(1)}}{z^{(2)}} + \frac{z^{(2)}}{z^{(1)}} \right) \sin(\mu^{(1)}l_1) \sin(\mu^{(2)}l_2).
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Eksaktna enačba (2.30) omogoča preiskavo številnih poenostavljenih primerov. Mejni prehodi $l_2 \rightarrow 0$, $\rho^{(2)}l_2 \rightarrow m$, $\rho^{(1)} \rightarrow 0$, $E^{(1)}/l_1 \rightarrow C$ podajajo znano disperzijsko enačbo za nihanje sistema mas in vzmeti

$$\cos(\mu l) = 1 - \frac{m\omega^2}{2C}. \tag{2.31}$$

kjer M masna matrika, C pa togostna matrika. Z uporabo izrazov $l_2 \rightarrow 0$, $\rho^{(2)}l_2 \rightarrow m$, $\rho^{(1)} = \rho$, $E^{(1)} = E$ lahko pridemo do disperzijske enačbe palice s pripetimi masami pri vzdolžnih nihanjih

$$\cos(\mu l) = \cos\left(\omega l \sqrt{\frac{\rho}{E}}\right) - \frac{m\omega}{2\sqrt{E\rho}} \sin\left(\omega l \sqrt{\frac{\rho}{E}}\right). \tag{2.32}$$

V primeru dolgih valov lahko upoštevamo frekvenco ω v vrsti za η , kjer je $\eta = l/L = \mu l / (2\pi) \rightarrow 0$. Koeficienta v slednji vrsti lahko izračunamo iz enačbe (2.30), prva dva pa sovpadata s prvima dvema koeficientoma asimptotične vrste (2.20), dobljene s pomočjo metode homogenizacije.

Recimo, da je material sestavljen iz slojev z enakim časom potovanja motnje skozi posamezen sloj. Tak material je v geofiziki znan kot Goupillaudov medij [189]. V tem primeru velja

$$T^{(1)} = T^{(2)} = T, \tag{2.33}$$

kjer $T^{(a)} = \sqrt{\rho^{(a)}/E^{(a)}} l_a$.

Pogoj (2.33) zagotavlja, da ima enačba (2.30) eksaktno rešitev

$$\omega = \pm \frac{1}{T} \arccos \frac{\sqrt{2z^{(1)}z^{(2)} \cos(\mu l) + (z^{(1)})^2 + (z^{(2)})^2}}{z^{(1)} + z^{(2)}} \quad (2.34)$$

V primeru ko imajo komponente kompozita izrazito kontrastne lastnosti, $z^{(2)} \ll z^{(1)}$, lahko uvedemo brezdimenzijski parameter $\varepsilon_1^2 = z^{(2)}/z^{(1)} \ll 1$ in prepišemo enačbo (2.30) v naslednjo obliko

$$\varepsilon_1^2 \cos rd = \varepsilon_1^2 \cos \Omega \cos(\Omega a) - \frac{1}{2} (1 + \varepsilon_1^4) \sin \Omega \sin(\Omega a), \quad (2.35)$$

kjer je $\Omega = \mu^{(1)}l_1$ in $a = (\mu^{(2)}/\mu^{(1)})(l_2/l_1)$.

Možne poenostavitve te enačbe so odvisne od vrednosti a .

Če je $a \sim 1$, tj. $l_2/l_1 \sim \varepsilon_1^2$ (dolžine komponent kompozita se bistveno razlikujejo), lahko rešitev enačbe (2.35) iščemo v obliki naslednje razširitve

$$\Omega = \varepsilon_1 \Omega_0 + \varepsilon_1^2 \Omega_1 + \dots \quad (2.36)$$

Če razširitev (2.36) vstavimo v enačbo (2.35), dobimo v prvem približku

$$\Omega = \varepsilon_1 \Omega_0 + \varepsilon_1^2 \Omega_1 + \dots \quad (2.37)$$

Z razvojem desne strani izraza (2.37) v vrsto z ohranjenimi členi drugega in četrtega reda je možno približati izvorni sistem z mrežo z izmeničnimi masami z dokaj visoko natančnostjo [326] (mrežna aproksimacija [109])

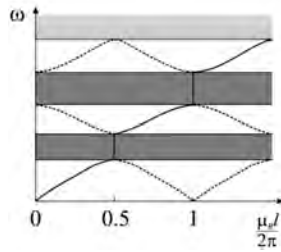
$$\Omega_0^4 - \frac{6}{\varepsilon_1^2(1+a^2)} \Omega_0^2 + \frac{24}{\varepsilon_1^2 a(1+a^2)} \sin^2 \frac{rd}{2} = 0. \quad (2.38)$$

Enačbo (2.24) lahko razdelimo glede na realni μ_R in imaginarni μ_I del valovnega števila $\mu = \mu_R + i\mu_I$:

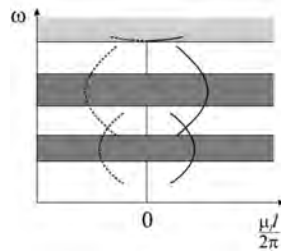
$$u^{(a)} = \bar{F}^{(a)}(x) \exp(-\mu_I x) \exp(i\mu_R x) \exp(i\omega t). \quad (2.39)$$

Primer $\mu_I = 0$ ustreza pasu prepustnosti, medtem $\mu_I > 0$ ustreza pasu zaustavitve. Parameter μ_I je parameter oslavitve valov. Kot izhaja iz enačbe (2.30), so meje zaustavitvenega in prepustnega pasu določene s pogoji $\cos(\mu l) = \pm 1$. Ustrezna valovna dolžina $L = 2l/n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Splošna oblika rešitev je prikazana na slikah 2.4, 2.5, kjer so mejni pasovi označeni s sivo barvo. Upoštevamo, da ima enačba (2.30) neskončno veliko korenov. Izbira edinstvenih (ki imajo fizikalni pomen) rešitev omenjene enačbe predstavlja enega glavnih problemov teorije širjenja valov v periodičnih strukturah.



Slika 2.4. Disperzijske krivulje.



Slika 2.5. Koefficienti oslabitve valov.

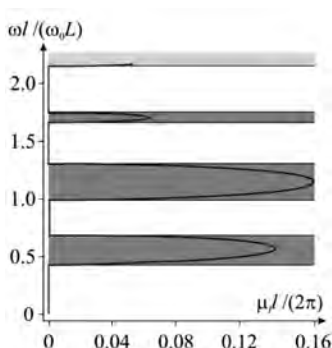
Pri procesu valovanja, ki popisuje dinamiko kristalnih mrež [241], se pogosto upoštevajo tako imenovani večmodalni režimi, ko gre za pojav več harmonikov hkrati, ki se nanašajo na različne veje disperzijskih krivulj. Interakcija načinov z normalno ($d\omega/d\mu > 0$) in anomalno ($d\omega/d\mu < 0$) disperzijo je bila raziskana v [272]. V mehaniki materialov je fizikalno pomemben enomodalni režim, kjer je za dani harmonik (2.24) ohranjena edinstvena odvisnost med ω in μ [60, 272, 408, 409]. Ustrezne veje spektra so na sliki 2.4 označene s polno črto, medtem ko so preostale veje označene črtkano. Izbira vej je bila potrjena z asimptotičnim preходом iz rešitve odseka homogenega medija v rešitev ustreznega popolnoma homogenega medija: enakost komponent impedance ($z^{(2)}/z^{(1)} \rightarrow 1$) pomeni zmanjšanje mejnih pasov in polne veje sovpadajo z ravno črto ($\omega \rightarrow \omega_0 = \mu v_0$).

Koefficient μ_l je povezan s simetričnim parom pozitivnih in negativnih korenov (slika 2.5). Pozitivne vrednosti μ_l (polne krivulje) opisujejo učinek dušenja. Negativne vrednosti μ_l (črtkane krivulje) bi morale ustrezati eksponentnemu naraščanju signala, ki v primeru obravnavanega konservativnega sistema nima fizikalnega pomena.

Obnašanje rešitve lahko opišemo na naslednji način. Za nizke frekvence ω je disperzijska krivulja blizu premice, $\omega \approx \omega_0$, fazna hitrost $v_p = \omega/\mu$ in skupinska hitrost $v_g = d\omega/d\mu$ sta blizu ena drugi in nista odvisni od ω , $v_p \approx v_g \approx v_0$. Tako obravnavan primer se imenuje kvazihomogen. Ob povečanju frekvence se kot naklona disperzijske krivulje zmanjša. Tako fazna kot skupinska hitrost se zmanjšata, čeprav se skupinska hitrost zmanjšuje hitreje $v_p > v_g$. Na meji zaustavitvenega pasu se skupinska hitrost nagiba k ničli $v_g = 0$ in kompozit izkazuje stoječe valovanje. V pasu prepustnosti se skupinska hitrost spreminja od nič na mejah do največjih vrednosti v središču.

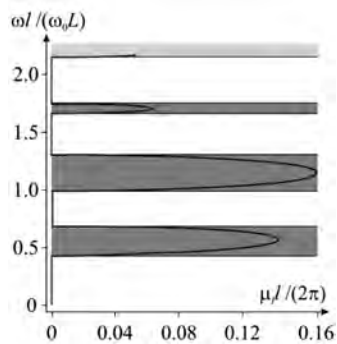
2.4. NUMERIČNI IZRAČUNI

Kot prvi primer obravnavamo kompozit z manj izrazitim kontrastom v lastnostih, sestavljen iz aluminija ($E^{(1)} = 70$ GPa, $\rho^{(1)} = 2700$ kg/m³) in jekla ($E^{(2)} = 210$ GPa, $\rho^{(2)} = 7800$ kg/m³). Disperzijske krivulje in koeficient oslabitve valov so ustrezno prikazani na slikah 2.6 in 2.7. Zaradi boljše preglednosti so veje spektra prikazane na intervalu $0 \leq \mu_R l$. Slika 2.8 prikazuje disperzijsko krivuljo v prvem pasu prepustnosti (akustična veja), dobljeno s pomočjo metode homogenizacije (formula (2.20)), ki jo primerjamo z numeričnimi rezultati rešitve disperzijske enačbe (2.30) (pri $c^{(2)} = 0.3$). Uporabljena metoda homogenizacije omogoča upoštevanje disperzijskega učinka z visoko natančnostjo le pri nizkih vrednostih frekvence ω . Splošna struktura pasov prepustnosti in zaustavitve v primerjavi z deležem $c^{(2)}$ je prikazana na sliki 2.9.

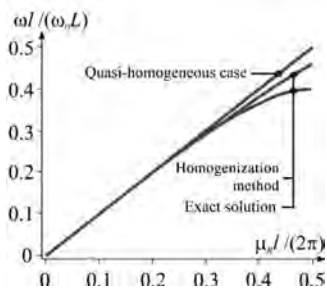


Slika 2.6. Disperzijske krivulje za kompozit »jeklo-aluminij«.

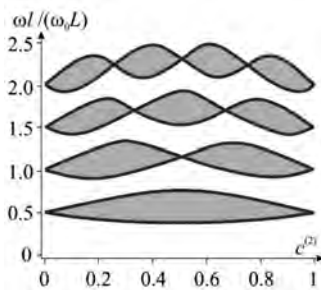
Kot drugi primer obravnavamo kompozit z izrazito kontrastnimi lastnostmi slojev, sestavljen iz ogljikovo-epoksidne (CE) plastike ($E^{(1)} = 8.96$ GPa, $\rho^{(1)} = 1600$ kg/m³) in jekla ($E^{(2)} = 210$ GPa, $\rho^{(2)} = 7800$ kg/m³). Disperzijske krivulje so prikazane na sliki 2.10, medtem ko je koeficient oslabitve prikazan na sliki 2.11. Rezultati, dobljeni za akustično vejo z metodo homogenizacije, lepo sovpadajo z točno rešitvijo (slika 2.12). Izračuni so bili izvedeni za $c^{(2)} = 0.5$. Struktura pasov prepustnosti in zaustavitve je prikazana na sliki 2.13.



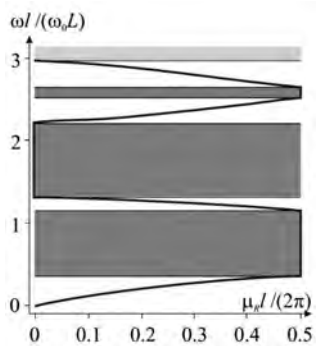
Slika 2.7. Koefficient oslabitve valov za kompozit »jeklo-aluminij«.



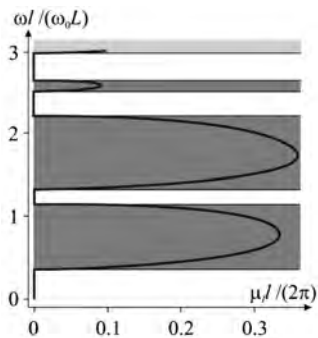
Slika 2.8. Akustične veje za kompozit »jeklo-aluminij«.



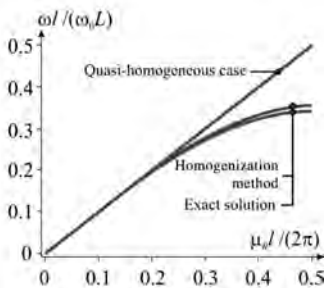
Slika 2.9. Pasovi prepustnosti in zaustavitve za kompozit »jeklo-aluminij«.



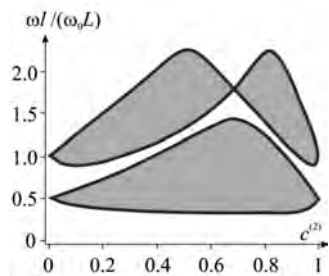
Slika 2.10. Disperzijske krivulje za kompozit »CE plastika-jeklo«.



Slika 2.11. Koeficient oslabitve valov za kompozit »CE plastika-jeklo«.



Slika 2.12. Akustične veje za kompozit »CE plastika-jeklo«.



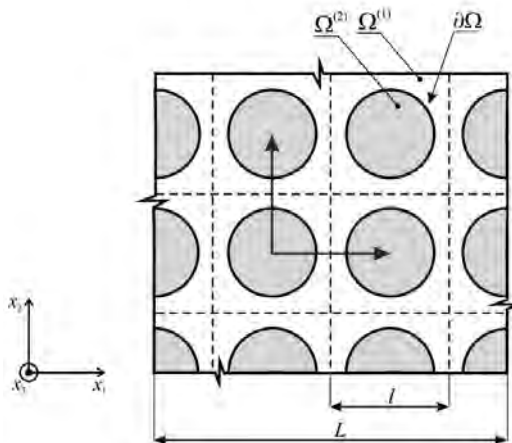
Slika 2.13. Pasovi prepustnosti in zaustavitve za kompozit »CE plastik-jeklo«.

3 Širjenje valovanja v vlaknastih kompozitih: linearni problemi

Raziskano je dvodimenzionalno širjenje linearnih elastičnih valov v vlaknastem kompozitnem materialu. Uporabljena je metoda homogenizacije višjega reda. Natančnost pridobljenih rešitev je numerično potrjena. Dobljeni so efektivni moduli v primeru močne interakcije vlaken. Nato je uporabljena Bloch-Floquetova metoda kot tudi pristop s Fourierovim razvojem, da dobimo rešitev proučevanega problema. Numerični rezultati omogočajo vrednotenje disperzijskih krivulj in akustičnih vej kompozitov "nikelj-aluminij" in "ogljik-epoksi plastika". Poleg tega je analizirana disperzija strižnih valov v cilindrično strukturiranih gobastih viskoelastičnih kosteh.

3.1. DVODIMENZIONALNI (2D) DINAMIČNI PROBLEM

Če so pomiki in napetosti v kompozitnem materialu odvisni od dveh prostorskih koordinat x_1, x_2 , potem se problem širjenja elastičnih valov razdeli na dva neodvisna problema glede na ravninsko in izvenravninsko deformacijo. V nadaljevanju obravnavamo izvenravninski problem, ki obravnava širjenje strižnega valovanja v ravnini $x_1 - x_2$ v vlaknastem kompozitu z valjastimi vključki (glej sliko 3.1).



Slika 3.1. Vlaknasti kompozitni material.

Konstitutivna valovna enačba ima naslednjo obliko

$$\nabla_x \cdot (G \nabla_x u) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

kjer je u pomik v smeri x_3 in $\nabla_x = \mathbf{e}_1 \partial / \partial x_1 + \mathbf{e}_2 \partial / \partial x_2$.

Ker imamo nehomogen medij, sta strižni modul G in gostota ρ nezvezni funkciji koordinat

$$G(\mathbf{x}) = G^{(a)}, \quad \rho(\mathbf{x}) = \rho^{(a)}(\mathbf{x}) \quad \text{za} \quad \mathbf{x} \in \Omega^{(a)}, \quad a = 1, 2. \quad (3.2)$$

Enačbo (3.1) lahko ekvivalentno zapišemo v obliki

$$G^{(a)} \nabla_{xx}^2 u^{(a)} = \rho^{(a)} \frac{\partial^2 u^{(a)}}{\partial t^2}, \quad (3.3)$$

kjer je $\nabla_{xx}^2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$.

Na meji $\partial\Omega$, ki ločuje kompozitno komponento, upoštevamo naslednje idealne kontaktne pogoje

$$\left\{ u^{(1)} = u^{(2)} \right\} \Big|_{\partial\Omega}, \quad \left\{ G^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} = G^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} \right\} \Big|_{\partial\Omega} \quad (3.4)$$

Poudariti je treba, da robni problem (3.1) – (3.4) dopušča različne fizikalne interpretacije. Poleg obravnavanega primera elastičnega strižnega valovanja obravnavani problemi opisujejo procese širjenja elektromagnetnega valovanja v kompozitih z dielektričnimi vključki.

3.2. METODA HOMOGENIZACIJE VIŠJEGA REDA

Za konstruiranje dolgovalovne aproksimacije uporabimo asimptotično metodo homogenizacije (glej pod poglavji 1.2, 2.2). Rekurzivni sistem robnih problemov za posamezno celico ima naslednjo obliko

$$G^{(a)} \left(\nabla_{xx}^2 u_{i-2}^{(a)} + 2\nabla_{xy}^2 u_{i-1}^{(a)} + \nabla_{yy}^2 u_i^{(a)} \right) = \rho^{(a)} \frac{\partial^2 u_{i-2}^{(a)}}{\partial t^2}, \quad (3.5)$$

$$\left\{ u_i^{(1)} = u_i^{(2)} \right\} \Big|_{\partial\Omega}, \quad (3.6)$$

$$\left\{ G^{(1)} \left(\frac{\partial u_{i-1}^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \mathbf{m}} \right) = G^{(2)} \left(\frac{\partial u_{i-1}^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial \mathbf{m}} \right) \right\} \Big|_{\partial\Omega}, \quad (3.7)$$

kje so $i = 1, 2, 3, \dots$, $u_{-1}^{(a)} = 0$, $\nabla_{xy}^2 = \partial^2 / (\partial x_1 \partial y_1) + \partial^2 / (\partial x_2 \partial y_2)$, $\nabla_{yy}^2 = \partial^2 / \partial y_1^2 + \partial^2 / \partial y_2^2$.

V primeru neskončnega kompozita v prostoru lahko spremenimo pogoje periodičnosti z ničelnimi robnimi pogoji v središču celice in njeni zunanji meji $\partial\Omega_0$

$$\left\{ u_i^{(2)} = 0 \right\} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}}, \quad \left\{ u_i^{(1)} = 0 \right\} \Big|_{\partial\Omega_0}. \quad (3.8)$$

Po določitvi člena $u_i^{(a)}$ iz i -tega robnega problema (3.5) – (3.8) uporabimo operator povprečenja

$$S_0^{-1} \iint_{\Omega_0} (\cdot) dS, \quad (3.9)$$

kjer je $dS = dy_1 dy_2$.

Člen $u_{i+1}^{(a)}$ lahko odstranimo s pomočjo Gauss-Ostrogradskega izreka po integraciji glede na ploščino celice

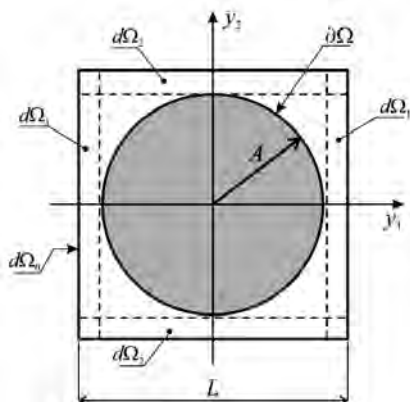
$$G^{(1)} \iint_{\Omega_0^{(1)}} \left(\nabla_{xy}^2 u_i^{(1)} + \nabla_{yy}^2 u_{i+1}^{(1)} \right) dS + G^{(2)} \iint_{\Omega_0^{(2)}} \left(\nabla_{xy}^2 u_i^{(2)} + \nabla_{yy}^2 u_{i+1}^{(2)} \right) dS = 0. \quad (3.10)$$

Homogenizirana gibalna enačba reda η^{i-1} ima naslednjo obliko

$$\begin{aligned} G^{(1)} \iint_{\Omega_0^{(1)}} \left(\nabla_{xx}^2 u_{i-1}^{(1)} + \nabla_{yy}^2 u_i^{(1)} \right) dS + G^{(2)} \iint_{\Omega_0^{(2)}} \left(\nabla_{xx}^2 u_{i-1}^{(2)} + \nabla_{yy}^2 u_i^{(2)} \right) dS = \\ \rho^{(1)} \iint_{\Omega_0^{(1)}} \frac{\partial^2 u_{i-1}^{(1)}}{\partial t^2} dS + \rho^{(2)} \iint_{\Omega_0^{(2)}} \frac{\partial^2 u_{i-1}^{(2)}}{\partial t^2} dS. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Če enačbi (3.11) dodamo še enačbe za $i = 1 \dots n$, dobimo makroskopsko valovno enačbo reda η^n . Da bi rešili robne probleme (3.5) – (3.8) za posamezno celico, lahko uporabimo različne pristope. Največji računski izzivi se praviloma pojavijo v primeru močne interakcije vključkov, ko pride do izrazitih nihanj na mikronivoju. Upoštevajmo asimptotično rešitev z uporabo brezdimenzijskega razmaka med sosednjimi vlakni $\nu = 2(1 - A/L)$ (slika 3.2). Naj bo $\nu \ll 1$ in $G^{(2)}/G^{(1)} \gg 1$. V ničelnem približku $O(\nu^0)$ za območja $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ veljajo naslednje ocene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial y_1^2} \gg \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial y_2^2} \quad \text{za } \mathbf{y} \in d\Omega_1, \\ \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial y_1^2} \ll \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial y_2^2} \quad \text{za } \mathbf{y} \in d\Omega_2. \end{aligned} \quad (3.12)$$



Slika 3.2. Osnovna celica periodičnega kompozita.

Fizikalni pomen ocen (3.12) temelji na opazovanju, da je za območje $d\Omega_1$ v primeru ozkega razmaka med vlakni sprememba lokalnih premikov v smeri y_1 bistveno večja kot v smeri y_2 . Zato lahko izraz $\partial^2 u_i^{(1)}/\partial y_2^2$ zanemarimo, ko ga primerjamo z $\partial^2 u_i^{(1)}/\partial y_1^2$. Podobno lahko v primeru območja $\partial\Omega_1$ lahko izpustimo izraz $\partial^2 u_i^{(1)}/\partial y_1^2$ v primerjavi z $\partial^2 u_i^{(1)}/\partial y_2^2$. Doslej uporabljena poenostavitve je dobro znana v mehaniki tekočin, kjer se imenuje teorija mazanja [123].

Relacije (3.12) omogočajo zapis enačbe (3.5) v naslednji aproksimativni obliki

$$\begin{aligned} G^{(1)} \left(\frac{\partial^2 u_{i-2}^{(1)}}{\partial x_s^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{i-1}^{(1)}}{\partial x_s \partial y_s} + \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial y_s^2} \right) &= \rho^{(1)} \frac{\partial^2 u_{i-2}^{(1)}}{\partial t^2}, \quad s = 1, 2, \\ G^{(2)} \left(\nabla_{xy}^2 u_{i-2}^{(2)} + 2 \nabla_{xy}^2 u_{i-1}^{(2)} + \nabla_{yy}^2 u_i^{(2)} \right) &= \rho^{(2)} \frac{\partial^2 u_{i-2}^{(2)}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Z reševanjem robnih problemov (3.6) – (3.8), (3.13) pri $i = 1, 2, 3$ dobimo za $y_s > 0$

$$\begin{aligned} u_1^{(2)} &= A_{1,s} y_s \frac{\partial u_0}{\partial x_s}, \quad u_1^{(1)} = \left(B_{1,s} y_s + \frac{1}{2} C_{1,s} L \right) \frac{\partial u_0}{\partial x_s}, \\ u_2^{(2)} &= \left[-\frac{1}{2} \left(1 + 2A_{1,s} - \frac{\rho^{(2)} G_0}{\rho_0 G^{(2)}} \right) y_s^2 + \frac{1}{4} A_{2,s} L y_s \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_s^2}, \\ u_2^{(1)} &= \left[-\frac{1}{2} \left(1 + 2B_{1,s} - \frac{\rho^{(1)} G_0}{\rho_0 G^{(1)}} \right) y_s^2 + \frac{1}{4} B_{2,s} L y_s + \frac{1}{8} C_{2,s} L^2 \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_s^2}, \\ u_3^{(2)} &= \left\{ \frac{1}{6} \left[2 + 3A_{1,s} + (A_{1,s} - 2) \frac{\rho^{(2)} G_0}{\rho_0 G^{(2)}} \right] y_s^3 - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{4} A_{2,s} L y_s^2 + \frac{1}{24} A_{3,s} L^2 y_s \right\} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x_s^3}, \\ u_3^{(1)} &= \left\{ \frac{1}{6} \left[2 + 3B_{1,s} + (B_{1,s} - 2) \frac{\rho^{(1)} G_0}{\rho_0 G^{(1)}} \right] y_s^3 - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{4} \left(B_{2,s} + C_{1,s} - C_{1,s} \frac{\rho^{(1)} G_0}{\rho_0 G^{(1)}} \right) L y_s^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{24} B_{3,s} L^2 y_s + \frac{1}{48} C_{3,s} L^3 \right\} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x_s^3}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

za $y_s < 0$

$$\begin{aligned} u_1^{(2)} &= A_{1,s} y_s \frac{\partial u_0}{\partial x_s}, \quad u_1^{(1)} = \left(B_{1,s} y_s - \frac{1}{2} C_{1,s} L \right) \frac{\partial u_0}{\partial x_s}, \\ u_2^{(2)} &= \left[-\frac{1}{2} \left(1 + 2A_{1,s} - \frac{\rho^{(2)} G_0}{\rho_0 G^{(2)}} \right) y_s^2 - \frac{1}{4} A_{2,s} L y_s \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_s^2}, \\ u_2^{(1)} &= \left[-\frac{1}{2} \left(1 + 2B_{1,s} - \frac{\rho^{(1)} G_0}{\rho_0 G^{(1)}} \right) y_s^2 - \frac{1}{4} B_{2,s} L y_s + \frac{1}{8} C_{2,s} L^2 \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_s^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3^{(2)} &= \left\{ \frac{1}{6} \left[2 + 3A_{1,s} + (A_{1,s} - 2) \frac{\rho^{(2)} G_0}{\rho_0 G^{(2)}} \right] y_s^3 + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{4} A_{2,s} L y_s^2 + \frac{1}{24} A_{3,s} L^2 y_s \right\} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x_s^3}, \\
u_3^{(1)} &= \left\{ \frac{1}{6} \left[2 + 3B_{1,s} + (B_{1,s} - 2) \frac{\rho^{(1)} G_0}{\rho_0 G^{(1)}} \right] y_s^3 + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{4} \left(B_{2,s} + C_{1,s} - C_{1,s} \frac{\rho^{(1)} G_0}{\rho_0 G^{(1)}} \right) L y_s^2 + \frac{1}{24} B_{3,s} L^2 y_s - \frac{1}{48} C_{3,s} L^3 \right\} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x_s^3}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Pri tem G_0 pomeni efektivni strižni modul v kvazihomogenem primeru (dobimo ga lahko iz enačbe (3.11) pri $i = 1$), $\rho_0 = (1 - c^{(2)})\rho^{(1)} + c^{(2)}\rho^{(2)}$ pomeni povprečno gostoto, medtem ko $c^{(2)} = \pi A^2/L^2$ pomeni volumski delež vlaken, $0 \leq c^{(2)} \leq c_{max}^{(2)}$, $c_{max}^{(2)} = \pi/4 = 0.7853 \dots$

Sledijo koeficienti $A_{i,s}$, $B_{i,s}$, $C_{i,s}$

$$\begin{aligned}
A_{1,s} &= -(1 - \chi_s) (G^{(2)} - G^{(1)}) / D_s, \quad B_{1,s} = \chi_s (G^{(2)} - G^{(1)}) / D_s, \\
C_{1,s} &= -B_{1,s}, \quad D_s = (1 - \chi_s) G^{(2)} + \chi_s G^{(1)}, \\
A_{2,s} &= - \left[(1 - \chi_s) \left\{ (1 - \chi_s) \rho^{(1)} + 2\chi_s \rho^{(2)} \right\} G_0 + \rho_0 G^{(1)} \right] G^{(2)} + \\
&\quad \chi_s^2 \rho^{(2)} G^{(1)} G_0 / (\rho_0 G^{(2)} D_s), \\
B_{2,s} &= \left\{ \chi_s G^{(1)} \left[\chi_s (\rho^{(2)} - 2\rho^{(1)}) G_0 - 2\rho_0 G^{(1)} \right] + \right. \\
&\quad \left. G^{(2)} \left[(1 + 2\chi_s) \rho_0 G^{(1)} - (1 - \chi_s^2) \rho^{(1)} G_0 \right] \right\} / (\rho_0 G^{(1)} D_s), \\
C_{2,s} &= \chi_s \left[\rho_0 (G^{(1)})^2 + (1 - \chi_s) \rho^{(1)} G^{(2)} G_0 - G^{(1)} \left\{ \rho_0 G^{(2)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left[\chi_s \rho^{(2)} + \rho^{(1)} (1 - 2\chi_s) \right] G_0 \right\} \right] / (\rho_0 G^{(1)} D_s), \\
A_{3,s} &= - \left\{ \chi_s^3 \rho^{(2)} (G^{(1)})^2 G_0 + (1 - \chi_s) (G^{(2)})^2 \left[\rho^{(1)} G_0 (1 - \chi_s)^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \rho_0 G^{(1)} \right] + \left\{ 3G_0 (1 - \chi_s) \left[\chi_s \rho^{(2)} + (1 - \chi_s) \rho^{(1)} \right] - \rho_0 G^{(1)} \right\} \times \right. \\
&\quad \left. \chi_s G^{(1)} G^{(2)} \right\} / (\rho_0 G^{(2)} D_s^2), \\
B_{3,s} &= \left[\left\{ \chi_s^2 G_0 \left[5\chi_s \rho^{(2)} + 3\rho^{(1)} (1 - 4\chi_s) \right] - 2\chi_s \rho_0 G^{(2)} (1 - 3\chi_s) \right\} \times \right. \\
&\quad \left. \left(G^{(1)} \right)^2 + G^{(1)} G^{(2)} \left\{ \rho_0 G^{(2)} (1 - \chi_s) (1 + 3\chi_s) + 3\chi_s^2 G_0 \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left[\rho^{(2)} (1 - \chi_s) - \rho^{(1)} (4 - 5\chi_s) \right] \right\} - 3\chi_s^2 \rho_0 (G^{(1)})^3 + \right. \\
&\quad \left. \rho^{(1)} (G^{(2)})^2 G_0 (1 - \chi_s) (1 + \chi_s - 5\chi_s^2) \right] / (\rho_0 G^{(1)} D_s^2).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_{3,s} = & \chi_s \left[\left(G^{(1)} \right)^2 \left\{ \rho_0 G^{(2)} (1 - 2\chi_s) - \chi_s G_0 \left[2\chi_s \rho^{(2)} + 3\rho^{(1)} (1 - 2\chi_s) \right] \right\} - \right. \\ & G^{(1)} G^{(2)} \left[\rho_0 G^{(2)} (1 - \chi_s) + \rho^{(1)} G_0 (1 - 6\chi_s + 6\chi_s^2) \right] + \\ & \left. \chi_s \rho_0 \left(G^{(1)} \right)^3 + \rho^{(1)} \left(G^{(2)} \right)^2 G_0 (1 - \chi_s) (1 - 2\chi_s) \right] / \left(\rho_0 G^{(1)} D_s^2 \right), \end{aligned}$$

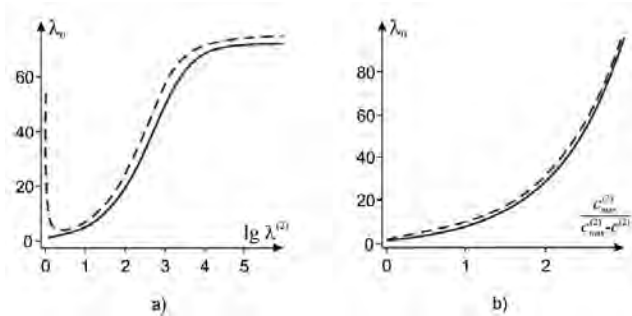
kjer sta $\chi_1 = \sqrt{\left(c^{(2)} / c_{max}^{(2)} \right) (1 - y_2^2 / A^2)}$ in $\chi_2 = \sqrt{\left(c^{(2)} / c_{max}^{(2)} \right) (1 - y_1^2 / A^2)}$.

Makroskopska valovna enačba reda η^2 ima naslednjo obliko

$$G_0 \nabla_{x_s}^2 u_0 + \eta^2 L^2 G_2 \nabla_1^4 u_0 + O(\eta^4) = \rho_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad (3.17)$$

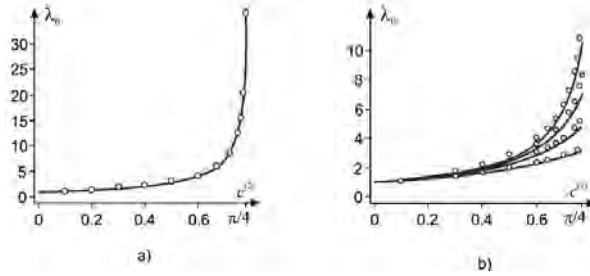
kjer je $\nabla_1^4 = \partial^4 / \partial x_1^4 + \partial^4 / \partial x_2^4$ in koeficient G_2 predstavlja efektivni modul reda η^2 (izračunan je iz enačbe (3.11) pri $i = 3$).

Da bi preverili zanesljivost dobljene rešitve, upoštevamo numerične rezultate za brezdimenzijski efektivni strižni modul $\lambda_0 = G_0 / G^{(1)}$. Slika 3.3 prikazuje λ_0 v primeru močne interakcije sosednjih vlaken, tj. $\lambda^{(2)} = G^{(2)} / G^{(1)} \rightarrow \infty$, $c^{(2)} \rightarrow c_{max}^{(2)}$. Zaradi matematične analogije med problemoma prevodnosti in vzdolžnega striga dobljeno rešitev (polni krivulji) primerjamo s tistimi, ki jih dobimo z asimptotično formulo (črtkani krivulji), ki smo jo izpeljali za dva visokopredvodna valja, ki se približujeta kontaktu [358].



Slika 3.3. Efektivni modul v primeru močne interakcije sosednjih vlaken: (a) $\lambda^{(2)} \rightarrow \infty$, $c^{(2)} = 0.784$; (b) $\lambda^{(2)} = \infty$, $c^{(2)} \rightarrow c_{max}^{(2)}$.

Ocene (3.12) veljajo le v primeru izrazito kontrastnega kompozitnega materiala z velikim volumskim deležem vključkov. Kljub temu pa dobljena rešitev izkazuje točnost pri poljubnih vrednostih parametrov $1 \leq \lambda^{(2)} < \infty$ in $0 \leq c^{(2)} \leq c_{max}^{(2)}$. Ta trditev je prikazana na sliki 3.4, kjer so rezultati, dobljeni za λ_0 (polne krivulje), primerjani z rezultati, navedenimi v [358] (krožci).



Slika 3.4. Efektivni modul za različne togosti vlaken:
(a) $\lambda^{(2)} = \infty$; (b) $\lambda^{(2)} = 5, 10, 20, 50$.

Obravnavajmo naslednje harmonično valovanje

$$u_0 = U \exp(i\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x}) \exp(i\omega t), \quad (3.18)$$

kjer je U amplituda, ω frekvenca, $\boldsymbol{\mu} = \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2$ valovni vektor, $\mu \equiv |\boldsymbol{\mu}| = 2\pi/L$ pa valovno število.

Projekcije vektorja $\boldsymbol{\mu}$ na koordinatno os so naslednje: $\mu_1 = \mu \cos \phi$, $\mu_2 = \mu \sin \phi$, kjer je ϕ kot med osjo x_1 in smerjo širjenja valovanja, $\mu_1 = (\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\mu})$.

Če izraz (3.18) vstavimo v enačbo (3.17), dobimo naslednjo disperzijsko enačbo

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[1 - 4\pi^2 (\sin^4 \phi + \cos^4 \phi) \frac{G_2}{G_0} \eta^2 + O(\eta^4) \right], \quad (3.19)$$

kjer je $\eta = l/L = \mu l/2\pi$, $\omega_0 = \mu v$ frekvenca in $v_0 = \sqrt{G_0/\rho_0}$ hitrost v primeru kvazihomogenega materiala.

Fazna hitrost v_p in skupinska hitrost v_g valovanja sta opredeljeni z naslednjima enačbama:

$$v_p^2 = \left(\frac{\omega}{\mu} \right)^2 = v_0^2 \left[1 - 4\pi^2 (\sin^4 \phi + \cos^4 \phi) \frac{G_2}{G_0} \eta^2 + O(\eta^4) \right] \quad (3.20)$$

$$v_g^2 = \left(\frac{d\omega}{d\mu} \right)^2 = v_0^2 \frac{[1 - 8\pi^2 \eta^2 (\sin^4 \phi + \cos^4 \phi) G_2/G_0]^2}{1 - 4\pi^2 \eta^2 (\sin^4 \phi + \cos^4 \phi) G_2/G_0} + O(\eta^4). \quad (3.21)$$

Asimptotično rešitev za (3.19) – (3.21) lahko dobimo za primer, ko je valovna dolžina bistveno večja od karakteristične velikosti notranje kompozitne strukture. Zgornja frekvenčna meja ω_{max} , ki ustreza začetku zaustavitvenega pasu, je definirana iz pogoja v_g :

$$\omega_{max}^2 = \frac{G_0^2}{4l^2 G_2 \rho_0 (\sin^4 \phi + \cos^4 \phi)} + O(\eta^4). \quad (3.22)$$

V kvazihomogenem primeru je obravnavani vlaknasti kompozit izotropen v prečni smeri; rešitev za G_0 , v_0 , ω_0 ni odvisna od smeri širjenja valov v ravnini $x_1 - x_2$. Aproximacije višjega reda omogočajo zaznavanje učinkov anizotropije. Začenši s členi reda η^2 so relacije (3.19) – (3.21) namreč odvisne od smeri ϕ valovnega vektorja.

3.3. BLOCH-FLOQUETOVA METODA IN REŠITEV NA OSNOVI FOURIEROVE VRSTE

S pomočjo Bloch-Floquetove metode iščemo rešitev valovne enačbe (3.1) v naslednji obliki

$$u = F(\mathbf{x}) \exp(i\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x}) \exp(i\omega t), \quad (3.23)$$

kjer je $F(\mathbf{x})$ periodična funkcija, $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x} + \mathbf{l}_p)$, $\mathbf{l}_p = p_1 \mathbf{l}_1 + p_2 \mathbf{l}_2$, $p_1, p_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ sta translacijska vektorja kvadratne mreže.

Funkcijo $F(\mathbf{x})$ in lastnosti komponent $G(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$ zapišemo v obliki Fourierove vrste

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} A_{n_1 n_2} \exp \left[i \frac{2\pi}{l} (n_1 x_1 + n_2 x_2) \right], \\ G(\mathbf{x}) &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} B_{n_1 n_2} \exp \left[i \frac{2\pi}{l} (n_1 x_1 + n_2 x_2) \right], \\ \rho(\mathbf{x}) &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} C_{n_1 n_2} \exp \left[i \frac{2\pi}{l} (n_1 x_1 + n_2 x_2) \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

kjer so koeficienti $B_{n_1 n_2}$, $C_{n_1 n_2}$ definirani na naslednji način

$$\begin{aligned} B_{n_1 n_2} &= \frac{1}{S_0} \iint_{\Omega_0} G(\mathbf{x}) \exp \left[-i \frac{2\pi}{l} (n_1 x_1 + n_2 x_2) \right] dS, \\ C_{n_1 n_2} &= \frac{1}{S_0} \iint_{\Omega_0} \rho(\mathbf{x}) \exp \left[-i \frac{2\pi}{l} (n_1 x_1 + n_2 x_2) \right] dS, \end{aligned} \quad (3.25)$$

in operator $\iint_{\Omega_0} (\cdot) dS$ označuje integracijo po območju celice Ω_0 , $dS = dx_1 dx_2$, $S_0 = l^2$ pa pomeni ploščino celice.

Z vstavljanjem izrazov (3.23), (3.24) v enačbo (3.1) in primerjavo koeficientov pri členih $\exp[i2\pi l^{-1}(j_1 x_1 + j_2 x_2)]$, $j_1, j_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, lahko dobimo neskončni sistem linearnih algebraičnih enačb za neznanke $A_{n_1 n_2}$

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} A_{n_1 n_2} \left\{ B_{j_1 - n_1, j_2 - n_2} \left[\left(\frac{2\pi}{l} n_1 + \mu_1 \right) \left(\frac{2\pi}{l} j_1 + \mu_1 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{2\pi}{l} n_2 + \mu_2 \right) \left(\frac{2\pi}{l} j_2 + \mu_2 \right) \right] - C_{j_1 - n_1, j_2 - n_2} \omega^2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Pogoj za obstoj rešitve sistema (3.26) je definiran z ničelno determinanto matrike, sestavljene iz danih koeficientov. Kot rezultat dobimo disperzijsko enačbo za ω in $\boldsymbol{\mu}$. Poudariti je treba, da predstavljena metoda ne uporablja robnih pogojev (3.4) v eksplicitni obliki. Pogoji idealnega stika med vlakni in matriko so »skriti« v enačbi (3.1) in v razvoju (3.24) za $F(\mathbf{x})$, kjer sta polji pomikov in napetosti implicitno obravnavani kot zvezni.

V primeru spodaj navedenih numeričnih študij so disperzijske relacije izračunane na podlagi okrnitve sistema (3.26) ob predpostavki $-j_{max} \leq j_1, j_2 \leq j_{max}$. Število uporabljenih

enačb je enako $(2j_{max} + 1)^2$. Okrnitev sistema je mogoče fizikalno razložiti, in sicer s tem, da zanemarimo visoke frekvence.

Za ponazoritev učinka valovnega filtriranja razdelimo problem (3.23) na realni μ_R in imaginarni del μ_I vektorja $\mu = \mu_R + i\mu_I$

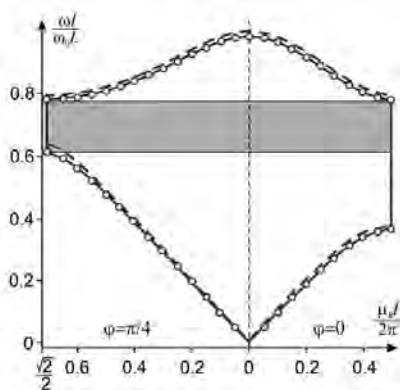
$$u = F(\mathbf{x}) \exp(-\mu_I \cdot \mathbf{x}) \exp(i\mu_R \cdot \mathbf{x}) \exp(i\omega t). \quad (3.27)$$

Imaginarni del $\mu_I \equiv |\mu_I|$ valovnega števila predstavlja koeficient oslavitve. Vrednosti $\mu_I = 0$ ustrezajo pasu prepustnosti, $\mu_I \neq 0$ pa zaustavitvenemu pasu. Meje pasov prepustnosti in zaustavitve so določene s pogojem $\mu l = \pi n / \sqrt{\sin^4 \phi + \cos^4 \phi}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Ustrezne dolžine valov so definirane s formulo $L = 2l/n \sqrt{\sin^4 \phi + \cos^4 \phi}$.

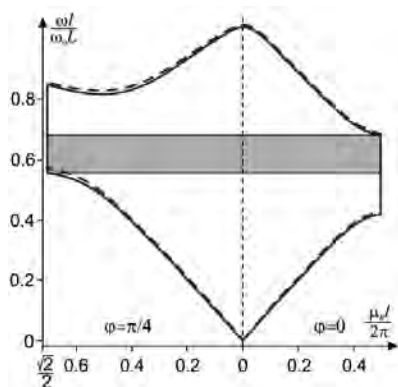
3.4. NUMERIČNI REZULTATI

Da bi primerjali rešitve, pridobljene s pomočjo Fourierove vrste, z rezultati, ki so jih dobili drugi avtorji, obravnavajmo nehomogen material, sestavljen iz matrice z lastnostmi $G^{(1)} = 1$, $\rho^{(1)} = 1$ in s prazninami $G^{(2)} = 0$, $\rho^{(2)} = 0$, $A/L = 0.4$, $c^{(2)} \approx 0.503$.

Disperzijske krivulje so prikazane na sliki 3.5. Črtkane črte ustrezajo izračunom za $j_{max} = 1$, medtem ko polne črte ustrezajo $j_{max} = 2$; krožci se nanašajo na rezultate, navedene v delu [376] in pridobljene z Rayleighovo metodo. Disperzijski diagram je sestavljen iz dveh delov, ločenih z navpično črtkano črto. Prvi del ustreza ortogonalni ($\phi = 0$), levi del pa diagonalni ($\phi = \pi/4$) smeri širjenja valovanja. V kvazihomogenem primeru ($\omega \rightarrow 0$) je rešitev izotropna in ni odvisna od kota ϕ , s povečanjem frekvence ω pa kompozit izkazuje anizotropne lastnosti. Rjava barva se nanaša na ves zaustavitveni pas, kjer širjenje signala ni možno v nobeni smeri. Povečanje j_{max} poveča točnost numeričnih rezultatov. Kot primer kompozita z manj izrazitim kontrastom med lastnostmi obravnavamo material z aluminijasto matriko ($G^{(1)} = 27.9$ GPa, $\rho^{(1)} = 2700$ kg/m³) in nikljevim vlakni ($G^{(2)} = 75.4$ GPa, $\rho^{(2)} = 8936$ kg/m³, $c^{(2)} = 0.35$). Pripadajoče disperzijske krivulje so prikazane na sliki 3.6.

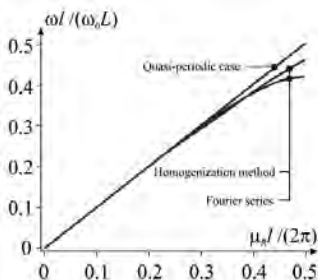


Slika 3.5. Disperzijske krivulje za kompozit s prazninami.



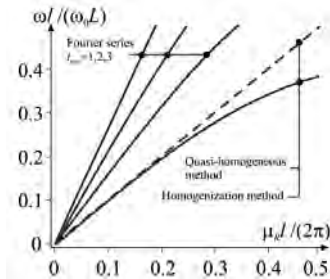
Slika 3.6. Disperzijske krivulje za kompozit »nikelj-aluminij«.

Dobljeni rezultati za $j_{max} = 1$ (črtkane krivulje) in za $j_{max} = 2$ (polne krivulje) so blizu druga drugi, kar potrjuje hitro konvergenco rešitve. Kot izhaja iz izračuna akustične veje spektra (slika 3.7), metoda homogenizacije omogoča upoštevanje disperzijskega učinka, čeprav je dobra točnost dosežena le v območju nizkih frekvenc.



Slika 3.7. Akustična veja za kompozit »nikelj-aluminij«, $\phi = 0$.

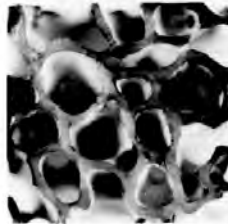
V primeru izrazito kontrastnega kompozita (epoksidna matrika z $G^{(1)} = 1.53$ GPa, $\rho^{(1)} = 1250$ kg/m³ in ogljikova vlakna z $G^{(2)} = 86$ GPa, $\rho^{(2)} = 1800$ kg/m³, $c^{(2)} = 0.5$, rešitev, ki temelji na uporabi Fourierove vrste, konvergira počasneje (slika 3.8). Metoda homogenizacije daje kvalitativno pravilne rezultate do prvega zaustavitvenega pasu (za $\mu_R l = \pi/\sqrt{\sin^4 \phi + \cos^4 \phi}$ dobimo $v_g \approx 0$).



Slika 3.8. Akustična veja za »ogljik-epoksi plastiko«, $\phi = 0$.

3.5. DISPERZIJA STRIŽNIH VALOV V CILINDRIČNO STRUKTURIRANI GOBASTI VISKOELASTIČNI KOSTNINI

Živalske in človeške kosti so heterogeni materiali z zapleteno hierarhično strukturo. Kostna tkiva se pojavljajo v dveh glavnih oblikah: kot gosta trdna snov (kortikalna ali kompaktna kostnina) in kot porozen medij, napolnjen z viskoznim kostnim mozgom (trabekularna ali gobasta kostnina) [219, 458] (slika 3.9). Osnovna mehanska razlika med tema dvema vrstama je v njuni relativni gostoti. Obe vrsti lahko najdemo v kosteh telesa. Klasičen primer makroskopske kostne strukture so dolge kosti (npr. nadlahtnica, stegnenica in golenica). Vključujejo zunanjo lupino gostega kortikalnega tkiva, ki obdaja notranje jedro poroznega gobastega tkiva. Mikrostrukturo gobastih kosti pogosto opišemo z dvo- ali tridimenzionalno mrežo med seboj povezanih palic in plošč [180].



Slika 3.9. Mikrograf cilindrično strukturirane gobaste kostnine [458] (z dovoljenjem ASME).

Mikrostrukturo gobaste kostnine pogosto opisuje dvo- ali tridimenzionalna teorija viskoelastičnosti [432]. Lakes [215, 268] je uporabil nelokalno teorijo elastičnosti za dinamično proučevanje učinkov napetostnih dvojic v človeški kompaktni kosti. Kortikalno kost lahko modeliramo tudi kot kompozitni material s hierarhično strukturo [185]. Williams in Lewis [458] sta modelirala strukturo 2D odseka trabekularne kosti z uporabo FEM ravninske deformacije za napoved transverzalno izotropne elastične konstante. Opravljena je bila raziskava o izvoru in velikosti lastnosti anizotropnega materiala gobaste kostnine v proksimalni epifizni človeške golenice. Poročajo o rezultatih meritev togosti, opravljenih v treh pravokotnih smereh na 21

kockah gobaste kostnine pred odpovedjo vzdolž ene od treh glavnih osi. Struktura je približno izotropna v prečni smeri. Trdnost in togost sta v linearni odvisnosti z deležem površine za obremenitev vzdolž izotropne osi. Trdnost je sorazmerna s togostjo za vse smeri. Predlagana je numerična metoda na osnovi FEM, ki na osnovi eksperimentalnih opažanj omogoča napovedovanje elastičnih konstant cilindrično strukturirane gobaste kostnine v golenici na podlagi morfoloških meritev v prečni ravnini.

Z namenom upoštevanja vpliva kostnega mozga sta Kasra in Grynpas [233] izvedla ustrezen numerični izračun z uporabo FEM. Mnogi avtorji so uporabili metodo homogenizacije za raziskovanje mehanskega obnašanja struktur, ki modelirajo trabekularno kost [210]. Parnell in Grimal [352] sta raziskovala vpliv mezoskale poroznosti na inducirano anizotropijo materiala z uporabo asimptotične homogenizacije in nove rešitve problema celic.

Kljub očitni preprostosti lahko takšni idealizirani modeli zagotovijo zadovoljivo ujemanje med teoretičnimi napovedmi in eksperimentalnimi rezultati za mehanske lastnosti pravih kosti. V tem podglavju obravnavamo dvodimenzionalni model valjasto strukturirane gobaste kosti.

Eden od zahtevnih problemov je določitev strukture kosti z neinvazivnimi meritvami. Pristop inverzne homogenizacije (»postopek dehomogenizacije«) [122] lahko pomaga pridobiti informacije o mikrogeometriji kostnega tkiva iz vrednosti efektivnih modulov. Druga možnost je pridobivanje te informacije iz dinamičnega odziva kosti s pomočjo merjenja hitrosti in oslabitve ultrazvočnih valov različnih frekvenc.

Zvočni valovi, ki se širijo skozi gobasto kost, so podvrženi disperziji in dušenju. Obstajata dva različna fizična učinka, ki vplivata na dinamične lastnosti kosti: (i) prenos mehanske energije v toploto zaradi viskoznosti kostnega mozga (viskoelastično dušenje in disperzija) [215] in (ii) zaporedni odboji in lomi lokalnih valov na mejah med trabekulami in kostnim mozgom (Blochova disperzija) [98]. S teoretičnega vidika se oba učinka pojavljata hkrati, vendar pa je njuna intenzivnost zelo odvisna od frekvence. Pri mnogih realnih materialih so učinki viskoelastičnega dušenja in Blochove disperzije opazni v precej oddaljenih frekvenčnih območjih. V tem primeru jih je mogoče analizirati ločeno.

Proučujemo prečne izvenravninske strižne valove, ki se širijo v ravnini x_1x_2 skozi pravilno gobasto strukturo, sestavljeno iz prostorsko neskončne elastične matrice (trabekul) $\Omega^{(1)}$ in viskoznih vključkov (kostnega mozga) $\Omega^{(2)}$ (slika 3.10). Veljavna dvodimenzionalna valovna enačba je

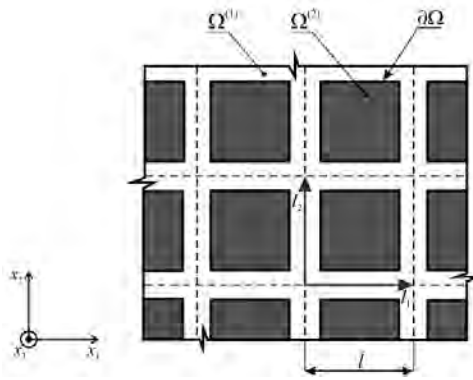
$$\nabla_x \cdot (G \nabla_x w) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3.28)$$

kjer je G kompleksni strižni modul, ρ je masna gostota, u je vzdolžni pomik v smeri x_3 , $\nabla_x = \mathbf{e}_1 \partial / \partial x_1 + \mathbf{e}_2 \partial / \partial x_2$, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ sta enotska vektorja v kartezičnih koordinatah.

Zaradi heterogenosti medija sta fizikalni lastnosti G in ρ predstavljeni z zveznimi funkcijami

$$\rho G(\mathbf{x}) = G^{(a)}(\mathbf{x}), \quad \rho(\mathbf{x}) = \rho^{(a)}(\mathbf{x}) \quad \text{Za} \quad \mathbf{x} \in \Omega^{(a)}, \quad \mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2. \quad (3.29)$$

Tukaj in v nadaljevanju nadpis (a) označuje različne komponente strukture, $a = 1, 2$. V enačbi (3.29) je $G^{(1)}$ realni strižni modul elastične matrice, $G^{(2)} = i\omega\nu^{(2)}$, kjer je ω frekvenca harmoničnega valovanja, $\nu^{(2)}$ pa viskoznost kostnega mozga.



Slika 3.10. Obravnavana gobasta struktura.

Ker enačba (3.28) vsebuje delta funkcije, v nadaljevanju obravnavamo posplošeno rešitev te enačbe [275]. Enačbo (3.28) lahko ekvivalentno zapišemo v obliki

$$G^{(a)} \nabla_{x\alpha}^2 u^{(a)} = \rho^{(a)} \frac{\partial^2 u^{(a)}}{\partial t^2}, \quad (3.30)$$

$$\left\{ u^{(1)} = u^{(2)} \right\} \Big|_{\partial\Omega}, \quad \left\{ G^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} = G^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} \right\} \Big|_{\partial\Omega}, \quad (3.31)$$

kjer sta $\nabla_{x\alpha}^2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$ in $\partial / \partial \mathbf{n}$ normalni odvod po robu $\partial\Omega$.

S fizikalnega vidika enačba (3.31) popisuje pogoje idealnega stika na meji $\partial\Omega$ med trabekulami in kostnim mozgom.

Začnimo s primerom, ko je valovna dolžina L bistveno večja od notranje velikosti l gobaste strukture, tj. $l \ll L$. Prvotno heterogeno kost lahko v približku nadomestimo s homogeno z določenim homogeniziranim efektivnim kompleksnim strižnim modulom G_0 . Takšen pristop zanemari lokalne odboje in lome valov na mikronivoju. Učinek disperzije nastane zaradi prenosa mehanske energije zvočnega valovanja v toploto zaradi viskoznosti kostnega mozga (tako imenovano viskoelastično dušenje).

Preučimo izhodiščni problem z robnimi pogoji (3.30), (3.31) z uporabo metode asimptotične homogenizacije. Da bi ločili makro- in mikrokomponeente rešitve, uvedemo počasne x in hitre y koordinatne spremenljivke

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = \eta^{-1} \mathbf{x}, \quad (3.32)$$

kjer je $\mathbf{y} = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2$ in $\eta = l/L$ je mali parameter. Nato poiščemo pomik v obliki vrste

$$u^{(a)} = u_0(\mathbf{x}) + \eta u_1^{(a)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \eta^2 u_2^{(a)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (3.33)$$

Prvi člen u_0 v vrsti (3.33) predstavlja homogenizirani del rešitve, ki ni odvisen od hitrih koordinat ($\partial u_0 / \partial y_1 = \partial u_0 / \partial y_2 = 0$). Naslednji členi $u_i^{(a)}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, zagotavljajo popravke velikostnega reda η^i in opisujejo lokalne variacije pomikov na mikronivoju.

Diferencialni operatorji so

$$G^{(a)} \left(\nabla_{xx}^2 u_{i-2}^{(a)} + 2\nabla_{xy}^2 u_{i-1}^{(a)} + \nabla_{yy}^2 u_i^{(a)} \right) = \rho^{(a)} \frac{\partial^2 u_{i-2}^{(a)}}{\partial t^2}. \quad (3.34)$$

kjer so $\nabla_y = \mathbf{e}_1 \partial / \partial y_1 + \mathbf{e}_2 \partial / \partial y_2$, $\nabla_{xy}^2 = \partial^2 / (\partial x_1 \partial y_1) + \partial^2 / (\partial x_2 \partial y_2)$, $\nabla_{yy}^2 = \partial^2 / \partial y_1^2 + \partial^2 / \partial y_2^2$.

Razdelitev izhodiščnega problema (3.30)–(3.31) glede na η vodi do rekurzivnega zaporedja problemov z robnimi pogoji za celico

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{(1)} = u_i^{(2)} \Big|_{\partial\Omega}, \\ G^{(1)} \left(\frac{\partial u_{i-1}^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \mathbf{m}} \right) = G^{(2)} \left(\frac{\partial u_{i-1}^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial \mathbf{m}} \right) \Big|_{\partial\Omega}, \end{array} \right. \quad (3.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{(1)} = u_i^{(2)} \Big|_{\partial\Omega}, \\ G^{(1)} \left(\frac{\partial u_{i-1}^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \mathbf{m}} \right) = G^{(2)} \left(\frac{\partial u_{i-1}^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial \mathbf{m}} \right) \Big|_{\partial\Omega}, \end{array} \right. \quad (3.36)$$

kjer je $i = 1, 2, 3, \dots$, $u_{-1}^{(a)} = 0$, $\partial / \partial \mathbf{m}$ je je normalni odvod po robu $\partial\Omega$, zapisan v hitrih spremenljivkah.

Za prostorsko periodični medij morajo členi $u_i^{(a)}$ izpolnjevati pogoje periodičnosti

$$u_i^{(a)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u_i^{(a)}(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{L}_p) \quad (3.37)$$

in normalizacije

$$\langle u_i^{(a)} \rangle = 0, \quad (3.38)$$

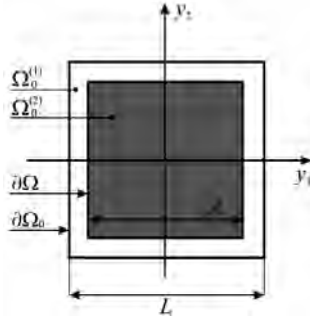
kjer so $\mathbf{L}_p = \eta^{-1} \mathbf{l}_p$, $\mathbf{l}_p = p_1 \mathbf{l}_1 + p_2 \mathbf{l}_2$, $p_1, p_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ pa bazična translacijska vektorja gobaste strukture.

Uvedimo homogenizacijski operator po domeni enotske celice $\Omega_0 = \Omega_0^{(1)} + \Omega_0^{(2)}$ (slika 3.11), $S_0 = L^2$ je ploščina enotske celice v hitrih koordinatah

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{S_0} \left(\iint_{\Omega_0^{(1)}} (\cdot) dy_1 dy_2 + \iint_{\Omega_0^{(2)}} (\cdot) dy_1 dy_2 \right). \quad (3.39)$$

Pogoje (3.37), (3.38) nadomestimo z naslednjimi ničelnimi robnimi pogoji za te funkcije v središču celice in vzdolž zunanega roba $\partial\Omega_0$

$$\left\{ u_i^{(2)} = 0 \right\} \Big|_{x,y=0}, \quad \left\{ u_i^{(1)} = 0 \right\} \Big|_{\partial\Omega_0}. \quad (3.40)$$



Slika 3.11. Periodično ponavljajoča se enotska celica.

Približek "ničelnih robnih pogojev" se zdi povsem razumen. Za 1D primer je enakovreden pogojem periodičnosti. Za 2D primer zamenjava pogojev periodičnosti z ničelnimi robnimi pogoji vodi do bolj togega sistema in zagotavlja zgornjo mejo za efektivne lastnosti. Numerični izračuni so pokazali, da odstopanje med rešitvami obeh primerov ni bistveno, vendar pa uporaba robnih pogojev (3.40) dovolj poenostavi problem za enotsko celico.

Zaradi periodičnosti $u_i^{(a)}$ (glej enačbo (3.37)) enačbe (3.35), (3.36) lahko obravnavamo znotraj ene same enotske celice. Rešitev problema za enotsko celico (3.35), (3.36), (3.37) pri $i = 1$ določa člen $u_1^{(a)}$. Da bi našli efektivni modul G_0 , uporabimo operator homogenizacije (3.39) za enačbo (3.37) pri $i = 2$. Izraz $u_2^{(a)}$ odpravimo s pomočjo izreka Green-Ostrodradskega, ki skupaj z robnimi pogoji (3.36) in relacijo periodičnosti (3.37) poda

$$\left\langle G^{(a)} \left(\nabla_{xy}^2 u_i^{(a)} + \nabla_{yy}^2 u_{i+1}^{(a)} \right) \right\rangle = 0. \quad (3.41)$$

Kot rezultat dobimo homogenizirano valovno enačbo reda η^0 :

$$\left\langle G^{(a)} \left(\nabla_{xy}^2 u_0 + \nabla_{yy}^2 u_1^{(a)} \right) \right\rangle = \left\langle \rho^{(a)} \right\rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}. \quad (3.42)$$

Z vstavljanjem v (3.42) izrazov za $u_1^{(a)}$, ovrednotenih spodaj, pridemo do makroskopske valovne enačbe

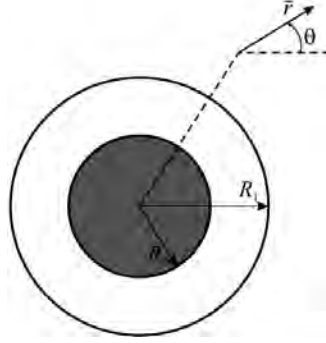
$$G_0 \nabla_{xy}^2 u_0 = \rho_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}. \quad (3.43)$$

kjer je $\rho_0 = (1 - c^{(2)})\rho^{(1)} + c^{(2)}\rho^{(2)}$ efektivna masna gostota, $c^{(2)}$ prostorninski delež vključkov, $c^{(2)} = A^2/S_0$, A pa velikost vključkov (slika 3.11).

Efektivni modul G_0 je mogoče izpeljati po oceni integralov v enačbi (3.42). Spodaj najdemo približne rešitve problema za enotsko celico (3.35), (3.36), (3.40) in določimo efektivni strižni modul G_0 z uporabo pristopa perturbacije oblike roba in teorije mazanja.

Če je prostorninski delež vključkov $c^{(2)}$ kostnega mozga relativno majhen, lahko kvadratne oblike domen $\Omega^{(1)}$ in $\Omega^{(2)}$ približno nadomestimo s krogoma polmerov R_1 in R_2 , tako da je

$c^{(2)} = R_2^2/R_1^2$ (slika 3.12). To poenostavitev lahko štejemo za prvi približek metode perturbacije oblike roba[196].



Slika 3.12. Poenostavitev enotske celice v primeru $c^{(2)} \ll 1$.

Vpeljimo polarne koordinate $r^2 = y_1^2 + y_2^2$, $\tan \theta = y_2/y_1$ v enotsko celico. Pri tem enačbe (3.35), (3.36), (3.40) za $i = 1$ postanejo

$$\frac{\partial^2 u_1^{(a)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1^{(a)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_1^{(a)}}{\partial \theta^2} = 0, \quad (3.44)$$

$$\left\{ u_1^{(1)} = u_1^{(2)} \right\} \Big|_{r=R_2},$$

$$\left\{ G^{(1)} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial r} \right) = G^{(2)} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial r} \right) \right\} \Big|_{r=R_2}, \quad (3.45)$$

$$\left\{ u_1^{(2)} = 0 \right\} \Big|_{r=0}, \quad \left\{ u_1^{(1)} = 0 \right\} \Big|_{r=R_1}, \quad (3.46)$$

kjer je $\partial/\partial \mathbf{n} = \cos \theta \partial/\partial x_1 + \sin \theta \partial/\partial x_2$.

Rešitev poenostavljenega problema enotske celice (3.44) – (3.46) je sledeča

$$u_1^{(a)} = \left(C_1^{(a)} r + C_2^{(a)} r^{-1} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}},$$

$$C_1^{(1)} = \frac{(\lambda^{(2)} - 1) c^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 1 - c^{(2)} (\lambda^{(2)} - 1)}, \quad C_2^{(1)} = \frac{(\lambda^{(2)} - 1) R_2^2}{\lambda^{(2)} + 1 - c^{(2)} (\lambda^{(2)} - 1)},$$

$$C_1^{(2)} = -\frac{(\lambda^{(2)} - 1) (1 - c^{(2)})}{\lambda^{(2)} + 1 - c^{(2)} (\lambda^{(2)} - 1)}, \quad C_2^{(2)} = 0, \quad (3.47)$$

kjer je $\lambda^{(2)} = G^{(2)}/G^{(1)}$.

Z vstavljanjem izrazov (3.47) v homogenizirano enačbo (3.42) dobimo efektivni modul G_0 v zaključeni obliki:

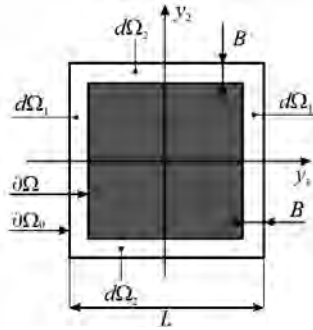
$$\lambda_0 = \frac{\lambda^{(2)} + 1 + c^{(2)} (\lambda^{(2)} - 1)}{\lambda^{(2)} + 1 - c^{(2)} (\lambda^{(2)} - 1)}, \quad (3.48)$$

kjer je $\lambda_0 = G_0/G^{(1)}$.

Opozoriti je treba, da je rešitev (3.48) popolnoma enaka tisti, kot jo lahko dobimo z modelom cilindričnega kompozitnega sestava in s posplošeno neodvisno.

V primeru gosto pakiranih vključkov kostnega mozga, ko je prostorninski delež $c^{(2)}$ blizu ena, je mogoče dobiti asimptotično rešitev problema za enotsko celico, če za naravni mali parameter uporabimo brezdimenzijsko širino trabekule $\delta = A/L$ (glej sliko 3.13). Naj bo $\delta \ll 1$. Če smo omejeni z aproksimacijo reda $O(\delta^0)$, lahko za pasova matrice $d\Omega_1$, $d\Omega_2$, ki ločujeta sosednje vključke, pokažemo:

$$\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial y_1^2} \gg \frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial y_2^2} \quad \text{za } \mathbf{y} \in d\Omega_1, \quad \frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial y_1^2} \ll \frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial y_2^2} \quad \text{za } \mathbf{y} \in d\Omega_2. \quad (3.49)$$



Slika 3.13. Enotska celica v primeru $c^{(2)} \rightarrow 1$.

Fizikalni pomen ocen (3.49) je v tem, da v ozkem pasu $d\Omega_1$ prevladuje spreminjanje lokalnih napetosti v smeri y_1 , zato lahko člen $\partial^2 u_1^{(1)}/\partial y_2^2$ zanemarimo v primerjavi z $\partial^2 w_1^{(1)}/\partial y_1^2$. Nasprotno pa je v pasu $d\Omega_2$ prevladujoče spreminjanje lokalnega napetostnega polja poteka v smeri y_2 , zato lahko člen $\partial^2 w_1^{(1)}/\partial y_1^2$ zanemarimo v primerjavi z $\partial^2 w_1^{(1)}/\partial y_2^2$. Takšna poenostavitev je podobna osnovni ideji znane teorije mazanja, ki se je vrsto let uporabljala v teoriji kompozitov [123].

Po ocenah (3.48) se enačba (3.35) v aproksimaciji reda $O(\delta^0)$ zapiše

$$\begin{aligned} G^{(1)} \left(\frac{\partial^2 u_{i-2}^{(1)}}{\partial x_s^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{i-1}^{(1)}}{\partial x_s \partial y_s} + \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial y_s^2} \right) &= p^{(1)} \frac{\partial^2 u_{i-2}^{(1)}}{\partial t^2}, \\ G^{(2)} \left(\nabla_{xx}^2 u_{i-2}^{(2)} + 2 \nabla_{xy}^2 u_{i-1}^{(2)} + \nabla_{yy}^2 u_i^{(2)} \right) &= p^{(2)} \frac{\partial^2 u_{i-2}^{(2)}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Rešitev poenostavljenega problema za enotsko celico (3.36), (3.40), (3.50) pri $i = 1$ je sledeča:

$$\begin{aligned}
 u_1^{(2)} &= -\frac{(1 - \sqrt{c^{(2)}})(\lambda^{(2)} - 1)}{\lambda^{(2)} - \sqrt{c^{(2)}}(\lambda^{(2)} - 1)} y_s \frac{\partial u_0}{\partial x_s}, \\
 u_1^{(1)} &= -\frac{\sqrt{c^{(2)}}(\lambda^{(2)} - 1)}{\lambda^{(2)} - \sqrt{c^{(2)}}(\lambda^{(2)} - 1)} \left(\frac{L}{2} - y_s\right) \frac{\partial u_0}{\partial x_s} \quad \text{pri } y_s > 0, \\
 u_1^{(1)} &= \frac{\sqrt{c^{(2)}}(\lambda^{(2)} - 1)}{\lambda^{(2)} - \sqrt{c^{(2)}}(\lambda^{(2)} - 1)} \left(\frac{L}{2} + y_s\right) \frac{\partial u_0}{\partial x_s} \quad \text{pri } y_s < 0,
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

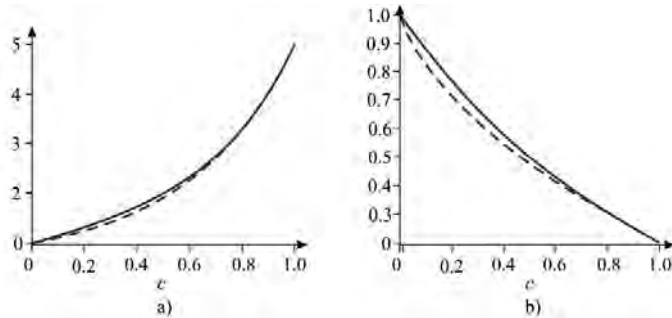
kjer je $s = 1, 2$.

Za efektivni strižni modul dobimo:

$$\lambda_0 = \frac{\lambda^{(2)} - \sqrt{c^{(2)}}(1 - \sqrt{c^{(2)}})(\lambda^{(2)} - 1)}{\lambda^{(2)} - \sqrt{c^{(2)}}(\lambda^{(2)} - 1)}. \tag{3.52}$$

Numerični rezultati, izračunani po formulah (3.48), (3.52), se dobro ujemajo (razen v primeru $\lambda^{(2)} < 1$, $c^{(2)} \rightarrow 0$). To je prikazano na sliki 3.14 za realne vrednosti $\lambda^{(2)}$, ki ustrezajo elastičnim materialom. Še več, v limiti $c^{(2)} \rightarrow 1$ približne rešitve (3.48), (3.52) izkazujejo enako asimptotično obnašanje in dajejo enake razširitve za λ_0 do reda $O[(1 - c^{(2)})^2]$:

$$\lambda_0 = \lambda^{(2)} - \frac{1}{2}(\lambda^{(2)} - 1)(\lambda^{(2)} + 1)(1 - c^{(2)}) + O\left[(1 - c^{(2)})^2\right] \quad \text{pri } c^{(2)} \rightarrow 1. \tag{3.53}$$



Slika 3.14. Efektivni modul v elastičnem primeru. Polna črta ustreza formuli (3.48), črtkana pa formuli (3.52): a) $\lambda^{(2)} = 5$, b) $\lambda^{(2)} = 0.2$.

To dejstvo razkriva, da za obravnavano gobasto strukturo izraz (3.48), prvotno pridobljen za primer $c^{(2)} \ll 1$, zagotavlja razumljiv približek v celotnem območju prostorninskega deleža vključkov $0 \leq c^{(2)} \leq 1$.

Oglejmo si harmonično valovanje

$$u_0 = U \exp(-i\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x}) \exp(i\omega t), \tag{3.54}$$

kjer je U amplituda, ω frekvenca, $\boldsymbol{\mu} = \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2$ je valovni vektor, smer širjenja valovanja pa določa kot $\alpha = (\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\mu})$, $\tan \alpha = \mu_2 / \mu_1$.

Če ločimo realni μ_R in imaginarni del μ_I valovnega vektorja $\boldsymbol{\mu} = \mu_R + i\mu_I$, se izraz (3.54) zapiše:

$$u_0 = U \exp(-\boldsymbol{\mu}_I \cdot \mathbf{x}) \exp(-i\boldsymbol{\mu}_R \cdot \mathbf{x}) \exp(i\omega t). \quad (3.55)$$

Tukaj je $\mu_I = |\mu_I|$ koeficient oslavitve in $\mu_R = |\mu_R| = 2\pi/L$ valovno število.

Za viskoelastičen kompozitni medij so efektivni kompleksni modul G_0 , koeficient oslavitve μ_I in fazna hitrost $v_p = \omega / \mu_R$ odvisni od frekvence potujočega signala. Če vstavimo izraz (3.29) v enačbo makroskopskega valovanja (3.43), dobimo

$$(G_{0,R} + iG_{0,I})(\mu_I + i\mu_R)^2 = -\rho_0 \omega^2, \quad (3.56)$$

kjer sta $G_{0,R}$, $G_{0,I}$ realni oziroma imaginarni dela kompleksnega modula $G_0 = G_{0,R} + iG_{0,I}$.

Po rutinskih transformacijah dobimo

$$\mu_I = \mu_R \tan(\varphi_0/2), \quad v_p^2 = \frac{v_0^2}{\cos(\varphi_0/2)^2} \quad (3.57)$$

kjer sta $\tan(\varphi_0) = G_{0,I}/G_{0,R}$ efektivni faktor izgub in $v_0 = \sqrt{|G_0|/\rho_0}$ efektivna hitrost v elastičnem primeru.

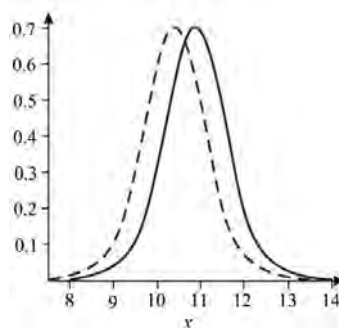
Če za G_0 sprejmemo rešitev (3.48), dobimo:

$$G_0 = G^{(1)} \frac{G^{(1)}(1 - c^{(2)}) + i\omega v^{(2)}(1 + c^{(2)})}{G^{(1)}(1 + c^{(2)}) + i\omega v^{(2)}(1 - c^{(2)})},$$

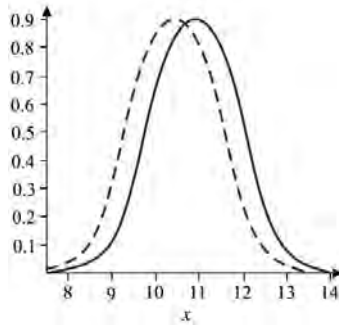
$$\tan(\varphi_0) = \frac{4G^{(1)}c^{(2)}\omega v^{(2)}}{[1 - (c^{(2)})^2][(G^{(1)})^2 + (\omega v^{(2)})^2]}. \quad (3.58)$$

V numeričnih primerih običajno vzamemo grobo oceno lastnosti komponent (glej na primer [100, 194, 444]). Strižni modul trabekul je $G^{(1)} = 3.85 \cdot 10^9$ Pa, viskoznost kostnega mozga je $v^{(2)} = 0.15$ Pa·s (pri sobni temperaturi 20 °C) in $v^{(2)} = 0.05$ Pa·s (pri telesni temperaturi 37 °C). Prostorninski delež trabekul $c^{(1)} = 1 - c^{(2)}$ se lahko spreminja od 0.05 do 0.1 za stare osteoporozne kosti ter od 0.3 do 0.35 za mlade normalne kosti.

Odvisnosti koeficienta oslavitve μ_I od frekvence ω so prikazane na sliki 3.15 (normalna kost, $c^{(1)} = 0.3$) in sliki 3.16 (osteoporozna kost, $c^{(1)} = 0.1$). Disperzijski učinek izgine (i) pri $\omega \rightarrow 0$, ko je hitrost deformacije majhna in je togost kostnega mozga zanemarljiva, in (ii) pri $\omega \rightarrow \infty$, ko je hitrost deformacije velika in se kostni mozeg odziva kot popolnoma tog medij. Zmanjšanje prostorninskega deleža trabekul $c^{(1)}$ vodi do stopnjevanja disperzije: razširi se frekvenčno območje dušenja in poveča faktor oslavitve μ_I . Znižanje temperature (tj. povečanje viskoznosti kostnega mozga $v^{(2)}$) povzroči zmanjšanje frekvence dušenja. Vsekakor je pri fizikalno pomembnih vrednostih lastnosti kosti učinek viskoelastičnega dušenja mogoče opaziti že pri frekvencah reda 100 MHz in več.



Slika 3.15. Koefficient oslabitve za normalno kost. Polna črta ustreza vrednosti $\nu^{(2)} = 0.05$ Pa·s, črtkana pa vrednosti $\nu^{(2)} = 0.15$ Pa·s.



Slika 3.16. Koefficient oslabitve za osteoporozno kost. Polna črta ustreza vrednosti $\nu^{(2)} = 0.05$ Pa·s, črtkana pa vrednosti $\nu^{(2)} = 0.15$ Pa·s.

Upoštevati je treba, da je v območju dolgih valov ($l \ll L$) obravnavana gobasta struktura transversalno-ortotropna. Dobljena rešitev za izvenravninske strižne valove je izotropna v ravnini x_1x_2 , zato parametra G_0 , φ_0 nista odvisna od smeri širjenja valovanja. Učinek anizotropije je predviden v primeru kratkih valov.

Ko je valovna dolžina L primerljiva z notranjo velikostjo l gobaste strukture, zaporedni odboji in lomi lokalnih valov na mejah trabekul in kostnega mozga povzročijo učinek disperzije. Zmanjšanje valovne dolžine razkrije zaporedje prehodnih in zaustavitvenih frekvenčnih pasov. Tako lahko heterogena kost deluje kot diskretni valovni filter. Če frekvenca signala pade znotraj zaustavitvenega pasu, je vzbujeno stacionarno valovanje in sosednje trabekule vibrirajo v izmeničnih smereh. Na makroravni amplituda globalnega valovanja eksponentno pada, tako da širjenje valov ni mogoče.

Da bi raziskali tak primer, predpostavimo, da je začetek prvega zaustavitvenega pasu bistveno nižji od frekvenc viskoelastičnega dušenja. Ker mozeg ni vključen v strižno deformacijo, lahko predpostavimo $G^{(2)} = 0$, $\rho^{(2)} = 0$.

Po Bloch-Floquetovem izreku (podpoglavje 2.3) je harmonično valovanje, ki se širi skozi periodično gobasto strukturo, predstavljeno v obliki

$$w = F(\mathbf{x}) \exp(i\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x}) \exp(i\omega t), \quad (3.59)$$

kjer je $F(\mathbf{x})$ prostorsko periodična funkcija, $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x} + \mathbf{l}_p)$.

Uporabimo metodo razvoja ravninskega vala [411] in izrazimo funkcijo $F(\mathbf{x})$ ter lastnosti materiala $G(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$ v obliki Fourierove vrste:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} A_{k_1 k_2} \exp \left[i \frac{2\pi}{l} (k_1 x_1 + k_2 x_2) \right], \\ G(\mathbf{x}) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} B_{k_1 k_2} \exp \left[i \frac{2\pi}{l} (k_1 x_1 + k_2 x_2) \right], \\ \rho(\mathbf{x}) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} C_{k_1 k_2} \exp \left[i \frac{2\pi}{l} (k_1 x_1 + k_2 x_2) \right], \end{aligned} \quad (3.60)$$

kjer sta

$$\begin{aligned} B_{k_1 k_2} &= \frac{1}{l^2} \iint_{\Omega_0} G(\mathbf{x}) \exp \left[-i \frac{2\pi}{l} (k_1 x_1 + k_2 x_2) \right] dx_1 dx_2, \\ C_{k_1 k_2} &= \frac{1}{l^2} \iint_{\Omega_0} \rho(\mathbf{x}) \exp \left[-i \frac{2\pi}{l} (k_1 x_1 + k_2 x_2) \right] dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

in operator $\iint_{\Omega_0} (\cdot) dx_1 dx_2$ označuje integracijo po enotski celici Ω_0 .

Če vstavimo izraze (3.59) in razvoj (3.60) v valovno enačbo (3.28) ter zberemo člene $\exp[i2\pi l^{-1}(j_1 x_1 + j_2 x_2)]$, $j_1, j_2 = 0, \pm 1, 2, \dots$, pridemo do neskončnega sistema linearnih algebraičnih enačb za neznane koeficiente $A_{k_1 k_2}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} A_{k_1 k_2} \left\{ B_{j_1 - k_1, j_2 - k_2} \left[\left(\frac{2\pi}{l} k_1 + \mu_1 \right) \left(\frac{2\pi}{l} j_1 + \mu_1 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{2\pi}{l} k_2 + \mu_2 \right) \left(\frac{2\pi}{l} j_2 + \mu_2 \right) \right] - C_{j_1 - k_1, j_2 - k_2} \omega^2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Sistem (3.61) ima netrivialno rešitev natanko takrat, ko je determinanta matrice koeficientov enaka nič. Z enačenjem determinante z nič izpeljemo disperzijske zveze za ω in $\boldsymbol{\mu}$. Opozoriti je treba, da metoda razvoja ravninskega vala ne uporablja eksplicitno podanih pogojev na stiku (3.31), so pa le-ti implicitno "vgrajeni" v enačbo (3.28) in razvoje (3.60).

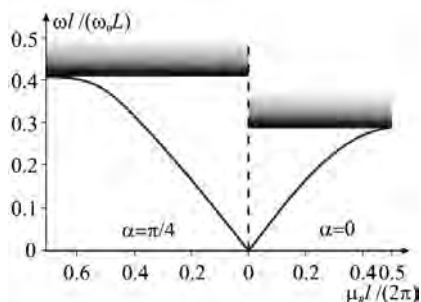
Za ponazoritev pojava fononskih pasovnih vrzeli prepíšimo izraz (3.59), ki ločuje realne μ_R in imaginarne μ_I dele valovnega vektorja $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_R + i\boldsymbol{\mu}_I$, v naslednjo obliko:

$$w = F(\mathbf{x}) \exp(-\boldsymbol{\mu}_I \cdot \mathbf{x}) \exp(i\boldsymbol{\mu}_R \cdot \mathbf{x}) \exp(i\omega t). \quad (3.62)$$

Imaginarni del $\mu_I \equiv |\mu_I|$ predstavlja faktor oslavitve. Frekvenčna območja, kjer je $\mu_I \neq 0$, ustrezajo zaustavitvenim pasovom (signal (3.59) slabi eksponentno), medtem ko območja, kjer je $\mu_I = 0$, ustrezajo pasovom prepustnosti.

V numeričnih primerih so disperzijske zveze izračunane približno s krnjenjem neskončnega sistema (3.61) ob predpostavki $-j_{max} \leq j_s \leq j_{max}$. Število ohranjenih enačb je $(2j_{max} + 1)^2$.

Pričakujemo lahko, da povečanje j_{max} izboljša natančnost rešitve. S fizikalnega vidika taka okrnitev pomeni izločitev višjih frekvenc.



Slika 3.17. Disperzijske krivulje za normalno kost.

Slika 3.17 prikazuje disperzijske krivulje za normalno kost z naslednjimi lastnostmi trabekularnega tkiva: $G^{(1)} = 3.85 \cdot 10^9$ Pa, $\rho^{(1)} = 1900$ kg/m³, $c^{(1)} = 0.3$. Izračuni so izvedeni za $j_{max} = 3$. Diagram je sestavljen iz dveh delov (levega in desnega), ki sta ločena z navpično črtkano črto. Desni del prikazuje rešitev za pravokotno smer ($\alpha = 0$), levi del pa za diagonalno smer ($\alpha = \pi/4$) širjenja valov. Rezultati za frekvenco ω so normalizirani na $\omega_0 = v_0 \mu_R = 2\pi v_0 / L$. Opazimo lahko, da je v dolgovalovnem primeru ($\omega \rightarrow 0$, $l/L \rightarrow 0$) rešitev izotropna, s povečanjem ω in zmanjšanjem L pa gobasta struktura izkazuje anizotropno obnašanje.

Osenčena območja na sliki 3.17 označujejo začetek prvih zaustavitvenih pasov. Ocenimo ustrezne vrednosti frekvence ω_s . Dobimo $\omega_s l / (\omega_0 L) \approx 0.29$ pri $\alpha = 0$ in $\omega_s l / (\omega_0 L) \approx 0.41$ pri $\alpha = \pi/4$. Tipična dolžina trabekul je približno $l \approx 10^{-3}$ m. Ob upoštevanju $\omega_0 = 2\pi v_0 / L$, $v_0 = \sqrt{|G_0| / \rho_0}$ izpeljemo: $\omega_s \approx 2.0$ MHz pri $\alpha = 0$ in $\omega_s \approx 2.8$ MHz pri $\alpha = \pi/4$.

4 Longitudinalno valovanje v večslojnih kompozitih z upoštevanjem fizikalnih in geometrijskih nelinearnosti

Proučujemo širjenje valov v nelinearno elastičnih medijih z mikrostrukturo. Kot ilustrativen primer je obravnavan 1D model večslojnega kompozitnega materiala. Geometrijsko nelinearnost opisuje Cauchy-Greenov deformacijski tenzor. Za napovedovanje fizikalne nelinearnosti se uporablja deformacijska energija v obliki razvoja v vrsto po potencah deformacij. Efektivna valovna enačba je izpeljana z metodo asimptotične homogenizacije višjega reda. Dobljena je asimptotična rešitev problema nelinearne celice z uporabo razvoja v vrsto po potencah gradientov pomikov. Predstavljeni so analitični izrazi za efektivne module. Ravnovesje med nelinearnostjo in disperzijo povzroči nastanek stacionarnih nelinearnih valov, ki so eksplicitno opisani z eliptičnimi funkcijami. V primeru šibke nelinearnosti je razvita asimptotična rešitev. Zaznani so številni nelinearni pojavi, kot je generiranje načinov višjega reda in lokalizacija. Predstavljeni so numerični rezultati in ponazorjen ter obravnavan praktični pomen nelinearnih učinkov.

4.1. TEMELJNE RELACIJE NELINEARNE TEORIJE ELASTIČNOSTI

V tem razdelku obravnavamo elastične valove deformacij v periodično nehomogenem materialu z geometrijsko in fizikalno nelinearnostjo. Na začetku se ponovno posvetimo temeljnim enačbam nelinearne teorije elastičnosti za homogeni izotropni medij. Geometrijsko nelinearnost je mogoče upoštevati z uvedbo natančnih razmerij med deformacijami ϵ_{ij} in pomiki u_i . V predhodno deformiranem stanju ta razmerja določa naslednji Cauchy-Greenov deformacijski tenzor [290]:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

Tu in kasneje v tem razdelku seštevanje poteka po vseh ponavljajočih se indeksih. Piola-Kirchhoffov tenzor napetosti je definiran preko gostote potencialne energije deformacije W na naslednji način

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial (\partial u_i / \partial x_j)} \quad (4.2)$$

Gibalne enačbe se zapišejo kot

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (4.3)$$

kjer je ρ gostota.

Za opis fizikalne nelinearnosti predstavimo gostoto notranje energije W v obliki potenčne vrste, ki vključuje potence invariant deformacijskega tenzorja [290] v naslednji obliki

$$W = \frac{\lambda}{2} \epsilon_{ii}^2 + \mu \epsilon_{ij}^2 + \frac{A}{3} \epsilon_{ij} \epsilon_{jk} \epsilon_{ik} + B \epsilon_{ii} \epsilon_{ij} \epsilon_{ji} + \frac{C}{3} \epsilon_{ii}^3 + O(\epsilon_{ij}^4), \quad (4.4)$$

Prva dva člena vrste (4.4) ustrezata linearno elastičnemu modelu, medtem ko sta λ, μ Laméjeva koeficienta. Zaporedni členi upoštevajo fizikalno nelinearnost, medtem ko so A, B, C elastični moduli tretjega reda (Landaujevi koeficienti). Enačba (4.4) opisuje elastični Murnaghanov potencial [328]. Poudariti je treba, da so Landaujevi koeficienti znani [111, 148, 178, 214, 290, 370] (glej tudi tabelo 4.1.) za večino materialov.

Tabela 4.1.

Elastične lastnosti nekaterih materialov in mineralov, ki tvorijo kamnine [370], GPa.

Material	λ	μ	A	B	C
Jeklo Helca 37	111	82,1	-720	-280	-180
Aluminij D16T	57	27,6	-260	-180	-110
Organsko steklo	3,9	1,9	-14,4	-7,2	-4
Polistiren	1,7	0,95	-10	-8	-11
Granit	22	23,6	-14070	-20230	-1150
Apnenec	22,7	20,6	-9730	-6435	-1870
Peščenjak	1,9	6,3	-17530	-5670	-2230

Vendar Murnaghanov model velja samo za šibko fizikalno nelinearnost. Slednja narašča z večanjem amplitude deformacije. Vrsto (4.4) je moč uporabiti v praktičnih/inženirskih izračunih, če razmerje med tremi zaporednimi členi in prvima dvema ne preseže vrednosti 10^{-1} . V primeru večine konstrukcijskih materialov, vključno s kovinami in polimeri, so moduli elastičnosti tretjega reda negativni in absolutna vrednost večja od modulov elastičnosti drugega reda. Zato je območje uporabnosti vrste (4.4) omejeno z vrednostjo največje možne deformacije $\varepsilon \leq 10^{-2}$, medtem ko so pri trdnih telesih elastične deformacije manjše od 10^{-3} .

Murnaghanov model bi lahko bil neprimeren za modeliranje materialov iz gume in elastomerov, ki omogočajo upoštevanje velikih elastičnih deformacij (do reda 10^0), kot tudi za minerale, ki tvorijo kamnine in izkazujejo velike vrednosti elastičnih modulov tretjega reda (glej tabelo 4.1.). V slednjih primerih se uporabljajo druge relacije za notranjo energijo W [337].

4.2. VHODNI PROBLEM ROBNIH VREDNOSTI

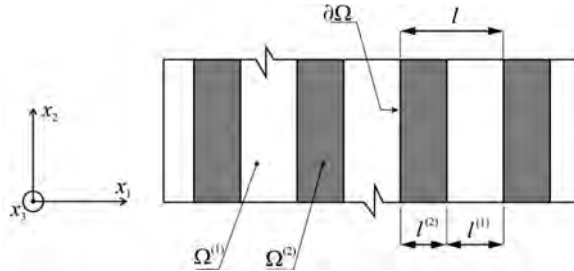
Obravnavamo večslojni kompozitni material, sestavljen iz dveh komponent $\Omega^{(1)}$ in $\Omega^{(2)}$ (glej sliko 4.1). Naj se ravninski valovi širijo v smeri do lokacije slojev; zato so parametri napetostno-deformacijskega stanja odvisni samo od ene prostorske koordinate x_1 , $u_i = u_i(x_1; t)$. Z vstavljanjem izrazov (4.1), (4.2), (4.4) v enačbo (4.3) dobimo naslednje tri PDE

$$E_1^{(n)} \frac{\partial^2 u_1^{(n)}}{\partial x_1^2} + E_2^{(n)} \frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_1^{(n)}}{\partial x_1^2} + E_{20}^{(n)} \left(\frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_2^{(n)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial x_1^2} \right) = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 u_1^{(n)}}{\partial t^2}, \quad (4.5)$$

$$\mu^{(n)} \frac{\partial^2 u_2^{(n)}}{\partial x_1^2} + E_{20}^{(n)} \left(\frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_2^{(n)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_1^{(n)}}{\partial x_1^2} \right) = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 u_2^{(n)}}{\partial t^2}, \quad (4.6)$$

$$\mu^{(n)} \frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial x_1^2} + E_{20}^{(n)} \left(\frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_1^{(n)}}{\partial x_1^2} \right) = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial t^2} \quad (4.7)$$

Tukaj in kasneje indeks (n) označuje število slojev $n = 1, 2, \rho^{(n)}$ pa pomeni njihovo gostoto.



Slika 4.1. Večslojni kompozitni material.

V zgornjih enačbah so

$$\begin{aligned} E_1^{(n)} &= \lambda^{(n)} + 2\mu^{(n)}, & E_{20}^{(n)} &= \lambda^{(n)} + 2\mu^{(n)} + A^{(n)}/2 + B^{(n)}, \\ E_2^{(n)} &= 3 \left(\lambda^{(n)} + 2\mu^{(n)} \right) + 2 \left(A^{(n)} + 3B^{(n)} + C^{(n)} \right) E_2^{(n)} = \\ &= 3 \left(\lambda^{(n)} + 2\mu^{(n)} \right) + 2 \left(A^{(n)} + 3B^{(n)} + C^{(n)} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Enačba (4.5) opisuje vzdolžno natezno-tlačno valovanje, medtem ko enačbi (4.6), (4.7) predstavljata dve prečni valovanji. V nasprotju z linearnim primerom so vzdolžni in prečni valovi povezani z nelinearnimi členi in elastična konstanta $E_{20}^{(n)}$ igra vlogo sklopitvenega koeficienta.

Nadalje obravnavamo longitudinalno valovanje ob predpostavki, da sta dve komponenti pomika $u_2^{(n)}, u_3^{(n)}$ enaki nič ($u_2^{(n)} = u_3^{(n)} = 0$), in uvedemo zapis $x \equiv x_1, u \equiv u_1, \sigma \equiv \sigma_{11}$. Nato dobimo

$$E_1^{(n)} \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} + E_2^{(n)} \frac{\partial \mu^{(n)}}{\partial x} \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2}. \quad (4.9)$$

Tukaj $E_1^{(n)}$ pomeni linearni modul elastičnosti, $E_2^{(n)}$ pa je nelinearni modul. V enačbi (4.8) za $E_2^{(n)}$ prvi člen $3(\lambda^{(n)} + 2\mu^{(n)})$ opisuje geometrijsko nelinearnost, medtem ko drugi člen $2(A^{(n)} + 3B^{(n)} + C^{(n)})$ izkazuje vstop fizikalne nelinearnosti. Pri večini fizikalno nelinearnih materialov so Landaujevi koeficienti negativni in glede na njihove absolutne vrednosti presegajo Laméjeve koeficiente (glej tabelo 4.1.). To pomeni, da je koeficient $E_2^{(n)}$ negativen, kar ustreza primeru šibke nelinearnosti. Če je material fizikalno linearen ($A^{(n)} = B^{(n)} = C^{(n)}$), medtem ko nelinearnost izvira iz geometrijskih dejavnikov, postane koeficient $E_2^{(n)}$ pozitiven in to ustreza primeru močne nelinearnosti.

Na meji komponent $\partial\Omega$ uporabimo pogoje popolnega stika

$$u^{(1)} = u^{(2)}, \quad \sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} \quad \text{pri} \quad \partial\Omega, \quad (4.10)$$

kjer je $\sigma^{(n)} = E_1^{(n)} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} + \frac{E_1^{(n)}}{2} \left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} \right)^2$.

Upoštevajmo, da so glede na stopnjo točnosti okrnjene vrste (4.4) v enačbi (4.9) členi reda $O \left[\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} \right]$ zanemarjeni.

4.3. MAKROSKOPSKA VALOVNA ENAČBA

Uporaba asimptotične metode homogenizacije omogoča prehod robnih problemov za nehomogene medije (4.9), (4.10) na valovno enačbo za homogene medije.

Vstavimo brezdimenzijske spremenljivke $\bar{u} = u/U$, $\bar{x} = x/L$, kjer U pomeni amplitudo pomikov, L pa valovno dolžino.

PDE (4.9), (4.10) se preoblikujejo v naslednjo obliko

$$E_1^{(n)} \frac{\partial^2 \bar{u}^{(n)}}{\partial \bar{x}^2} + \delta E_2^{(n)} \frac{\partial \bar{u}^{(n)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{u}^{(n)}}{\partial \bar{x}^2} = \rho^{(n)} L^2 \frac{\partial^2 \bar{u}^{(n)}}{\partial t^2}, \quad (4.11)$$

$$\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(2)},$$

$$E_1^{(1)} \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}} + \delta \frac{E_2^{(1)}}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}} \right)^2 = E_1^{(2)} \frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial \bar{x}} + \delta \frac{E_2^{(2)}}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \quad \text{na robu } \partial \Omega. \quad (4.12)$$

kjer je $\delta = U/L$ mali parameter.

Uvedemo dve prostorski skali, povezani z velikostjo l celice periodičnosti (na mikronivoju) in valovno dolžino L (na makronivoju). Ob predpostavki $l < L$ uvedemo mali parameter $\eta = l/L$, ki opredeljuje nehomogenost kompozitnih materialov.

Uporabimo "počasno" $\bar{x} = \bar{x}$ in "hitro" $y = \eta^{-1} \bar{x}$ spremenljivko. V koordinati y je velikost celice enaka 1. Odvode izračunamo na naslednji način

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \eta^{-1} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + 2\eta^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x} \partial y} + \eta^{-2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (4.13)$$

Rešitev robnih problemov (4.11), (4.12) iščemo v naslednji obliki

$$\bar{u}^{(n)} = u_0(\bar{x}) + \eta u_1^{(n)}(\bar{x}, y) + \eta^2 u_2^{(n)}(\bar{x}, y) + \dots, \quad (4.14)$$

kjer prvi člen u_0 predstavlja povprečni del rešitve; na makroravni se počasi spreminja in ni odvisen od hitrih koordinat. Naslednji izrazi $u_i^{(n)}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, uvajajo popravke reda η^i in popisujejo lokalna nihanja rešitve na mikroravni.

Razcepitev relacij (4.11), (4.12) glede na parameter η podaja naslednje rekurzivno zaporedje nelinearnih enačb

$$E_1^{(n)} \left(\frac{\partial^2 u_{i-2}^{(n)}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 u_{i-1}^{(n)}}{\partial \bar{x} \partial y} + \frac{\partial^2 u_i^{(n)}}{\partial y^2} \right) + \delta E_2^{(n)} \sum_{j=0}^{i-1} \left[\left(\frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial u_{j+1}^{(n)}}{\partial y} \right) \times \left(\frac{\partial^2 u_{i-j-2}^{(n)}}{\partial \bar{x}^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{i-j-1}^{(n)}}{\partial \bar{x} \partial y} + \frac{\partial^2 u_{i-j}^{(n)}}{\partial y^2} \right) \right] = \rho^{(n)} L^2 \frac{\partial^2 u_{i-2}^{(n)}}{\partial t^2} \quad (4.15)$$

in robne pogoje

$$u_i^{(1)} = u_i^{(2)} \text{ na robu } \partial\Omega, \quad (4.16)$$

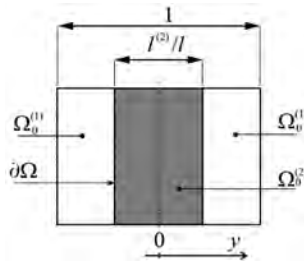
$$\begin{aligned} & E_1^{(1)} \left(\frac{\partial u_{i-1}^{(1)}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial y} \right) + \\ & \delta \frac{E_2^{(1)}}{2} \sum_{j=0}^{i-1} \left[\left(\frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial u_{j+1}^{(1)}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_{i-j-1}^{(1)}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial u_{i-j}^{(1)}}{\partial y} \right) \right] = \\ & E_1^{(2)} \left(\frac{\partial \bar{u}_{i-1}^{(2)}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial y} \right) + \\ & \delta \frac{E_2^{(2)}}{2} \sum_{j=0}^{i-1} \left[\left(\frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial u_{j+1}^{(2)}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_{i-j-1}^{(2)}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial u_{i-j}^{(2)}}{\partial y} \right) \right] \text{ na robu } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (4.17)$$

kjer je $i = 1, 2, 3, \dots, u_{-1}^{(n)} = 0$.

Zaradi periodičnosti mikrostrukture kompozitnega materiala funkcije $u_i^{(n)}$ izpolnjujejo tudi pogoje periodičnosti:

$$u_i^{(n)}(\bar{x}, y) = u_i^{(n)}(\bar{x}, y \pm 1), \quad (4.18)$$

in zato lahko robni problem (4.15) – (4.17) obravnavamo v območju ene ločene celice (glej sliko 4.2).



Slika 4.2. Celica periodičnosti večslojnega kompozitnega materiala.

Relacijo (4.18) lahko brez izgube splošnosti nadomestimo s pogoji ničelne povprečne vrednosti glede na periodo, tj.

$$\int_{\Omega_0^{(1)}} u_i^{(1)} dy + \int_{\Omega_0^{(2)}} u_i^{(2)} dy = 0. \quad (4.19)$$

Algoritem uporabljene metode homogenizacije je naslednji. S pomočjo zaporednega reševanja robnih problemov, definiranih na celici (4.15) – (4.17), (4.19) za $i = 1, 2, \dots, k$, lahko najdemo $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_k^{(n)}$.

Nato nadaljujemo z operatorjem povprečenja $\int_{-1/2}^{1/2}(\cdot)dy$ za $(k + 1)$ -to enačbo v (4.15). Člen $u_{k+1}^{(n)}$, se okrajša zaradi robnega pogoja (4.17) in zvez (4.18). Kot rezultat dobimo makroskopsko valovno enačbo reda η^{k-1} .

V tem razdelku obravnavamo izračune za $k = 3$. Upoštevajoč dano točnost modela (4.4) lahko izraza $u_2^{(n)}$ in $u_3^{(n)}$ upoštevamo v linearnem približku. Rešitev $u_1^{(n)}$ najdemo na podlagi naslednjega izraza glede na mali parameter δ

$$u_1^{(n)} = u_{10}^{(n)} + \delta u_{11}^{(n)} + O(\delta^2), \quad (4.20)$$

kjer

$$\begin{aligned} u_{10}^{(2)} &= A_{10}y \frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}}, & u_{10}^{(1)} &= (B_{10}y + C_{10}) \frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}}, \\ u_{11}^{(2)} &= A_{11}y \left(\frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}} \right)^2, & u_{11}^{(1)} &= (B_{11}y + C_{11}) \left(\frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}} \right)^2, \\ A_{10} &= -\frac{c^{(1)}(E_1^{(2)} - E_1^{(1)})}{c^{(2)}E_1^{(1)} + c^{(1)}E_1^{(2)}}, & B_{10} &= -A_{10} \frac{c^{(2)}}{c^{(1)}}, \\ C_{10} &= -\frac{B_{10}}{2} \text{ pri } y > 0, & C_{10} &= \frac{B_{10}}{2} \text{ pri } y < 0, \\ A_{10} &= -\frac{c^{(1)} \left[(E_1^{(1)})^2 E_2^{(2)} - (E_1^{(2)})^2 E_2^{(1)} \right]}{2(c^{(2)}E_1^{(1)} + c^{(1)}E_1^{(2)})^3}, & B_{11} &= -A_{11} \frac{c^{(2)}}{c^{(1)}}, \\ C_{11} &= -\frac{B_{11}}{2} \text{ pri } y > 0, & C_{11} &= \frac{B_{11}}{2} \text{ pri } y < 0, \end{aligned}$$

in $c^{(n)} = l^{(n)}/l$ pomeni prostorninska deleža komponent, pri čemer $c^{(1)} + c^{(2)} = 1$.

Makroskopska nelinearna valovna enačba reda η^2 ima naslednjo obliko

$$E_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}^2} + \delta E_2 \frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}^2} + \eta^2 E_3 \frac{\partial^4 u_0}{\partial \bar{x}^4} [1 + O(\delta)] + O(\eta^4) = \rho L^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \quad (4.21)$$

S prehodom v dimenzijske spremenljivke $u = \bar{u}U$, $x = \bar{x}L$ preoblikujemo enačbo (4.21) v naslednjo obliko

$$E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} + E_2 \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} + \eta^2 L^2 E_3 \frac{\partial^4 u}{\partial \bar{x}^4} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (4.22)$$

kjer so ρ povprečna gostota, pri čemer $\rho = c^{(1)}\rho^{(1)} + c^{(2)}\rho^{(2)}$, E_1, E_2, E_3 efektivni koeficienti linearne togosti.

Dobimo naslednje analitične formule za efektivne elastične koeficiente

$$E_1 = \frac{E_1^{(1)}E_1^{(2)}}{c^{(1)}E_1^{(2)} + c^{(2)}E_1^{(1)}}, \quad (4.23)$$

$$E_2 = \frac{c^{(1)}E_2^{(1)}\left(E_1^{(2)}\right)^3 + c^{(2)}E_2^{(2)}\left(E_1^{(1)}\right)^3}{\left(c^{(1)}E_1^{(2)} + c^{(2)}E_1^{(1)}\right)^3}, \quad (4.24)$$

$$E_3 = E_1 \frac{\left(c^{(1)}c^{(2)}\right)^2 v_0^4}{12\left(v^{(1)}v^{(2)}\right)^2} \left(\frac{z^{(1)}}{z^{(2)}} - \frac{z^{(2)}}{z^{(1)}}\right)^2, \quad (4.25)$$

kjer je $z^{(n)}$ akustična impedanca, pri čemer je $z^{(n)} = \sqrt{E_1^{(n)}\rho^{(n)}}$, $v^{(n)}$ hitrost širjenja valovanja skozi komponento (n) v linearnem primeru, pri čemer je $v^{(n)} = \sqrt{E_1^{(n)}/\rho^{(n)}}$, v_0 pa efektivna fazna hitrost v linearnem homogenem mediju ($E_2 \rightarrow 0$, $l/L \rightarrow 0$), pri čemer je $v_0 = \sqrt{E_1/\rho}$.

Formule (4.23) – (4.25) prikazujejo odvisnost efektivnih karakteristik kompozitnega materiala od lastnosti in volumskega deleža komponente. Naj omenimo, da so analitični rezultati za E_1 , E_3 znani že od prej, medtem ko so bile relacije (4.24) za E_2 pridobljene prvič.

Prvi člen na levi strani valovne enačbe (4.22) ustreza modelu linearnega homogenega medija, medtem ko drugi člen upošteva nelinearni učinek. Za večino fizikalno nelinearnih materialov je $E_1^{(n)} < 0$, zato bo tudi efektivni koeficient E_2 negativen, $E_2 < 0$ (šibka nelinearnost). V primeru fizikalno linearnega medija, ko je nelinearnost posledica le geometrijskih razlogov, dobimo $E_2^{(n)} > 0$ in $E_2 > 0$ (močna nelinearnost).

Tretji člen v enačbi (4.22) opisuje disperzijski učinek, ki ga povzroča disipacija energije zaradi nehomogenosti medija. Koeficient E_3 je enak nič in disperzija izgine: (i) v primeru homogenega materiala ($c^{(1)} = 1, c^{(2)} = 0$ ali $c^{(1)} = 0, c^{(2)} = 1$) in (ii) v primeru enakosti akustičnih impedanc komponent ($z^{(1)} = z^{(2)}$), ko ni lokalnih odbojev signala na ločilni meji $\partial\Omega$ (izhaja iz formul (4.25), $E_3 \geq 0$). Zato pojav mikrostrukture pomeni negativno (normalno) disperzijo, ki povzroči zmanjšanje fazne hitrosti ob povečanju frekvence. Dana ugotovitev velja le v okviru dolgovalovnega približka, ki ga opredeljuje enačba (4.22). Pri večjih frekvencah, ko je valovna dolžina primerljiva z velikostjo celice periodičnosti, lahko nehomogeni materiali izkazujejo normalno ali anomalno disperzijo.

Omeniti je treba, da je homogeniziran model (4.22) dobljen za primer neskončno razsežnega medija. Če upoštevamo strukturo končne velikosti, so rešitve odvisne od robnih pogojev, definiranih na makroravni. Omenjena odvisnost bo v formulah uvedla pojav dodatnih korekcijskih členov (4.23) – (4.25). Zato lahko formalni prehod rezultatov, dobljenih za neskončni medij, za primer končne velikosti povzroči napake v robnih pogojih.

Makroskopska valovna enačba (4.22) ima asimptotični izvor in je uporabna, kadar je valovna dolžina L večja od značilne velikosti l mikrostrukture, tako da je $\eta = l/L < 1$. Za oceno območja uporabnosti tega modela primerjamo disperzijsko odvisnost, ki jo dobimo iz enačbe (4.22), z eksaktno rešitvijo, ki smo jo našli za linearni primer s pomočjo Floquet-Blochove teorije.

Upoštevamo linearno valovanje $E_2 = 0$:

$$u = U \exp(ikx) \exp(i\omega t), \quad (4.26)$$

kjer je k valovno število, $k = 2\pi/L$ in ω frekvenca.

Vstavimo (4.26) v enačbo (4.22) in s tem dobimo asimptotično formulo za disperzijsko enačbo

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[1 - 4\pi^2 \frac{E_3}{E_1} \eta^2 + O(\eta^4) \right], \quad (4.27)$$

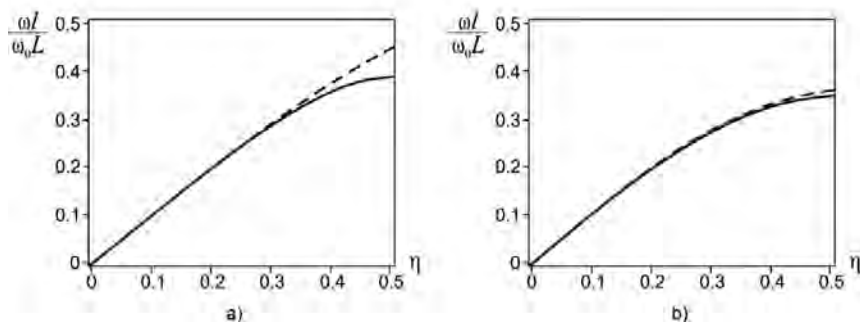
kjer sta $\omega_0 = v_0 k$, $\eta = l/L = kl/(2\pi)$.

Formula (4.27) opisuje akustično vejo disperzijske krivulje. Z ohranjanjem večjega števila členov lahko povečamo numerično natančnost rešitve. Vendar načeloma ni mogoče modelirati zaporednih vej v zgornjem delu spektra. Z zmanjševanjem valovne dolžine (povečanjem frekvence) v kompozitnem materialu nastanejo prepustni in zaustavitveni pasovi [98]. Če se frekvenca nahaja v zaustavitvenem pasu, se pojavi stoječe valovanje, katerega skupinska hitrost je enaka nič.

Po teoriji Floquet-Blocha [98] je moč določiti natančno odvisnost med ω in k z rešitvijo transcendentne enačbe naslednje oblike

$$\begin{aligned} \cos(kl) &= \cos\left(k^{(1)}l^{(1)}\right) \cos\left(k^{(2)}l^{(2)}\right) - \\ &\frac{1}{2} \left(\frac{z^{(1)}}{z^{(2)}} - \frac{z^{(2)}}{z^{(1)}} \right) \sin\left(k^{(1)}l^{(1)}\right) \sin\left(k^{(2)}l^{(2)}\right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

kjer je $k^{(n)} = \omega/v^{(n)}$.



Slika 4.3. Akustične veje disperzijskih krivulj v linearnem primeru: (a) jeklo-aluminij; (b) jeklo-karbonplastika [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].

Slika 4.3 prikazuje akustične veje disperzijskih krivulj, lokalizirane v intervalih prvega prepustnega pasu $0 < \eta < 1/2$. Mejna vrednost $\eta = 1/2$ ($L = 2l$) ustreza prvemu zaustavitvenemu pasu. Črtkane krivulje ustrezajo asimptotični formuli (4.27), medtem ko polne krivulje predstavljajo eksaktno rešitev (4.28). Izračuni so bili izvedeni za primere kompozitnih materialov »jeklo-aluminij« z nizkim kontrastom in »jeklo-karbonplastika« z izrazitim kontrastom. Lastnosti komponent so prikazane v tabeli 4.2. na podlagi referenc [286, 370]; volumski deleži komponent so enaki, tj. $c^{(1)} = c^{(2)} = 0,5$.

Tabela 4.2.

Lastnosti komponent kompozitnih materialov.

Material	λ [GPa]	μ [GPa]	ρ [kg/m ³]	v [m/s]	$z \cdot 10^{-6}$
Jeklo Helca 37	111	82,1	7800	5940	46,3
Aluminij D16T	57	27,6	2700	6450	17,4
Karbonplastika	5,18	3,45	1600	2750	4,40

Dobljeni rezultati kažejo, da je konvergenca asimptotične rešitve (4.27) odvisna od lastnosti materiala. V obravnavanih primerih homogenizirana valovna enačba (4.22) zagotavlja učinkovito natančnost za $\eta = l/L < 0,4$.

4.4 ANALITIČNA REŠITEV ZA STACIONARNO VALOVANJE

Obravnavamo stacionarno valovanje, ki se širi s konstantno hitrostjo, ne da bi spremenilo svojo obliko. V slednjem primeru rešitev izpolnjuje naslednje pogoje

$$u(x, t) = u(\xi), \quad (4.29)$$

kjer sta ξ spremenljivka trenutnega vala, tj. $\xi = x - vt$, v fazna hitrost.

Predstavimo naslednjo brezdimenzijsko deformacijo profila valov:

$$f = \frac{du}{d\xi}, \quad (4.30)$$

Z vstavljanjem formul (4.29) in (4.30) v enačbo (4.22) dobimo

$$\left(1 - \frac{v^2}{v_0^2}\right) \frac{df}{d\xi} + \frac{E_2}{E_1} f \frac{df}{d\xi} + \frac{E_3}{E_1} l^2 \frac{d^3 f}{d\xi^3} = 0. \quad (4.31)$$

Z integracijo po spremenljivki x pridemo do naslednje enačbe harmoničnega oscilatorja s kvadratno nelinearnostjo

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + af + bf^2 + c = 0, \quad (4.32)$$

kjer sta $a = E_1 (1 - v^2/v_0^2)/(E_3 l^2)$, $b = E_2/(2E_3 l^2)$ in je c integracijska konstanta.

Nekaj avtorjev pri raziskovanju širjenja nelinearnih valov v trdnih medijih ni upoštevalo konstante c [158]. Dobljeni rezultati so bili s fizikalnega vidika napačni. Jasno je, da pomiki u ne morejo neomejeno naraščati. To pomeni, da mora biti povprečna deformacija glede na periodo vala enaka nič:

$$\frac{1}{L} \int_0^L f(\xi) d\xi = 0. \quad (4.33)$$

Pogoj (4.33) omogoča iskanje konstante c . Da bi našli eksaktno analitično rešitev, pomnožimo enačbo (4.32) z $df/d\xi = dx$ in nato z integracijo dobimo

$$\frac{1}{2} \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 + \frac{a}{2} f^2 + \frac{b}{3} f^3 + f = W_0, \quad (4.34)$$

Enačbo (4.34) lahko interpretiramo kot princip ohranjanja energije anharmoničnega oscilatorja. Integracijska konstanta W_0 predstavlja začetno celotno energijo sistema, pri čemer je $W_0 > 0$; $W_k = (1/2)(df/d\xi)^2$ je kinetična energija; $W_p = (a/2)f^2 + (b/3)f^3 + f$ je potencialna energija; $W_0 = W_k + W_p$.

Enačbo (4.34) lahko preoblikujemo v naslednjo obliko:

$$\sqrt{2} d\xi = \frac{df}{\sqrt{W_0 - cf - \frac{a}{2}f^2 - \frac{b}{3}f^3}}. \quad (4.35)$$

Rešitev te enačbe obstaja, če kinetična energija izpolnjuje naslednjo neenakost

$$W_k = W_0 - W_p = W_0 - cf - \frac{a}{2}f^2 - \frac{b}{3}f^3 > 0. \quad (4.36)$$

Kubični člen $W_0 - cf - (a/2)f^2 - (b/3)f^3$ je v odvisnosti od vrednosti koeficientov odgovoren za enega ali tri realne korene. Ker primer enega realnega korena ustreza neomejeni rešitvi, ni obravnavan naprej; rešitev je omejena in periodična, če funkcija $W_k = W_0 - cf - (a/2)f^2 - (b/3)f^3$ zavzame vrednosti na intervalu med njenimi realnimi koreni.

Predstavimo polinom $W_0 - cf - (a/2)f^2 - (b/3)f^3$ preko njegovih korenov f_1, f_2, f_3 , tj.

$$W_0 - cf - \frac{a}{2}f^2 - \frac{b}{3}f^3 = -\frac{b}{3}(f - f_1)(f - f_2)(f - f_3). \quad (4.37)$$

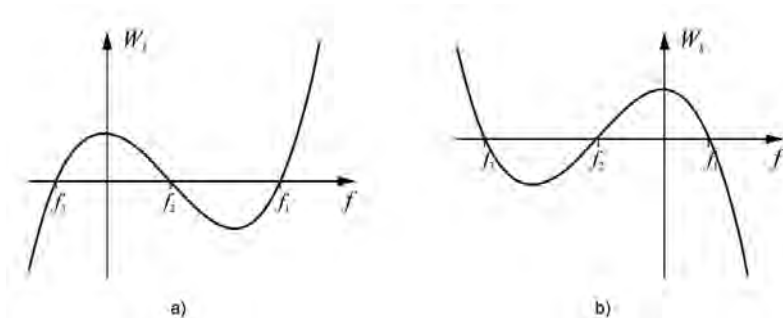
kjer

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 + f_3 &= -\frac{3a}{2b}, & f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_1 f_3 &= \frac{3c}{b}, \\ f_1 f_2 f_3 &= \frac{3W_0}{b}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Enačba (4.35) se preoblikuje v naslednjo obliko

$$\sqrt{-\frac{2}{3}bd\xi} = \frac{df}{\sqrt{(f - f_1)(f - f_2)(f - f_3)}}. \quad (4.39)$$

Predpostavimo naslednji vrstni red korenov: $f_1 \geq f_2 \geq f_3$. Oblika grafa funkcije kinetične energije je odvisna od šibke ($E_2 < 0$, $b < 0$) ali močne ($E_2 > 0$, $b > 0$) nelinearnosti kompozitnega materiala (glej sliko 4.4). V nadaljevanju na kratko obravnavamo oba primera.



Slika 4.4. Kinetična energija oscilatorja s kvadratno nelinearnostjo; (a) $b < 0$, (b) $b > 0$ [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].

Šibka nelinearnost. Če je $b < 0$, obstaja periodična rešitev za $f_2 \geq f \geq f_3$. Izvedimo naslednjo spremembo spremenljivk

$$g^2 = \frac{f - f_3}{f_2 - f_3}, \quad 0 \leq g^2 \leq 1, \quad (4.40)$$

$$s^2 = \frac{f_2 - f_3}{f_1 - f_3}, \quad 0 \leq s^2 \leq 1. \quad (4.41)$$

Potem enačba (4.39) zavzame naslednjo obliko

$$\sqrt{-\frac{b}{6}(f_1 - f_3)} d\xi = \frac{dg}{\sqrt{(1-g^2)(1-s^2g^2)}}. \quad (4.42)$$

Z integriranjem enačbe (4.42) dobimo

$$\sqrt{-\frac{b}{6}(f_1 - f_3)} \xi = \int_0^g \frac{dg}{\sqrt{(1-g^2)(1-s^2g^2)}}. \quad (4.43)$$

Izvedemo inverzijo eliptičnega integrala na desni strani enačbe (4.43) [2]:

$$f = f_3 + (f_2 - f_3) \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{-\frac{b}{6}(f_1 - f_3)} \xi, s \right]. \quad (4.44)$$

Uvedemo naslednje oznake: $F = f_2 - f_3$, $\kappa = 2\sqrt{-b(f_1 - f_3)/6} = \sqrt{-2bF/(3s^2)}$, kjer je F amplituda, $F > 0$, k pa konstanta širjenja (analog frekvence).

Rešitev (4.44) ima periodo $L = 4K(s)/\kappa$. Če vstavimo (4.44) v pogoj (4.33), dobimo

$$f_3 = -F \frac{1 - E(s)/K(s)}{s^2}, \quad (4.45)$$

kjer $K(s)$ in $E(s)$ označujeta popolne eliptične integrale prve in druge vrste [2].

Končno imamo

$$f_1 = \frac{F}{s^2} + f_3 = F \frac{E(s)}{s^2 K(s)}, \quad f_2 = F + f_3 = F \left[1 - \frac{1 - E(s)/K(s)}{s^2} \right] \quad (4.46)$$

in rešitev (4.44) se preoblikuje v naslednjo obliko

$$f = -F \frac{1 - E(s)/K(s)}{s^2} + F \operatorname{sn}^2 \left(\frac{\kappa}{2} \xi, s \right). \quad (4.47)$$

Modul s eliptične funkcije predstavlja rešitev naslednje transcendentne enačbe

$$\frac{v^2}{v_0^2} = 1 - 16 \left[3E(s)/K(s) - 2 + s^2 \right] K(s)^2 \frac{E_3}{E_1} \eta^2. \quad (4.48)$$

Konstanta širjenja κ je povezana z valovno dolžino L na naslednji način

$$\kappa = \frac{4K(s)}{L}. \quad (4.49)$$

Hitrost širjenja valovanja najdemo iz enačbe (4.38), in sicer

$$\frac{v^2}{v_0^2} = 1 - 16 \left[3E(s)/K(s) - 2 + s^2 \right] K(s)^2 \frac{E_3}{E_1} \eta^2. \quad (4.50)$$

Močna nelinearnost. Če je > 0 , potem periodična rešitev obstaja za $f_1 \geq f \geq f_2$. Namesto relacij (4.40), (4.41) uvedemo naslednje odvisnosti

$$\begin{aligned} g^2 &= \frac{f_1 - f}{f_1 - f_2}, & 0 \leq g^2 \leq 1, \\ s^2 &= \frac{f_1 - f_2}{f_1 - f_3}, & 0 \leq s^2 \leq 1, \end{aligned} \quad (4.51)$$

ter zapis

$$F = f_1 - f_2 > 0, \quad \kappa = 2\sqrt{b(f_1 - f_3)/6} = \sqrt{2bF/(3s^2)}. \quad (4.52)$$

Po izvedenih transformacijah na način, analogen prejšnjemu, dobimo

$$f = F \frac{1 - E(s)/K(s)}{s^2} - F \operatorname{sn}^2 \left(\frac{\kappa}{2} \xi, s \right), \quad (4.53)$$

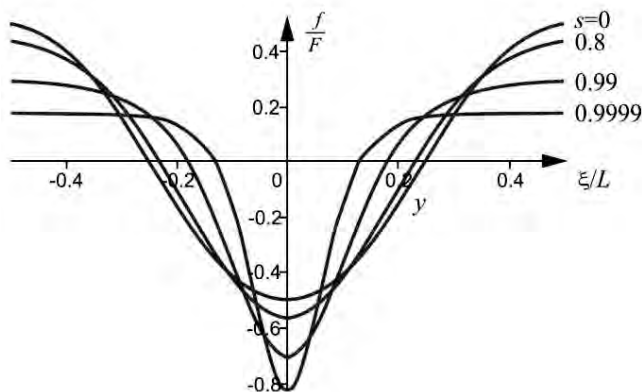
kjer je modul s opredeljen z naslednjo transcendentno enačbo

$$s^2 K(s)^2 = \frac{FE_2}{48\eta^2 E_3}. \quad (4.54)$$

Relaciji (4.49), (4.50) sta enaki. Opazimo, da se rešitvi (4.47), (4.48) v primeru šibke nelinearnosti ($E_2 < 0$) in rešitvi (4.53), (4.54) v primeru močne nelinearnosti ($E_2 > 0$) združita, ko se spremeni predznak koeficienta E_2 .

4.5 ANALIZA REŠITEV IN NUMERIČNI REZULTATI

Vrednost parametra s ocenjuje intenzivnost nelinearnih učinkov in omogoča določitev, kako močno se nelinearni režim širjenja valovanja razlikuje od linearnega. Slika 4.5 prikazuje obliko nelinearnih valov deformacije za različne vrednosti s . Izračuni so bili izvedeni za kompozitni material s šibko nelinearnostjo na podlagi enačbe (4.47).



Slika 4.5. Oblike periodičnih nelinearnih valov deformacije za $E_2 < 0$ [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].

V primeru $s = 0$ pride do naslednjih mejnih prehodov: $E(0) = \pi/2$, $K(0) = \pi/2$, $E(0)/K(0) \sim 1 - s^2/2$, $\text{sn}(z, 0) = \sin(z)$. Najdena rešitev opisuje naslednje harmonično valovanje

$$f = -\frac{F}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{L} \xi\right) \quad \text{za} \quad E_2 < 0, \quad f = \frac{F}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{L} \xi\right) \quad \text{za} \quad E_2 > 0,$$

$$\frac{v^2}{v_0^2} = 1 - 4\pi^2 \eta^2 \frac{E_3}{E_1}. \quad (4.55)$$

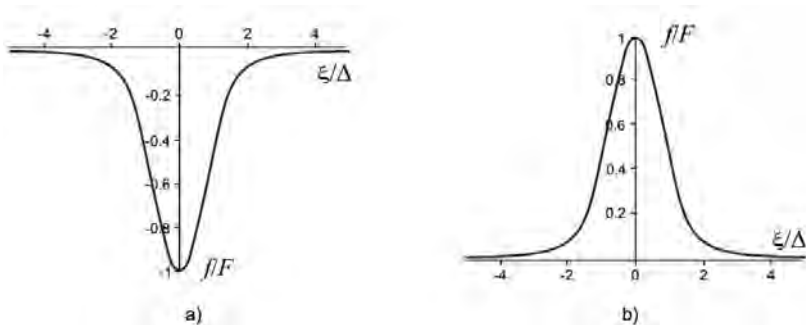
V primeru $s = 1$ se periodično nelinearno valovanje transformira v lokalizirano valovanje zvonaste oblike (soliton) - glej sliko 4.6. Ob upoštevanju, da je $E(1) = 1$, $\lim_{s \rightarrow 1} K(s) = \infty$, $\text{sn}(z, 1)^2 = 1 - \text{sech}(z)^2$ dobimo

$$f = -F \text{sech}^2\left(\frac{\xi}{\Delta}\right), \quad \frac{\Delta^2}{l^2} = -\frac{12E_3}{FE_2} \quad \text{za} \quad E_2 < 0,$$

$$f = F \text{sech}^2\left(\frac{\xi}{\Delta}\right), \quad \frac{\Delta^2}{l^2} = \frac{12E_3}{FE_2} \quad \text{za} \quad E_2 > 0,$$

$$\frac{v^2}{v_0^2} = 1 + 4 \frac{E_3 l^2}{E_1 \Delta^2}, \quad (4.56)$$

kjer parameter Δ pomeni širino solitona.



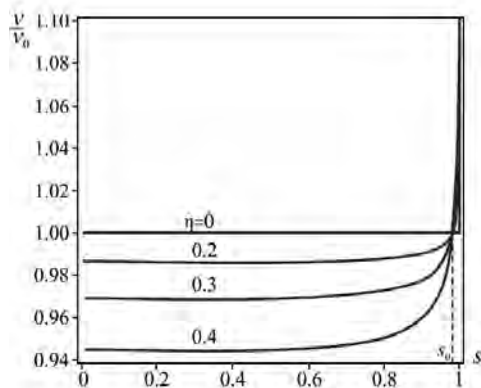
Slika 4.6. Lokalizirani nelinearni valovi deformacij (solitoni): (a) šibka nelinearnost ($E_2 < 0$); (b) močna nelinearnost ($E_2 > 0$) [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].

Analiza rešitve (4.56) omogoča doseganje pomembnih zaključkov glede lastnosti lokaliziranega nelinearnega širjenja valov v kompozitnih materialih. Ker je $F > 0$, potem imamo $f < 0$ v primeru šibke nelinearnosti ($E_2 < 0$). To pomeni, da se v takem materialu širijo lokalizirani tlačni valovi. Nasprotno imamo v primeru močne nelinearnosti ($E_2 > 0$) $f > 0$ in posledično lahko obstajajo le lokalizirani natezni valovi.

Povečanje amplitude solitona F povzroči zmanjšanje njegove širine Δ in povečanje njegove hitrosti v . Zato imajo "visoki" solitoni majhno širino in se širijo hitreje kot "nizki" solitoni.

Hitrost solitonov je večja od hitrosti širjenja valovanja, ki se širi v linearnem homogenem mediju, tj. $v > v_0$. To je ultrazvočni režim. Podoben učinek opazimo pri proučevanju nelinearnih valov deformacije v homogenem trdnem mediju [158, 398].

Nadaljnji numerični primeri so posvečeni primeru kompozita jeklo-aluminij. Lastnosti komponent so enake: $c^{(1)} = c^{(2)} = 0,5$. Na osnovi dobljene rešitve (4.23) – (4.25) izračunamo efektivne elastične koeficiente: $E_1 = 160$ GPa, $E_2 = 2385$ GPa (šibka nelinearnost) za $E_3 = 2,73$ GPa.



Slika 4.7. Fazna hitrost nelinearnega deformacijskega valovanja [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].

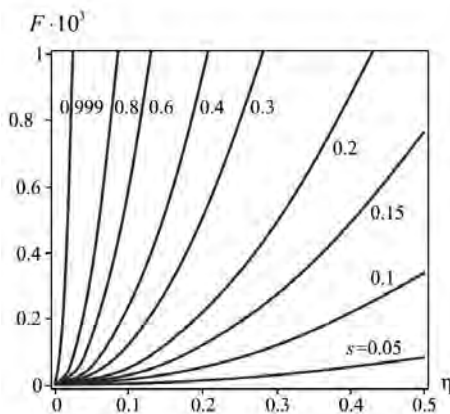
Slika 4.7 prikazuje rezultate za fazno hitrost v nelinearnega vala. Pri $s < s_0$ je realiziran nadzvočni ($v < v_0$) režim, pri $s > s_0$ pa ultrazvočni režim ($v > v_0$). Glede na razmerje (4.50) je mejna vrednost s_0 definirana z naslednjim pogojem

$$\frac{3E(s_0)}{K(s_0)} - 2 + s_0^2 = 0. \quad (4.57)$$

Z numeričnim reševanjem enačbe (4.57) dobimo $s_0 = 0,9803 \dots$. Opozoriti je treba, da navedena vrednost opredeljena le s tipom dobljene analitične rešitve in ni odvisna od lastnosti kompozitnega materiala.

Na podlagi dobljenih numeričnih rezultatov (glej sliki 4.5, 4.7) lahko sklepamo, da postane vpliv nelinearnosti na obliko in hitrost širjenja valovanja pomemben pri $s > 0,6 \dots 0,8$. V primeru manjših vrednosti s se valovna oblika skoraj ne razlikuje od harmonične, medtem ko je režim širjenja zelo blizu linearnemu.

Opazujmo, kako je vrednost parametra s odvisna od amplitude valovanja F ter od razmerja med valovno dolžino L in velikostjo mikrostrukture materiala l . Upoštevajmo tudi, da parameter $\eta = l/L$ označuje intenzivnost učinka disperzije. Višja kot je vrednost η , večji je vpliv mikrostrukture na disipacijo valovne energije. Parametrične odvisnosti modula s od F in η so prikazane na sliki 4.8 (ugotovljene so bile z numeričnim reševanjem enačbe (4.48)).



Slika 4.8. Modul s za karakterizacijo intenzivnosti nelinearnih učinkov [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].

Pridobljeni podatki ponazarjajo, kako se pojava nelinearnosti in disperzije kompenzirata. Povečanje amplitude F (s konstantnim η) pomeni povečanje s , kar povzroči povečanje intenzivnosti nelinearnih učinkov. Nasprotno zmanjšanje valovne dolžine in povečanje η (s konstantno amplitudo F) povzroči zmanjšanje parametra s ; rešitev postane bližje svoji linearni različici.

Analiza rezultatov, predstavljenih na sliki 4.8, omogoča oceno območij uporabnosti različnih aproksimativnih teorij v uporabi za modeliranje elastičnega valovanja, ki se širi v

trdnih telesih. Pri večini materialov, ki se uporabljajo za mehanske konstrukcije, je območje elastičnih deformacij omejeno z vrednostjo $F < 10^{-3}$. Nelinearni učinki se pokažejo pri $s > 0,6$ (v slednjem primeru $\eta < 0,13$). Posledično se modeliranje nelinearnih valov lahko izvede v okviru linearne aproksimacije valovnih dolžin (na primer z uporabo zveznih ali homogeniziranih modelov višjega reda).

Pojav disperzije igra ključno vlogo, ko je valovna dolžina blizu velikosti notranje strukture materiala, tj. za $\eta > 0,3$ (glej sliko 4.3). Potem dobimo $s < 0,28$, kar pomeni, da lahko nelinearne učinke zanemarimo. Zato lahko problem širjenja kratkih in močno disperzivnih valov analiziramo v okviru linearne teorije. Rešitev lahko dobimo s pomočjo Floquet-Blochove metode [98].

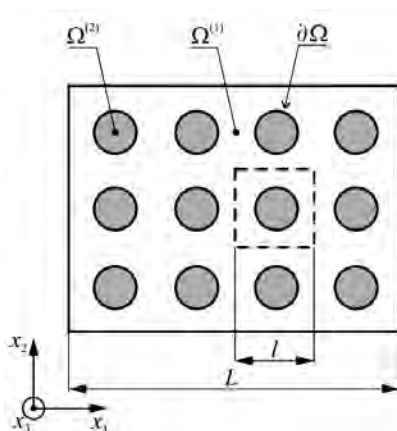
Dosedanje trditve ne veljajo, če model dopušča velike vrednosti elastičnih deformacij ($F > 10^{-2} \dots 10^{-1}$). V slednjem primeru se lahko nelinearni in disperzijski učinki pojavijo hkrati. Kažejo se v gumijastih materialih in elastomerih, molekularnih in atomskih verigah, nanocevkah itd.

5 Izvenravninsko strižno valovanje v vlaknastih kompozitih s strukturno nelinearnostjo

Proučujemo izvenravninske strižne valove, ki se širijo v vlaknenem kompozitu z upoštevanjem strukturne nelinearnosti. Podan in obravnavan je problem z robnimi pogoji v primeru nepopolnega stika. Nato je izpeljana makroskopska valovna enačba in predstavljena analitična rešitev za stacionarno valovanje ter analizirana v primeru šibkih in močnih nelinearnosti.

5.1. ROBNI PROBLEM V PRIMERU NEPOPOLNEGA STIKA

Obravnavamo vlaknasti kompozit, ki je sestavljen iz matrice $\Omega^{(1)}$ in kvadratne mreže cilindričnih vključkov $\Omega^{(2)}$ (glej sliko 5.1). Privzamemo, da lahko fizikalno in geometrijsko nelinearnost zanemarimo, nelinearne lastnosti modela pa izvirajo iz nepopolnih kontaktnih pogojev na meji med komponentama. Slednje pomeni strukturno nelinearnost, ki je povezana z nehomogenostjo notranje strukture kompozitnega materiala.



Slika 5.1. Vlaknasti kompozitni material.

Raziskujemo širjenje elastičnih valov v ravnini, ki je pravokotna na os vlaken. V tem primeru so komponente napetostno-deformacijskega stanja odvisne le od dveh prostorskih koordinat x_1, x_2 , sistem gibalnih enačb pa je razdeljen na dva ločena problema, ki opredeljujeta širjenje ravninskih valov in izvenravninskih strižnih valov. Nadaljnja obravnava je omejena le na izvenravninsko strižno valovanje. Pripadajoča valovna enačba ima naslednjo obliko:

$$\mu^{(n)} \left(\frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x_2^2} \right) = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2}, \quad (5.1)$$

kjer je $\mu^{(n)}$ Youngov modul in $u^{(n)}$ pomik v smeri x_3 , $n = 1, 2$.

Obravnavamo model nepopolnega stika med vlakni in matriko. Upoštevamo naslednje pogoje na stiku, vezane na napetosti

$$\sigma^* = \sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} \quad \text{na robu } \partial\Omega, \quad (5.2)$$

kjer je $\sigma^{(n)} = \mu^{(n)}(\partial\mu^{(n)}/\partial n)$, oz. $\partial/\partial n$ je odvajanje vzdolž normale n na rob $\partial\Omega$.

Prekinitve mehanskega stika med vlakni in matriko povzroči nastanek nezveznosti v poljih pomikov. Eden najbolj priljubljenih pristopov k modeliranju nepopolnega stika je uporaba odvisnosti med skokom pomikov $\Delta u^* = u^{(1)} - u^{(2)}$ in napetostmi σ^* na meji, ki ločuje domeni:

$$\Delta u^* = f(\sigma^*) \quad \text{na robu } \partial\Omega, \quad (5.3)$$

kje je $f(\sigma^*)$ funkcija adhezije.

Probleme nepopolnega stika so raziskovali številni avtorji. V preprostih primerih se predpostavlja, da je adhezijska funkcija linearna, meja med domenama pa igra vlogo vzmeti [5, 71, 202, 276, 332, 333, 336]. V [159, 160, 436, 437] je obravnavanih nekaj vrst bolj kompleksnih adhezijskih odvisnosti. Z uporabljenimi modeli se šibkost stika med matriko in vključkom σ^* povečuje ob povečevanju Δu^* in doseže maksimum, nato pa se zmanjša na nič, kar ustreza prekinitvi stika. Slednji pristop je bil zaporedno uporabljen za opisovanje pojavnosti mikroskopskih poškodb kompozitnih materialov. Vezi z nelinearnimi lastnostmi so bile raziskane v [277–279]. Eksperimentalne raziskave adhezije so bile izvedene v [428]. Če se odvisnost (5.3) izrazito ne razlikuje od linearne, jo lahko aproksimiramo z naslednjo okrnjeno vrsto:

$$\sigma^* = \mu_1^* \frac{\Delta u^*}{h} + \mu_3^* \left(\frac{\Delta u^*}{h} \right)^3 + O \left[\left(\frac{\Delta u^*}{h} \right)^5 \right] \quad \text{na robu } \partial\Omega, \quad (5.4)$$

kje h pomeni debelino meje, ki ločuje komponenti.

Deformacija izkazuje simetrijo, zato je adhezijska funkcija liha. To pomeni, da imamo $f(\sigma^*) = -f(-\sigma^*)$, v izrazu (5.4) pa se pojavljajo le lihe potence za $\Delta u^*/h$. Koeficienta μ_1^* , μ_3^* predstavljata linearno in nelinearno togost pri stiku med komponentama. Vrsta (5.4) se preoblikuje v

$$\frac{\Delta u^*}{h} = \frac{\sigma^*}{\mu_1^*} - \frac{\mu_3^*}{\mu_1^*} \left(\frac{\sigma^*}{\mu_1^*} \right)^3 + O \left[\left(\frac{\sigma^*}{\mu_1^*} \right)^5 \right] \quad \text{na robu } \partial\Omega. \quad (5.5)$$

Za modeliranje učinkov nepopolnega stika lahko uvedemo naslednje brezdimenzijske adhezijske parametre

$$\alpha = \frac{h\mu^{(1)}}{l\mu_1^*}, \quad \beta = \frac{\mu_3^*}{\mu_1^*} \left(\frac{\mu^{(1)}}{\mu_1^*} \right)^2, \quad (5.6)$$

kjer je debelina mejne plasti h preračunana glede na velikost l periodične celice, medtem ko se togosti μ_1^* , μ_3^* preračunata glede na modul $\mu^{(1)}$.

Naj gresta debelina in togost vezi proti nič: $h \rightarrow 0$, $\mu_1^* \rightarrow 0$, $\mu_3^* \rightarrow 0$. V odvisno od vrednosti parametrov α in β lahko v limiti upoštevamo različne vrste adhezije med komponentama. Formula (5.5) se preoblikuje v naslednjo obliko

$$u^{(1)} - u^{(2)} = \alpha l \frac{\sigma^*}{\mu^{(1)}} - \alpha \beta l \left(\frac{\sigma^*}{\mu^{(1)}} \right)^3 \quad \text{na robu } \partial\Omega. \quad (5.7)$$

Vrednost $\alpha = 0$ ustreza idealnemu stiku, medtem ko približevanje $\alpha \rightarrow \infty$ pomeni odsotnost stika med vlakni in matrico. V primeru $\beta = 0$ so elastične lastnosti vezi linearne, medtem ko povečanje $|\beta|$ pomeni povečanje nelinearnosti. V primeru $\beta < 0$ ($\beta > 0$) je nelinearnost šibka (močna).

Zveze (5.1), (5.2) in (5.6) predstavljajo vhodni robni problem. Predlagani model nepopolnega stika je pravilen v primeru šibke nelinearnosti. Enačba (5.6) ima asimptotične značilnosti in jo lahko uporabimo, če na njeni desni strani razmerje med drugim in prvim členom ne presega 10^{-1} . Razmerje med napetostjo σ^* in togostjo matrice $\mu^{(1)}$ je približno enako elastični deformaciji ε . Tako dobimo naslednjo oceno: $|\beta|\varepsilon^2 \leq 10^{-1}$. Dovoljene vrednosti β so predstavljene v tabeli 5.1.

Tabela 5.1.

Najvišje dovoljene vrednosti adhezijskega parametra β glede na vrednosti elastičnih deformacij ε .

ε	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}
$ \beta $	10^{11}	10^9	10^7	10^5

V inženirski praksi lahko učinek nepopolnega stika povzročijo različni razlogi: bodisi zaradi napak in nepopolnosti tekom izdelave materiala bodisi zaradi razslojevanja komponent tekom uporabe, poleg tega pa tudi zaradi možnosti zmanjšane adhezije med vključki in matrico, kar vodi v zmanjšanje lokalnih koncentracij napetosti. Predlagani model nepopolnega stika ni odvisen od fizikalnih okoliščin, ki povzročajo poškodbe stika med komponentami, zato ga je mogoče uporabiti za opis širokega nabora problemov. Izpolnjena mora biti le ena zahteva: šibko nelinearno obnašanje adhezije $f(\sigma^*)$ omogoča uporabo okrnjene vrste (5.4). Parametra α in β imata fenomenološki značaj. Predpostavlja se, da je za realne materiale njune vrednosti moč najti eksperimentalno [428].

Robni problem (5.1), (5.2), (5.7) predstavlja različne fizikalne interpretacije. Poleg obravnavanega primera elastičnega valovanja lahko opiše tudi procese širjenja elektromagnetnega valovanja v kompozitih z dielektričnimi vključki.

5.2. MAKROSKOPSKA VALOVNA ENAČBA

Uvedimo naslednje brezdimenzijske spremenljivke:

$$\bar{u} = \frac{u}{U}, \quad \bar{n} = \frac{n}{L}, \quad \bar{x}_k = \frac{x_k}{L}, \quad k = 1, 2, \quad U = \max u. \quad (5.8)$$

Ob upoštevanju pogoja

$$\sigma^* = \mu^{(1)}(\partial u^{(1)}/\partial \mathbf{n}) \quad \text{na robu} \quad \partial\Omega, \quad (5.9)$$

se robni problem (5.1), (5.2) (5.7) lahko zapiše v obliki

$$\mu^{(n)} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}^{(n)}}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}^{(n)}}{\partial \bar{x}_2^2} \right) = \rho^{(n)} L^2 \frac{\partial^2 \bar{u}^{(n)}}{\partial t^2}, \quad (5.10)$$

$$\mu^{(1)} \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial \bar{n}} = \mu^{(2)} \frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial \bar{n}} \quad \text{na robu} \quad \partial\Omega, \quad (5.11)$$

$$\bar{u}^{(1)} - \bar{u}^{(2)} = \alpha \eta \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial \bar{n}} - \alpha \eta \delta \left(\frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial \bar{n}} \right)^3 \quad \text{na robu} \quad \partial\Omega, \quad (5.12)$$

kjer sta $\eta = L/L$, $\delta = \beta(U/L)^2$ mala parametra.

Da dobimo makroskopsko valovno enačbo, uporabimo asimptotično metodo homogenizacije. Uvedemo »počasne« \bar{x}_k in »hitre« $y_k = \eta^{-1} \bar{x}_k$ koordinate. Rešitev ima naslednjo asimptotično obliko

$$\bar{u}^{(n)} = u_0(\bar{x}_k) + \eta u_1^{(n)}(\bar{x}_k, y_k) + \eta^2 u_2^{(n)}(\bar{x}_k, y_k) + \dots, \quad (5.13)$$

kjer

$$u_i^{(n)}(\bar{x}_k, y_k) = u_i^{(n)}(\bar{x}_k, y_k \pm 1), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.14)$$

Rekurzivni sistem robnih problemov za celico ima obliko

$$\begin{aligned} \mu^{(n)} \left(\frac{\partial^2 u_{i-2}^{(n)}}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 u_{i-2}^{(n)}}{\partial \bar{x}_2^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{i-1}^{(n)}}{\partial \bar{x}_1 \partial y_1} + 2 \frac{\partial^2 u_{i-1}^{(n)}}{\partial \bar{x}_2 \partial y_2} + \frac{\partial^2 u_i^{(n)}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u_i^{(n)}}{\partial y_2^2} \right) = \\ \rho^{(n)} L^2 \frac{\partial^2 u_{i-2}^{(n)}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\mu^{(1)} \left(\frac{\partial u_{i-1}^{(1)}}{\partial \bar{n}} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \mathbf{m}} \right) = \mu^{(2)} \left(\frac{\partial u_{i-1}^{(2)}}{\partial \bar{n}} + \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial \mathbf{m}} \right) \quad \text{na robu} \quad \partial\Omega, \quad (5.16)$$

$$u_i^{(1)} - u_i^{(2)} = \alpha \left(\frac{\partial u_{i-1}^{(1)}}{\partial \bar{n}} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \mathbf{m}} \right) - \alpha \delta \left(\frac{\partial u_{i-1}^{(1)}}{\partial \bar{n}} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \mathbf{m}} \right)^3 \quad \text{na robu} \quad \partial\Omega, \quad (5.17)$$

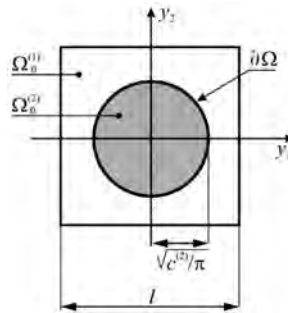
kjer so $i = 1, 2, 3, \dots$, $u_{-1}^{(n)} = 0$ in $\partial/\partial \mathbf{m}$ odvod po normali na rob $\partial\Omega$ izraženi v "hitrih" koordinatah.

Pogoje periodičnosti (5.14) lahko nadomestimo s pogojem ničelne povprečne vrednosti po periodi

$$\iint_{\Omega_0^{(1)}} u_i^{(1)} dy_1 dy_2 + \iint_{\Omega_0^{(2)}} u_i^{(2)} dy_1 dy_2 = 0. \quad (5.18)$$

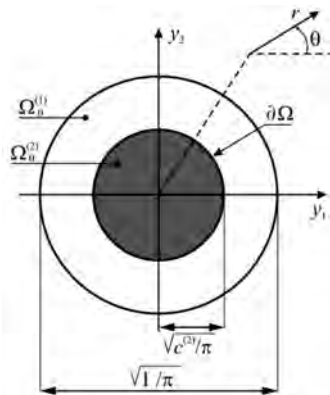
Robne probleme (5.15)–(5.18) lahko obravnavamo v območju ločene celice periodičnosti kompozitnega materiala (glej sliko 5.2). V "hitrih" koordinatah je velikost celice enotska,

polmer vlakna pa $\sqrt{c^{(2)}/\pi}$, kjer $c^{(2)}$ pomeni volumski delež vlaken, pri čemer je $0 \leq c^{(2)} \leq \pi/4$.



Slika 5.2. Celica periodičnosti vlaknastega kompozitnega materiala.

Da bi našli približno analitično rešitev, reduciramo problem na celici v njeno osno simetrično obliko. V ta namen kvadratno celico zamenjamo s krožno z enako ploščino (glej sliko 5.3). Natančnost tega pristopa se povečuje z zmanjševanjem volumskega deleža vlaken.



Slika 5.3. Poenostavitev geometrijske oblike celice.

Rešitev nelinearnih problemov na celici lahko aproksimiramo z naslednjim razvojem:

$$u_i^{(n)} = u_{i0}^{(n)} + \delta u_{i1}^{(n)} + O(\delta^2), \quad (5.19)$$

Koeficiente vrste (5.19) najdemo s pomočjo polarnega koordinatnega sistema $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$, $\tan \theta = y_2/y_1$. Izraz $u_1^{(n)}$ je definiran z natančnostjo $O(\delta)$, izraza $u_2^{(n)}$ in $u_3^{(n)}$ pa ohranjata natančnost $O(\delta^0)$.

Simbolične transformacije so bile izvedene s programskim orodjem Maple, a so tukaj zaradi svoje kompleksnosti izpuščene.

Uporabimo operator povprečenja $\int_0^{2\pi} \int_0^{(4\pi)^{-1/2}} (\cdot) r dr d\theta$ glede na enačbo (5.15) za $i = 4$. Člene $u_4^{(n)}$ lahko okrajšamo na podlagi izreka Gauss-Ostrogradskega s pomočjo pogojev (5.14), (5.16). Kot rezultat dobimo naslednjo makroskopsko nelinearno valovno enačbo

$$\begin{aligned} & \mu_1 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}_2^2} \right) + \delta \mu_2 \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}_1^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}_1} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}_1^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}_2} \right)^2 + \right. \\ & \left. \frac{4}{3} \frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}_1} \frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}_1 \partial \bar{x}_2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}_2^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}_2^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}_2} \right)^2 \right] + \\ & \eta^2 \mu_3 \left(\frac{\partial^4 u_0}{\partial \bar{x}_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u_0}{\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial^4 u_0}{\partial \bar{x}_2^4} \right) + O(\delta^2 + \eta^4) = \rho L^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Prehod na dimenzijske spremenljivke $u = u_0 U$, $x_k = \bar{x}_k L$ omogoča preoblikovanje enačb (5.20) v naslednjo obliko

$$\begin{aligned} & \mu_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + \beta \mu_2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \right. \\ & \left. \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \\ & \eta^2 L^2 \mu_3 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} \right) + O(\delta^2 + \eta^4) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

kjer so μ_1, μ_2, μ_3 analitično izračunani efektivni moduli togosti:

$$\begin{aligned} \mu_1 = & \left[\mu^{(1)} (c^{(2)})^2 \pi^{3/2} (\mu^{(2)})^2 + 2 (c^{(2)})^2 \pi^{3/2} \mu^{(2)} (\mu^{(1)})^2 - \right. \\ & \mu^{(1)} (c^{(2)})^4 \pi^{3/2} (\mu^{(2)})^2 + 2 (c^{(2)})^4 \pi^{(3/2)} \mu^{(2)} (\mu^{(1)})^2 - \\ & (c^{(2)})^4 \pi^{3/2} (\mu^{(1)})^3 + (c^{(2)})^2 \pi^{3/2} (\mu^{(1)})^3 + \\ & 2 \mu^{(1)} \alpha (\mu^{(2)})^2 \pi^2 (c^{(2)})^{3/2} + 2 \alpha \mu^{(2)} \pi^2 (c^{(2)})^{3/2} (\mu^{(1)})^2 - \\ & \mu^{(1)} \alpha^2 (\mu^{(2)})^2 \pi^{5/2} (c^{(2)})^3 + \mu^{(1)} \alpha^2 (\mu^{(2)})^2 c^{(2)} \pi^{5/2} + \\ & \left. 2 \mu^{(1)} \alpha (\mu^{(2)})^2 \pi^2 (c^{(2)})^{7/2} - 2 \alpha \mu^{(2)} (c^{(2)})^{7/2} \pi^2 (\mu^{(1)})^2 \right] / \\ & \left[2 \alpha \mu^{(2)} \pi^2 (c^{(2)})^{3/2} \mu^{(1)} + 2 \alpha \mu^{(2)} (c^{(2)})^{7/2} \pi^2 \mu^{(1)} - \right. \\ & 2 (\mu^{(2)})^2 (c^{(2)})^3 \pi^{3/2} + 2 (c^{(2)})^2 \pi^{3/2} \mu^{(2)} \mu^{(1)} - \\ & \left. 2 (c^{(2)})^4 \pi^{3/2} \mu^{(2)} \mu^{(1)} + 2 \alpha (\mu^{(2)})^2 \pi^2 (c^{(2)})^{3/2} + \right. \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} & \alpha^2(\mu^{(2)})^2 \pi^{5/2}(c^{(2)})^3 + \alpha^2(\mu^{(2)})^2 c^{(2)} \pi^{5/2} - 2\alpha(\mu^{(2)})^2 \pi^2 (c^{(2)})^{7/2} + \\ & 2(\mu^{(1)})^2 (c^{(2)})^3 \pi^{3/2} + (c^{(2)})^2 \pi^{3/2} (\mu^{(2)})^2 + \\ & (c^{(2)})^4 \pi^{3/2} (\mu^{(2)})^2 + (c^{(2)})^4 \pi^{3/2} (\mu^{(1)})^2 + (c^{(2)})^2 \pi^{3/2} (\mu^{(1)})^2 + \\ & 4\alpha\mu^{(2)} \pi^2 (c^{(2)})^{5/2} \mu^{(1)} + 2\alpha^2 (\mu^{(2)})^2 \pi^{5/2} (c^{(2)})^2 \Big]. \end{aligned}$$

$$\mu_2 = 36\alpha\mu^{(1)}\pi(c^{(2)})^{5/2}(\mu^{(2)})^4 /$$

$$\begin{aligned} & \Big[-4(c^{(2)})^5 \pi^{1/2} (\mu^{(2)})^4 + (c^{(2)})^6 \pi^{1/2} (\mu^{(1)})^4 + \\ & 6(c^{(2)})^4 \pi^{1/2} (\mu^{(1)})^4 - 4(c^{(2)})^3 \pi^{1/2} (\mu^{(2)})^4 + (c^{(2)})^2 \pi^{1/2} (\mu^{(1)})^4 + \\ & (c^{(2)})^6 \pi^{1/2} (\mu^{(2)})^4 + 12c^{(2)} (\mu^{(2)})^3 \alpha^2 \pi^{3/2} \mu^{(1)} + 6c^{(2)} (\mu^{(2)})^2 \alpha^2 \pi^{3/2} (\mu^{(1)})^2 + \\ & 24(c^{(2)})^2 (\mu^{(2)})^2 \alpha^2 \pi^{3/2} (\mu^{(1)})^2 + 36(c^{(2)})^3 (\mu^{(2)})^2 \alpha^2 \pi^{3/2} (\mu^{(1)})^2 + \\ & 24(c^{(2)})^2 (\mu^{(2)})^3 \alpha^2 \pi^{3/2} \mu^{(1)} - 24(c^{(2)})^4 (\mu^{(2)})^3 \alpha^2 \pi^{3/2} \mu^{(1)} + \\ & 4(c^{(2)})^5 \pi^{1/2} (\mu^{(1)})^4 + 6(c^{(2)})^4 \pi^{1/2} (\mu^{(2)})^4 - \\ & 12(c^{(2)})^4 \pi^{1/2} (\mu^{(1)} \mu^{(2)})^2 - 8(c^{(2)})^5 \pi^{1/2} (\mu^{(1)})^3 \mu^{(2)} + 8(c^{(2)})^3 \pi^{1/2} \mu^{(2)} (\mu^{(1)})^3 = \\ & 4(c^{(2)})^6 \pi^{1/2} (\mu^{(2)})^3 \mu^{(1)} - 4(c^{(2)})^6 \pi^{1/2} \mu^{(2)} (\mu^{(1)})^3 + (c^{(2)})^2 \pi^{1/2} (\mu^{(2)})^4 + \\ & \alpha^4 (\mu^{(2)})^4 \pi^{5/2} + 6(c^{(2)})^2 \pi^{1/2} (\mu^{(1)} \mu^{(2)})^2 + 24(c^{(2)})^4 (\mu^{(2)})^2 \alpha^2 \pi^{3/2} (\mu^{(1)})^2 - \\ & 12(c^{(2)})^5 (\mu^{(2)})^3 \alpha^2 \pi^{3/2} \mu^{(1)} + 6(c^{(2)})^5 (\mu^{(2)})^2 \alpha^2 \pi^{3/2} (\mu^{(1)})^2 + \\ & 12(\mu^{(2)})^3 \pi \alpha (c^{(2)})^{3/2} \mu^{(1)} + 16(\mu^{(2)})^3 \pi^2 \alpha^3 (c^{(2)})^{3/2} \mu^{(1)} + \\ & 12(\mu^{(2)})^2 \pi \alpha (c^{(2)})^{3/2} (\mu^{(1)})^2 + 4\mu^{(2)} \pi \alpha (c^{(2)})^{3/2} (\mu^{(1)})^3 + \\ & 4(\mu^{(2)})^3 \pi^2 \alpha^3 (c^{(2)})^{9/2} \mu^{(1)} - 24(\mu^{(2)})^2 \pi \alpha (c^{(2)})^{9/2} (\mu^{(1)})^2 + \\ & 16\mu^{(2)} \pi \alpha (c^{(2)})^{9/2} (\mu^{(1)})^3 + 24(\mu^{(2)})^3 \pi^2 \alpha^3 (c^{(2)})^{5/2} \mu^{(1)} + \\ & 16\mu^{(2)} \pi \alpha (c^{(2)})^{5/2} (\mu^{(1)})^3 + 24(\mu^{(2)})^2 \pi \alpha (c^{(2)})^{5/2} (\mu^{(1)})^2 + \\ & 4\pi \mu^{(2)} \alpha (c^{(2)})^{11/2} (\mu^{(1)})^3 - 12\pi (\mu^{(2)})^2 \alpha (c^{(2)})^{11/2} (\mu^{(1)})^2 + \\ & 12\pi (\mu^{(2)})^3 \alpha (c^{(2)})^{11/2} \mu^{(1)} + 16(\mu^{(2)})^3 \pi^2 \alpha^3 (c^{(2)})^{7/2} \mu^{(1)} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 24\left(\mu^{(2)}\right)^3 \pi \alpha\left(c^{(2)}\right)^{7/2} \mu^{(1)}+24 \mu^{(2)} \pi \alpha\left(c^{(2)}\right)^{7/2}\left(\mu^{(1)}\right)^3+ \\
& 8\left(c^{(2)}\right)^5 \pi^{1/2} \mu^{(1)}\left(\mu^{(2)}\right)^3+6\left(c^{(2)}\right)^6 \pi^{1/2}\left(\mu^{(1)} \mu^{(2)}\right)^2+4\left(c^{(2)}\right)^3 \pi^{1/2}\left(\mu^{(1)}\right)^4+ \\
& 6\left(c^{(2)}\right)\left(\mu^{(2)}\right)^4 \alpha^2 \pi^{3/2}-12\left(c^{(2)}\right)^3\left(\mu^{(2)}\right)^4 \alpha^2 \pi^{3/2}+6\left(c^{(2)}\right)^5\left(\mu^{(2)}\right)^4 \alpha^2 \pi^{3/2}+ \\
& 8\left(\mu^{(2)}\right)^4 \pi^2 \alpha^3\left(c^{(2)}\right)^{3/2}+4\left(\mu^{(2)}\right)^4 \pi \alpha\left(c^{(2)}\right)^{3/2}-4\left(\mu^{(2)}\right)^4 \pi^2 \alpha^3\left(c^{(2)}\right)^{9/2}+ \\
& 8\left(\mu^{(2)}\right)^4 \pi \alpha\left(c^{(2)}\right)^{9/2}+4 \alpha^4\left(\mu^{(2)}\right)^4 \pi^{5/2} c^{(2)}+6 \alpha^4\left(\mu^{(2)}\right)^4 \pi^{5/2}\left(c^{(2)}\right)^2+ \\
& 4 \alpha^4\left(\mu^{(2)}\right)^4 \pi^{5/2}\left(c^{(2)}\right)^3+\alpha^4\left(\mu^{(2)}\right)^4 \pi^{5/2}\left(c^{(2)}\right)^4-8\left(\mu^{(2)}\right)^4 \pi \alpha\left(c^{(2)}\right)^{5/2}- \\
& 4 \pi\left(\mu^{(2)}\right)^4 \alpha\left(c^{(2)}\right)^{11/2}-8\left(\mu^{(2)}\right)^4 \pi^2 \alpha^3\left(c^{(2)}\right)^{7/2}+4\left(c^{(2)}\right)^2 \pi^{1/2}\left(\mu^{(2)}\right)^3 \mu^{(1)}+ \\
& 4\left(c^{(2)}\right)^2 \pi^{1/2} \mu^{(2)}\left(\mu^{(1)}\right)^3-8\left(c^{(2)}\right)^3 \pi^{1/2} \mu^{(1)}\left(\mu^{(2)}\right)^3+ \\
& 4 \pi^2\left(\mu^{(2)}\right)^4 \alpha^3\left(c^{(2)}\right)^{1/2}+4 \pi^2\left(\mu^{(2)}\right)^3 \alpha^3\left(c^{(2)}\right)^{1/2} \mu^{(1)}] ,
\end{aligned}$$

Vrednosti efektivnega modula μ_3 smo definirali z numerično integracijo vzdolž območja celice periodičnosti po standardnem postopku z uporabo programskega paketa Maple.

Dobljeni rezultati temeljijo na poenostavitvi geometrijske oblike celice. Za oceno točnosti predlagane aproksimacije v primeru idealnega stika med komponentami ($\alpha = 0$) upoštevamo efektivni linearni modul μ_1 . Rešitev ima naslednjo obliko:

$$\mu_1 = \mu^{(1)} \frac{\left(1 - c^{(2)}\right) \mu^{(1)} + \left(1 + c^{(2)}\right) \mu^{(2)}}{\left(1 + c^{(2)}\right) \mu^{(1)} + \left(1 - c^{(2)}\right) \mu^{(2)}}. \quad (5.23)$$

Upoštevajmo, da formulo (5.23) lahko dobimo z neodvisnim pristopom, ki sovпада z spodnjo Hashin-Strickmanovo mejo [123]. Primerjava analitične rešitve (5.23) s teoretičnimi rezultati, doseženimi v [358] s pomočjo Rayleighove metode za kompozit z neskončno togimi vlakni ($\mu^{(2)}/\mu^{(1)} \rightarrow \infty$), je prikazana v tabeli 5.2. Za navedeni primer so značilne velike koncentracije lokalnih napetosti, zato napaka aproksimativne analitične rešitve doseže maksimum. Zmanjšanje togosti vlaken zmanjša to napako.

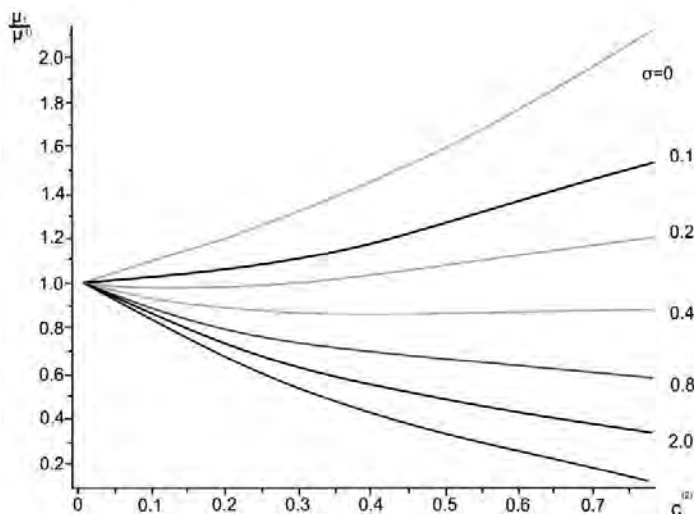
Tabela 5.2.

Efektivni linearni strižni modul $\mu_1/\mu^{(1)}$ kompozitnega materiala z neskončno togimi vlakni.

$c^{(2)}$	Formula (5.23)	Podatki iz [358]	Napaka, %
0,1	1,222	1,222	0,0
0,2	1,500	1,500	0,0
0,3	1,857	1,860	0,2
0,4	2,333	2,351	0,8
0,5	3,000	3,080	2,6
0,6	4,000	4,342	7,9
0,7	5,667	7,433	24,8
0,74	6,692	11,01	39,2
0,76	7,333	15,44	52,5
0,77		20,43	
0,78		35,93	

Formula (5.23) zagotavlja dobro točnost v primeru $c^{(2)} < 0,5$. Napaka narašča z večanjem volumskega deleža vlaken ($c^{(2)} > 0,6$), ko je razdalja med sosednjimi vlakni majhna. Ta rezultat je povezan s pojavom izrazite koncentracije lokalnih napetosti. V slednjem primeru moramo upoštevati prostorsko pakiranje vlaken. Omeniti je treba, da pri večini realnih kompozitnih materialov volumski delež vlaken ne dosega vrednosti 0,4...0,5. To pomeni, da dobljene približne rešitve lahko uporabimo v realnih okoliščinah.

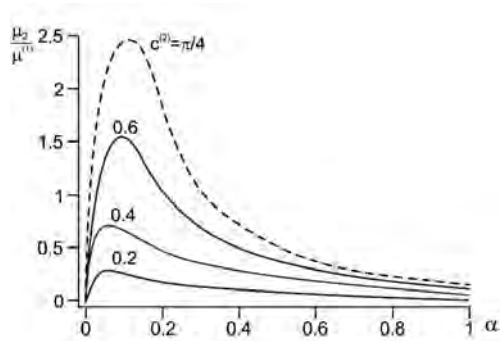
Kot primer obravnavamo kompozitni material, sestavljen iz aluminijaste matrice ($\mu^{(1)} = 27,9$ GPa, $\rho^{(1)} = 2700$ kg/m³) in nikljevih vlaken ($\mu^{(2)} = 75,4$ GPa, $\rho^{(2)} = 8940$ kg/m³). Slike 5.4 – 5.6 prikazujejo dobljene rezultate za efektivne elastične module μ_1 , μ_2 , μ_3 za različne vrednosti volumskih deležev vlaken $c^{(2)}$ in parameter adhezije α . Slika 5.4 prikazuje primerjavo dobljene rešitve z rezultati [358] v primeru idealnega stika ($\alpha = 0$, krožci) in v primeru materiala s prazninami ($\mu^{(2)} = 0$, črtkana krivulja).



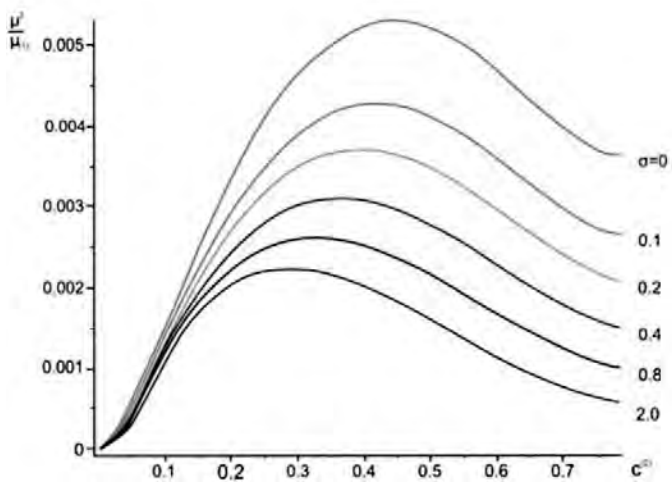
Slika 5.4. Efektivni linearni strižni modul kompozita [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].

Efektivna modula μ_1 , μ_3 zavzmeta največje vrednosti v primeru idealnega stika med komponentama ($\alpha = 0$). Šibkost povezave med vlakni in matrico (povečanje parametra α) zmanjša μ_1 in μ_3 .

Efektivni koeficient μ je enak nič pri $\alpha = 0$. To pomeni, da je v primeru idealnega stika proučevano obnašanje materiala linearno. V območju $\alpha = 0,05 \dots 0,1$ opazimo hitro naraščanje μ_2 , vpliv nelinearnosti pa doseže maksimum. Poleg tega slabšanje stika med komponentami pomeni zmanjšanje koeficienta μ_2 in zmanjšanje intenzivnosti nelinearnih učinkov.



Slika 5.5. Efektivni nelinearni strižni modul kompozitnega materiala aluminij-nikelj [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].



Slika 5.6. Efektivni strižni modul reda η^2 [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].

Po drugi strani pa s povečanjem volumskega deleža vključkov $c^{(2)}$ (pri fiksnem α) pride do povečanja efektivnega modula μ_2 . To lahko pojasnimo na naslednji način: v obravnavanem primeru nelinearno obnašanje materiala v glavnem določajo lastnosti na meji $\partial\Omega$ med komponentama. Zato povečanje površine $\partial\Omega$ pomeni povečanje nelinearnosti.

Efektivni modul μ_3 je opredeljen z intenzivnostjo disperzijskega učinka. Pri $c^{(2)} = 0$ je material homogen in disperzije ni ($\mu_3 = 0$). Pri povprečnih vrednostih volumskega deleža vlaken imamo $c^{(2)} = 0,25 \dots 0,45$. To pomeni, da imamo močno izraženo nehomogenost notranje strukture kompozita, koeficient μ_3 pa doseže svoje maksimalne vrednosti.

Upoštevajmo, da se koeficienti μ_1, μ_2, μ_3 vedno obravnavajo kot pozitivni. Makroskopska valovna enačba (5.21) velja za primer dolgih valov, ko je $\eta = l/L < 1$. Da bi ocenili območje

uporabnosti homogeniziranega modela, primerjamo disperzijske odvisnosti, dobljene na podlagi enačbe (5.21), z rešitvijo, dobljeno s pomočjo Floquet-Blochovega pristopa.

V nadaljevanju obravnavamo linearni primer ($\mu_2 = 0$). Harmonično valovanje opredeljuje naslednja enačba

$$\mathbf{u} = U \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \exp(i\omega t), \quad (5.24)$$

kjer je \mathbf{k} valovni vektor, $\mathbf{k} = k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2$; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ sta enotska bazična vektorja v pravokotnem koordinatnem sistemu; $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$.

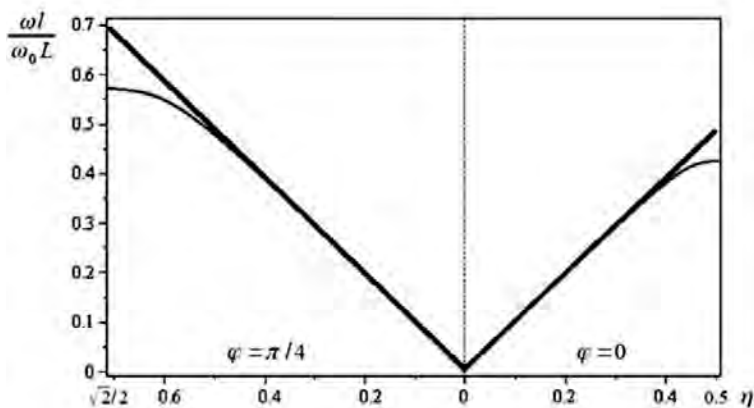
Projekcij vektorja \mathbf{k} na koordinatni osi sta naslednji: $k_1 = k \cos \varphi$, $k_2 = k \sin \varphi$, kjer je $k = |\mathbf{k}| = \sqrt{(k_1^2 + k_2^2)} = 2\pi/L$ in φ pomeni kot med osjo x_1 in smerjo vektorja \mathbf{k} .

Če vstavimo izraz (5.24) v enačbo (5.21), dobimo naslednjo disperzijsko zvezo

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[1 - 4\pi^2 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) \frac{\mu_3}{\mu_1} \eta^2 + O(\eta^4) \right], \quad (5.25)$$

kjer je $\omega_0 = v_0 k$ (v_0 je efektivna fazna hitrost v homogenem mediju) in $v_0 = \sqrt{\mu_1/\rho}$, $\eta = l/L = kl/(2\pi)$.

Na sliki 5.7 je prikazana primerjava rešitve (5.25) (črtkane krivulje) z numeričnimi rezultati, dobljenimi po Floquet-Blochovi metodi. Izračuni so izvedeni za kompozit, sestavljen iz aluminijaste matrice in nikljevih vlaken. Zgoraj so podane fizikalne lastnosti komponent, volumen delež vlaken pa je $c^{(2)} = 0,4$.



Slika 5.7. Akustične veje disperzijskih krivulj kompozitnega materiala "aluminij - nikelj" (linearni primer) [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].

Disperzijski diagram je sestavljen iz dveh delov, ločenih s črtkano navpično črto. Desna stran ustreza pravokotni ($\varphi = 0$), leva stran pa diagonalni ($\varphi = \pi/4$) smeri širjenja valovanja. V dolgovalovnem območju ($\omega \rightarrow 0$) postane rešitev izotropna in ni odvisna od kota φ . Zmanjšanje valovne dolžine (povečanje frekvence ω) pa podaja izražene anizotropne lastnosti kompozitnega materiala.

Na podlagi dobljenih rezultatov lahko sklepamo, da homogenizirana valovna enačba (5.21) ohranja točnost pri $\eta < 0,4$ (za $\varphi = 0$) in pri $\eta < 0,5$ (za $\varphi = \pi/4$).

5.3. ANALITIČNA REŠITEV ZA STACIONARNO VALOVANJE

Naj se mirujoče valovanje širi v smeri, ki jo določa valovni vektor \mathbf{k} . V tem primeru rešitev izpolnjuje naslednji pogoj

$$u(\mathbf{x}, t) = u(\xi), \quad (5.26)$$

kjer je $\xi = \mathbf{e}_k \mathbf{x} - vt$, \mathbf{e}_k je enotski valovni vektor; $\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi$.

Uvedimo brezdimenzijsko deformacijo valovnega profila:

$$f = \frac{du}{d\xi}, \quad (5.27)$$

Zvezi (5.27), (5.26) vstavimo v enačbo (5.21), izvedemo integracijo po ξ in dobimo naslednjo enačbo anharmoničnega oscilatorja s kubično nelinearnostjo

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + af + bf^3 = 0, \quad (5.28)$$

kjer so $a = \mu_1(1 - v^2/v_0^2)/(\mu_1 l^2)$, $b = \beta\mu_2/(3\mu_3 l^2)$ in c integracijska konstanta.

Pogoj, s katerim povprečno deformacijo po periodi valovanja izenačimo z nič, v obravnavanem primeru daje $c = 0$.

Enačbo (5.28) pomnožimo z $df/d\xi$ in po integraciji dobimo

$$\frac{1}{2} \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 + \frac{a}{2} f^2 + \frac{b}{4} f^4 = W_0, \quad (5.29)$$

kjer je W_0 celotna energija oscilatorja z $W_0 > 0$; $W_k = (1/2)(df/d\xi)^2$ je kinetična energija; $W_p = (a/2)f^2 + (b/4)f^4$ je potencialna energija in $W_0 = W_p + W_k$.

Z ločitvijo spremenljivk v enačbi (5.29) dobimo

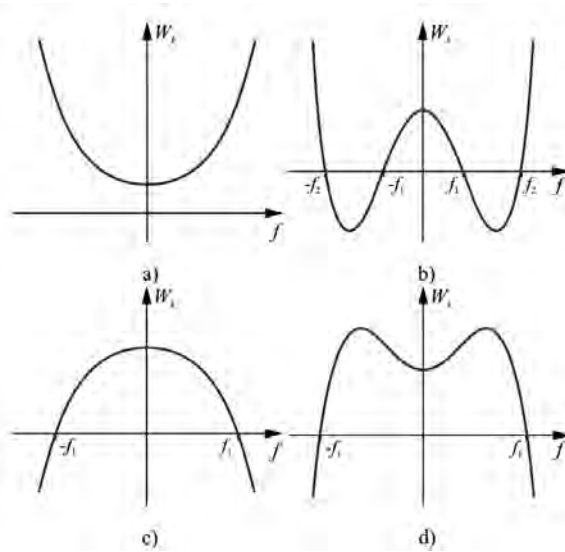
$$\sqrt{2} d\xi = \frac{df}{\sqrt{W_0 - \frac{a}{2}f^2 - \frac{b}{4}f^4}}. \quad (5.30)$$

Rešitev te enačbe je omejena in periodična, če kinetična energija

$$W_k = W_0 - W_p = W_0 - (a/2)f^2 - (b/4)f^4 \quad (5.31)$$

zavzame pozitivne vrednosti na intervalu med svojima realnima korenoma. Oblika rešitve je odvisna od predznakov koeficientov a in b . Ločeno obravnavamo primer šibke ($\beta < 0$, $b < 0$) in močne ($\beta > 0$, $b > 0$) nelinearnosti.

Šibka nelinearnost. Če sta $a < 0$, $b < 0$, polinom W_k nima realnih korenov (glej sliko 5.8a). Omejena periodična rešitev enačbe (5.28) ne obstaja.



Slika 5.8. Kinetična energija oscilatorja s kubično nelinearnostjo; a) $a < 0, b < 0$; b) $a > 0, b < 0$; c) $a > 0, b > 0$; d) $a < 0, b > 0$ [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].

Če sta $a > 0, b < 0$, ima polinom W_k štiri realne korene $\pm f_1, \pm f_2$ (glej sliko 5.8b), kjer

$$f_1^2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4bW_0}}{-b}, \quad f_2^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bW_0}}{-b}, \quad f_1^2 < f_2^2. \quad (5.32)$$

Periodične rešitve obstajajo za $f_1 \geq f \geq -f_1$. Izrazimo polinom W_k z njegovimi koreni $W_k = -(b/4)(f_1^2 - f^2)(f_2^2 - f^2)$ in izvedimo naslednjo zamenjavo spremenljivk

$$g^2 = f^2/f_1^2, \quad 0 \leq g^2 \leq 1, \quad (5.33)$$

$$s^2 = f_1^2/f_2^2, \quad 0 \leq s^2 \leq 1. \quad (5.34)$$

Enačba (5.30) tako zavzame naslednjo obliko

$$\sqrt{-\frac{b}{2}f_2^2}d\xi = \frac{dg}{\sqrt{(1-g^2)(1-s^2g^2)}}. \quad (5.35)$$

Z integracijo enačbe (5.35) in inverzijo eliptičnega integrala dobimo naslednjo funkcijo

$$f = f_1 \operatorname{sn} \left(\sqrt{-\frac{b}{2}f_2^2} \xi, s \right), \quad (5.36)$$

kjer

$$F = 2f_1, \quad \kappa = \sqrt{-\frac{b}{2}f_2^2}, \quad (5.37)$$

in je F amplituda ($F > 0, \kappa$ je konstanta).

Formula (5.36) zavzame naslednjo obliko

$$f = \frac{F}{2} \operatorname{sn}(\kappa \xi, s). \quad (5.38)$$

Valovna dolžina je $L = 4K(s)/\kappa$.

Na podlagi povezav (5.32), (5.34), (5.37) in s trivialnimi pretvorbami dobimo naslednjo transcendentno enačbo, ki omogoča iskanje modula s :

$$s^2 K(s)^2 = -\frac{\beta F^2 \mu_2}{384 \eta^2 \mu_3 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi)}, \quad (5.39)$$

Hitrost valovanja je opisana z naslednjo formulo

$$\frac{v^2}{v_0^2} = 1 - 16(1 + s^2)K(s)^2 \frac{\mu_3}{\mu_1} \eta^2 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi). \quad (5.40)$$

Močna nelinearnost. Naj bo $b > 0$. Grafa kinetičnih energij sta prikazana na sliki 5.8c (za $a > 0$) in na sliki 5.8d (za $a < 0$). V obeh primerih ima polinom W_k dva realna $\pm f_1$ in dva imaginarna $\pm i f_2$ korena, pri čemer

$$f_1^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4bW_0}}{b}, \quad f_2^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bW_0}}{b}. \quad (5.41)$$

Periodične rešitve obstajajo, če je $f_1 \geq f \geq -f_1$.

W_k zapišemo v obliki $W_k = (b/4)(f_1^2 - f^2)(f_2^2 + f^2)$ in uvedemo naslednje spremenljivke: $g^2 = 1 - f^2/f_1^2$, $0 \leq g^2 \leq 1$, $s^2 = (1 + f_2^2/f_1^2)^{-1}$. Pri tem je $0 \leq s^2 \leq 1/2$ za $a > 0$, $1/2 \leq s^2 \leq 1$ za $a < 0$ in $F = 2f_1 > 0$, $\kappa = \sqrt{(2)(f_1^2 + f_2^2)}$.

Izvedemo prej opisane transformacije in rezultat dobimo v obliki

$$f = \frac{F}{2} \operatorname{cn}(\kappa \xi, s), \quad (5.42)$$

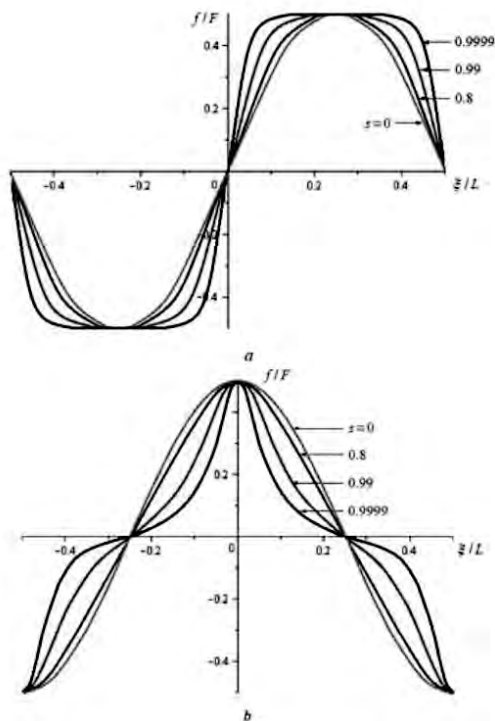
$$s^2 K(s)^2 = \frac{\beta F^2 \mu_2}{384 \eta^2 \mu_3 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi)}, \quad (5.43)$$

$$\frac{v^2}{v_0^2} = 1 - 16(1 - 2s^2)K(s)^2 \frac{\mu_3}{\mu_1} \eta^2 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi). \quad (5.44)$$

Valovna dolžina je enaka $L = 4K(s)/\kappa$. Enačbi (5.43) in (5.39) se spreminjata druga v drugo ob spreminjanju predznaka parametra β .

5.4. ANALIZA REŠITEV IN NUMERIČNI REZULTATI

V obravnavanem primeru ima tip nelinearnosti (šibka za $b < 0$ in močna za $b > 0$) glavni vpliv na značaj rešitve. Oblika periodičnih valov deformacije je prikazana na sliki 5.9. Izračuni so izvedeni na podlagi enačb (5.38) in (5.42).



Slika 5.9. Oblike periodičnih nelinearnih valov deformacij: (a) šibka nelinearnost ($b < 0$) in (b) močna nelinearnost ($b > 0$) [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].

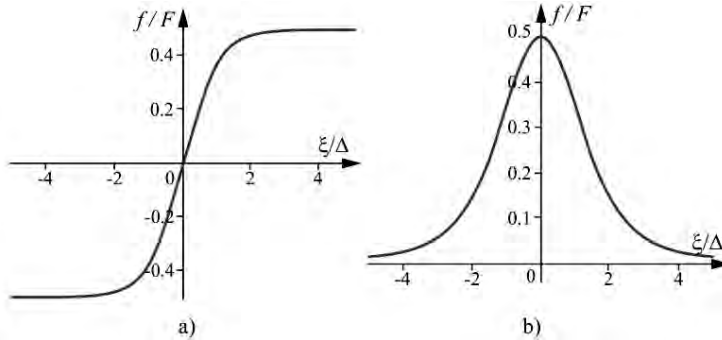
V primeru $s = 0$ imamo dva mejna prehoda na linearno rešitev:

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{F}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{L} \xi\right) \quad \text{za } \beta < 0, \\
 f &= \frac{F}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{L} \xi\right) \quad \text{za } \beta > 0. \\
 \frac{v^2}{v_0^2} &= 1 - 4\pi^2 \frac{\mu_3}{\mu_1} \eta^2 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi).
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

V primeru $s = 1$ se v kompozitnem materialu pojavi lokalizirana valovna deformacija. Če je nelinearnost šibka, nastane udarni val (pregibna oblika na sliki 5.10a):

$$f = \frac{F}{2} \tanh\left(\frac{\xi}{\Delta}\right), \quad \frac{\Delta^2}{l^2} = -\frac{24\mu_3(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi)}{F^2\beta\mu_2},$$

$$\frac{v^2}{v_0^2} = 1 - \frac{2\mu_3 l^2}{\mu_1 \Delta^2} (\sin^4\varphi + \cos^4\varphi), \quad \beta < 0. \quad (5.46)$$



Slika 5.10. Lokalizirani nelinearni valovi deformacij: (a) šibka nelinearnost ($\beta < 0$) in (b) močna nelinearnost ($\beta > 0$) [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].

Pregib se širi v podzvočnem režimu ($v < v_0$). Povečanje amplitude valovanja F povzroči zmanjšanje njegove širine Δ in hitrosti v .

Če je nelinearnost močna, ima lokalizirana rešitev obliko solitona (glej sliko 5.10b):

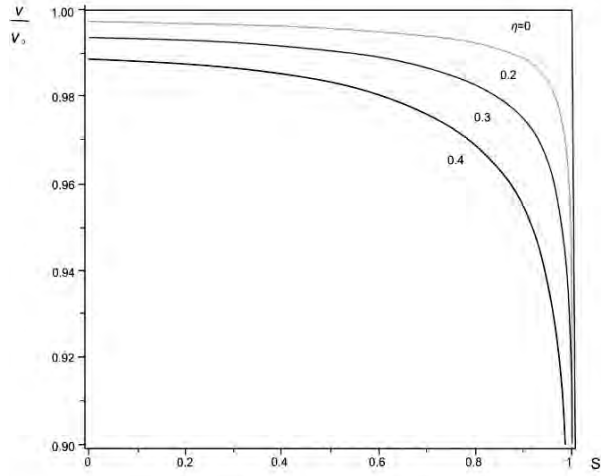
$$f = \frac{F}{2\cosh(\xi/\Delta)}, \quad \frac{\Delta^2}{l^2} = \frac{24\mu_3(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi)}{F^2\beta\mu_2},$$

$$\frac{v^2}{v_0^2} = 1 + \frac{\mu_3 l^2}{\mu_1 \Delta^2} (\sin^4\varphi + \cos^4\varphi), \quad \beta > 0. \quad (5.47)$$

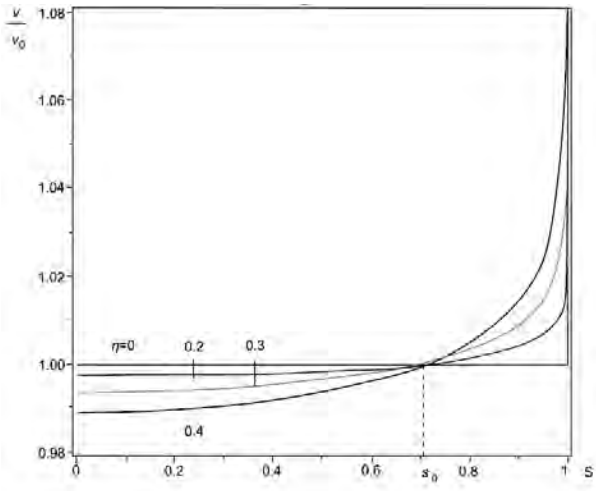
V slednjem primeru je režim širjenja nadzvočen ($v > v_0$). Povečanje amplitude solitona pomeni zmanjšanje njegove širine s povečanjem njegove hitrosti.

Tako v obravnavanem problemu tip nelinearnosti določa obliko lokaliziranega deformacijskega vala, ne pa mehanskih lastnosti materiala.

Analizirajmo numerične rezultate za kompozit, sestavljen iz aluminijaste matrice ($\mu^{(1)} = 27,9$ GPa, $\rho^{(1)} = 2700$ kg/m³) in vlaken iz niklja ($\mu^{(2)} = 75,4$ GPa, $\rho^{(2)} = 8940$ kg/m³). Volumski delež vlaken je $c^{(2)} = 0,4$. Fiksirajmo naslednje vrednosti parametrov adhezije: $\alpha = 0,1$, $|\beta| = 10^5$. Efektivni elastični koeficienti so: $\mu_1 = 33,1$ GPa, $\mu_2 = 21,6$ GPa, $\mu_3 = 0,119$ GPa. Valovanje se širi v smeri, ki je pravokotna glede na velikost celice periodičnosti: $\varphi = 0$.



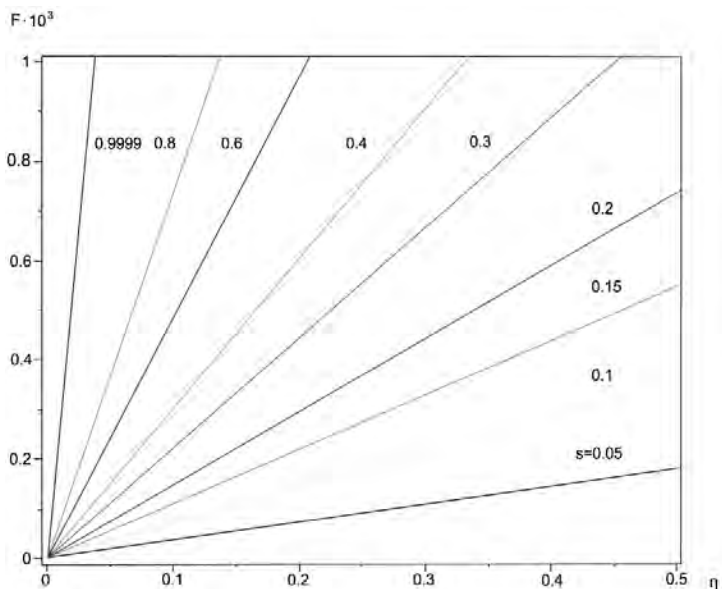
a



b

*

Slika 5.11. Fazna hitrost nelinearnega vala deformacij: (a) šibka nelinearnost ($\beta < 0$) in (b) močna nelinearnost ($\beta > 0$) [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].



Slika 5.12. Modul s , ki prikazuje intenzivnost nelinearnih učinkov [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].

Odvisnost fazne hitrosti v od modula s je prikazana na sliki 5.11. V primeru šibke nelinearnosti gre za podzvočni režim, za katerega je $v < v_0$. V primeru močne nelinearnosti imamo nadzvočni režim in je $v > v_0$, če je $s^2 < 1/2$, in $v < v_0$, če je $s^2 > 1/2$. Mejna vrednost $s^2 = 1/2$, pri kateri pride do spremembe hitrostnega režima, je določena s kvalitativnim značajem analitične rešitve (5.44) in ni odvisna ne od lastnosti kompozitnega materiala niti od smeri širjenja valovanja.

Slika 5.12 prikazuje parametrično odvisnost modula s od F , dobljeno na podlagi numerično izračunane rešitve enačbe (5.39) (ali (5.43)). Območje elastične deformacije je omejeno z vrednostjo $F \leq 10^{-3}$, kar je značilno za večino materialov, ki se uporabljajo v realnih konstrukcijah.

Kot izhaja iz slik 5.9, 5.11, vpliv nelinearnosti na obliko in hitrost valovanja postane pomemben pri $s > 0,6$. Pri $\eta < 0,2$ lahko rešitev dobimo s pomočjo uporabljene metode homogenizacije. Natančnost homogeniziranega modela (5.21) se zmanjša pri $\eta > 0,4$ (glej sliko 5.7) (v tem primeru $s < 0,34$) in nelinearne učinke lahko zanemarimo. Tako lahko širjenje nelinearnega valovanja raziskujemo v okviru razvitih dolgovalovnih modelov, medtem ko lahko kratke valove z močnimi disperzijskimi učinki aproksimiramo z linearnimi modeli.

6 Nastanek lokaliziranih nelinearnih valov v večslojnih kompozitih

To poglavje obravnava nestacionarno širjenje valovanja in nastanek lokaliziranih nelinearnih valov v večslojnih kompozitnih materialih. Najprej je podan matematični model in opisana psevdospektralna metoda. Nato se za zmanjšanje Gibbs-Wilbrahamovih učinkov uporabi Fourier-Padéjev približek. Numerično je modeliran proces nastanka lokaliziranih nelinearnih valov, ki izvirajo iz začetnih impulzov deformacije. Upoštevani so naslednji posebni primeri: (i) generiranje enega samega lokaliziranega vala; (ii) generiranje serije lokaliziranih valov; (iii) sipanje začetnega impulza napetosti.

6.1. ZAČETNI MODEL IN PSEVDOSPEKTRALNA METODA

Prej dobljene rešitve opisujejo stacionarno valovanje, ki se širi brez spreminjanja oblik valov in hitrosti. Vendar pa ima pomembno vlogo tudi analiza nestacionarnih dinamičnih procesov. V tem delu proučujemo razvoj začetnih impulzov deformacij in nastanek lokaliziranega nelinearnega valovanja. Tu uporabljamo numerične metode.

Obravnavamo longitudinalno valovanje, ki se širi v večslojnim kompozitnem materialu v smeri, ki je pravokotna na sloje. Definirajmo deformacijo valovnega profila kot $f = du/dx$ in uvedimo brezdimenzijske spremenljivke $\bar{f} = f/F$, $\bar{x} = x/l$, $\bar{t} = t/T$, kjer je f amplituda deformacije, T čas, ki ga valovanje, ki se širi v linearnem homogenem mediju, potrebuje za premikanje vzdolž velikosti periodične celice l , in $T = l/v_0$, $v_0 = \sqrt{E/\rho}$. Potem lahko valovno enačbo (4.22 predstavimo v naslednji obliki

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{t}^2} = P(\bar{f}), \quad P(\bar{f}) = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{FE_2}{2E_1} \frac{\partial^2 (\bar{f}^2)}{\partial \bar{x}^2} + \frac{E_3}{E_1} \frac{\partial^4 \bar{f}}{\partial \bar{x}^4}. \quad (6.1)$$

Vzamemo naslednje začetne pogoje

$$\bar{f} = f_0(\bar{x}), \quad \frac{d\bar{f}}{d\bar{t}} = 0 \quad \text{pri} \quad \bar{t} = 0, \quad (6.2)$$

kjer funkcija $f_0(\bar{x})$ določa obliko začetnega impulza deformacije.

Za rešitev Cauchyjevega problema (6.1), (6.2) uporabimo naslednji numerični postopek. Integracijo po času izvedemo po metodi Runge-Kutta 4. reda. Iskane rešitve $\bar{f}(\bar{x}, \bar{t})$ predstavimo v obliki diskretnega zaporedja aproksimacijskih funkcij

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) = f_k(\bar{x}) \quad \text{za} \quad \bar{t} = k\Delta t, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.3)$$

kjer je Δt integracijski korak.

Funkcija $f_k(\bar{x})$ je ocenjena na podlagi naslednjih rekurzivnih zvez [245]

$$\begin{aligned}
f_{k+1} &= f_k + \dot{f}_k \Delta t + \frac{1}{6} (m_1 + m_2 + m_3) \Delta t, \\
\dot{f}_0 &= 0, \quad \dot{f}_{k+1} = \dot{f}_k + \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4), \\
m_1 &= P(f_k) \Delta t, \quad m_2 = P\left(f_k + \dot{f}_k \Delta t / 2\right) \Delta t, \\
m_3 &= P\left(f_k + \dot{f}_k \Delta t / 2 + m_1 \Delta t / 4\right) \Delta t, \\
m_4 &= P\left(f_k + \dot{f}_k \Delta t + m_2 \Delta t / 2\right) \Delta t.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Za aproksimacijo iskane rešitve v odvisnosti od prostorske spremenljivke uporabimo Fourierovo vrsto. Valovna enačba (6.1) je simetrična glede na koordinatno izhodišče $\bar{x} = 0$. Če upoštevamo primer, ko je impulz $f_0(\bar{x})$ opisan s sodo funkcijo, potem mora biti tudi rešitev predstavljena s sodo funkcijo, $\dot{f}_k(\bar{x}) = f_k(-\bar{x})$. Vsako od funkcij $f_k(\bar{x})$ lahko predstavimo v naslednji obliki

$$f_k(\bar{x}) = \sum_{n=0}^N c_{n,k} \cos\left(n \frac{2\pi\bar{x}}{L_0}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{6.5}$$

kjer je L_0 brezdimenzijska velikost prostorske domene.

Koeficienti $c_{n,0}$, $c_{n,1}$ so definirani z začetnimi pogoji (6.2) in imajo naslednjo obliko

$$c_{n,0} = \frac{2}{L_0} \int_{-L_0/2}^{L_0/2} f_0(\bar{x}) \cos\left(n \frac{2\pi\bar{x}}{L_0}\right), \quad c_{n,1} = c_{n,0}. \tag{6.6}$$

Preostali koeficienti $c_{n,k}$, $k = 2, 3, 4, \dots$ se izračunajo z uporabo formul (6.4). Vrsta (6.5) upošteva robne pogoje periodične razširitve za $\bar{x} = L_0/2$. Ker obravnavamo valovanje v neskončnem mediju, upoštevamo razvoj rešitve na intervalu $0 < \bar{x} < L_0/2$.

Vemo, da je valovno enačbo (6.1) mogoče uporabiti, če je $\eta = l/L < 0,4$. Minimalna perioda harmonika v vrsti (6.5) je enaka $L = L_0 l / N$. Potem dobimo neenakost

$$N/L < 0,4. \tag{6.7}$$

Pogoj (6.7) implicira omejitev števila členov vrste (6.5). Vrsta (6.5) predstavlja zvezno aproksimacijo, kjer metoda Runge-Kutta temelji na diskretni diferenčni shemi. Kombinacijo obeh pristopov imenujemo psevdospektralna metoda [175, 393]. Psevdospektralna metoda je našla široko uporabo pri reševanju nelinearnih valovnih enačb z numeričnimi pristopi [69,243,395].

6.2. FOURIER-PADÉJEVA APROKSIMACIJA

Da bi izboljšali konvergenco vrste (6.5) in zmanjšali Gibbs-Wilbrahamove učinke [96, 143, 220], uporabimo Fourier-Padéjevo metodo aproksimacije. Omogoča zmanjšanje števila členov v vrsti (6.5) in povečanje minimalne periode harmonika. Slednja okoliščina je še posebej

pomembna. Omogoča razširitev področja uporabnosti valovne enačbe (6.1) na racionalno Padéjevo aproksimacijo funkcije $g(z)$ in jo je mogoče definirati na naslednji način. Predstavimo $g(z)$ v obliki vrste

$$g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_N z^N + O(z^{N+1}), \quad (6.8)$$

Potem ima Padéjeva aproksimacija naslednjo obliko:

$$g(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_K z^K}{1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_M z^M} + O(z^{N+1}), \quad (6.9)$$

kjer je $K + M = N$.

Koeficienti so določeni z naslednjim pravilom: razvoj (6.9) v Maclaurinovo vrsto mora sovpadati z vrsto (6.8) do vključno člena reda velikosti $O(z^N)$.

Transformacija (6.9) omogoča bistveno izboljšanje konvergence vrste (6.8). V praksi se večinoma uporablja diagonalni Padéjev približek, kjer je $K = M = N/2$. V nadaljevanju obravnavamo diagonalne aproksimacije.

Obstaja nekaj algoritmov, namenjenih izračunu koeficientov z uporabo Padéjevega približka [47]. V tem razdelku uporabljamo naslednji postopek. Koeficienti imenovalca b_i so definirani z rešitvijo sistema linearnih algebraičnih enačb v naslednji obliki:

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{N/2} \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{N/2+1} \\ c_3 & c_4 & c_5 & \dots & c_{N/2+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{N/2} & c_{N/2+1} & c_{N/2+2} & \dots & c_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{N/2} \\ b_{N/2-1} \\ b_{N/2-2} \\ \dots \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{N/2+1} \\ c_{N/2+2} \\ c_{N/2+3} \\ \dots \\ c_N \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

nato pa so koeficienti števca a_i definirani z naslednjo rekurzivno formulo

$$a_0 = c_0, \quad a_i = c_i + \sum_{k=1}^i b_k c_{i-k}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N/2. \quad (6.11)$$

Za reševanje sistema (6.10) se uporablja Gauss-Jordanova metoda (z računskega vidika sodi med najučinkovitejše metode). Dani algoritem zahteva $O[(N/2)^3]$ aritmetičnih operacij, kjer $N/2$ pomeni število enačb sistema.

Uporabimo Fourierovo vrsto na osnovi naslednje eksponente oblike

$$f_k(\bar{x}) = \sum_{n=0}^N c_{k,n} \cos\left(n \frac{2\pi\bar{x}}{L_0}\right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^N c_{k,n} e^{i \frac{2\pi\bar{x}}{L_0} n} \right), \quad (6.12)$$

in uporabimo zamenjavo $e^{i \frac{2\pi\bar{x}}{L_0} n} \rightarrow z$. Nato lahko diagonalno Fourier-Padéjevo aproksimacijo predstavimo v naslednji obliki

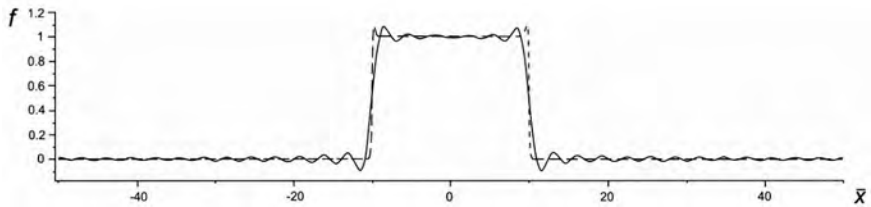
$$f_k(\bar{x}) = \operatorname{Re} \left(\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{N/2} z^{N/2}}{1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_{N/2} z^{N/2}} \right), \quad (6.13)$$

kje je $z = \exp(2\pi\bar{x}/L_0)$, koeficiente a_i, b_i pa dobimo iz povezav (6.10), (6.11).

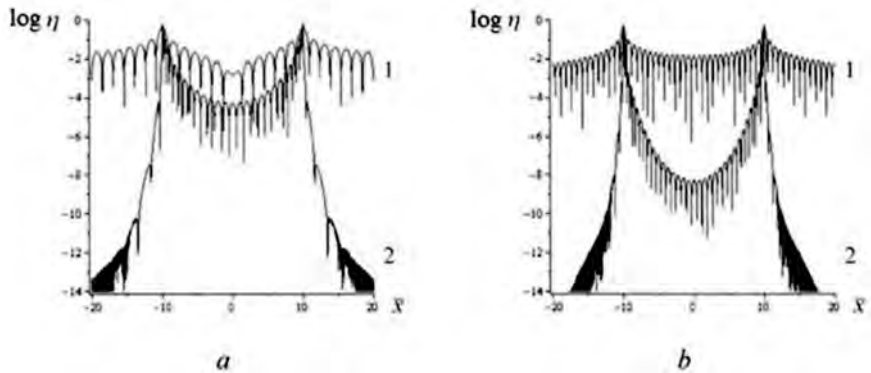
Kot primer obravnavamo odsekoma zvezno funkcijo

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{pri } -50 < \bar{x} < -10, \\ 1 & \text{pri } -10 < \bar{x} < 10, \\ 0 & \text{pri } 10 < \bar{x} < 50. \end{cases} \quad (6.14)$$

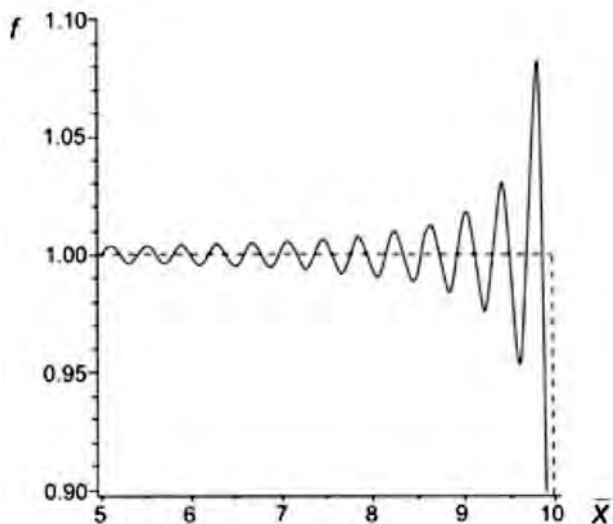
Slika 6.1 predstavlja delno vsoto Fourierove vrste (polna krivulja), primerjano s Fourier-Padéjevo aproksimacijo (črtkana krivulja) za $N = 32$. Absolutna napaka je prikazana na sliki 6.2 v logaritmskem merilu za $N = 32$ in $N = 64$. Uporaba Fourier-Padéjeve aproksimacije omogoča bistveno izboljšanje konvergence obravnavane vrste. V točkah nezveznosti je opazovano lokalno nihanje Fourierove vrste, ki ga povzročajo Gibbs-Wilbrahamovi pojavi.



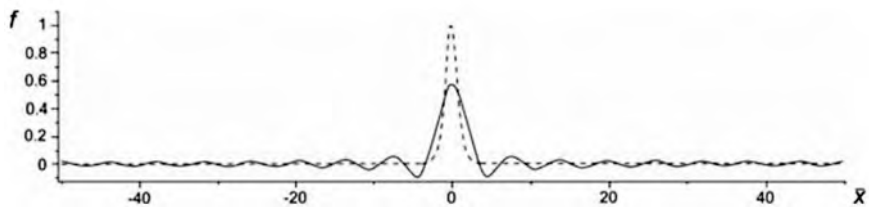
Slika 6.1. Aproksimacija odsekoma nezvezne funkcije $N = 32$ [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].



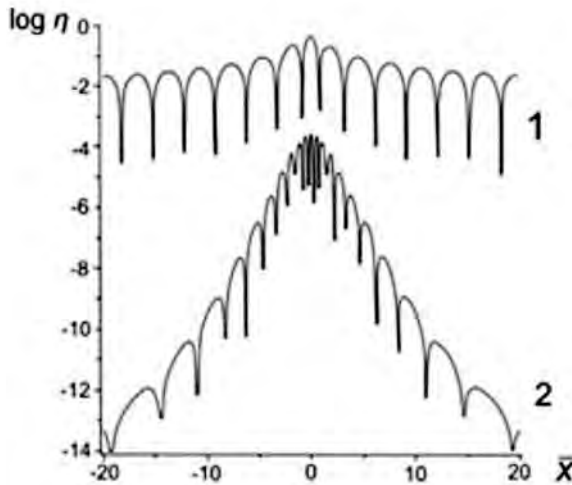
Slika 6.2. Absolutna napaka aproksimacij odsekoma nezvezne funkcije: (a) $N = 32$; (b) $N = 64$. 1 - Fourierova vrsta; 2 - Fourier-Padéjeva aproksimacija [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].



Slika 6.3. Aproximacije odseka nezvezne funkcije v bližini točke nezveznosti s Fourierovo vrsto (polna krivulja) in Fourier-Padéjevimi aproksimacijami (črtkana krivulja) ($N = 256$) [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].



Slika 6.4. Aproximacija lokaliziranega vala s Fourierovo vrsto (polna krivulja) in Fourier-Padéjevimi aproksimacijami (črtkana krivulja) ($N = 16$) [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].



Slika 6.5. Absolutna napaka aproksimacij lokaliziranega vala s Fourierovo vrsto (krivulja 1) in Fourier-Padéjevimi aproksimacijami (krivulja 2) ($N = 16$) [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].

V primeru Fourier-Padéjeve aproksimacije je slednji učinek manj zastopan (glej sliko 6.3). V primeru gladkih funkcij pa je uporaba Fourier-Padéjeve metode še bolj učinkovita. Slika 6.4 prikazuje rezultate za primer lokalizirane rešitve, ki je definirana s formulo $f = \operatorname{sech}(\bar{x})^2$. Tukaj je $L_0 = 100$ in število členov v vrsti $N = 16$. Pri danem (relativno majhnem) številu členov vrste daje Fourierova vrsta precej slabo aproksimacijo, medtem ko Fourier-Padéjeve aproksimacije skoraj popolno opišejo analizirano funkcijo. Absolutna napaka je prikazana na sliki 6.5.

6.3. NUMERIČNO MODELIRANJE NESTACIONARNEGA NELINEARNEGA VALOVANJA

Obravnavamo procese nastanka lokaliziranih nelinearnih valov, ki se pojavijo zaradi začetnih impulzov deformacij. Za izvedbo numeričnih testov je bila razvita programska koda v jeziku C. Z uporabo *GNU Compiler Collection* smo za izračune uporabili vrednosti fizikalnih lastnosti kompozitnega materiala. Obravnavali smo primer šibke nelinearnosti, ko je razmerje med nelinearnim in linearnim modulom togosti $E_2/E_1 \approx 10$. Omenjena vrednost je značilna za večino konstrukcij na osnovi kompozitov iz kovin in polimerov (glej npr. [290, 328]).

Efektivna fazna hitrost je v linearnem kvazihomogenem primeru blizu geometrične srednje vrednosti hitrosti $v_0 \approx \sqrt{v^{(1)}v^{(2)}}$.

Volurnski deleži komponent so enaki: $c^{(1)} = c^{(2)} = 0,5$, medtem ko je razmerje impedanc akustičnih komponent $z^{(2)}/z^{(1)} = 2$. Numerična integracija vhodne valovne enačbe (6.1) je bila izvedena v naslednjem prostorsko-časovnem območju: $-L_0/2 \leq \bar{x} \leq L_0/2$, $L_0 = 10000$,

$0 \leq t \leq 5000$. Število vključenih členov Fourierove vrste (glej sliko 6.5) je $N = 4000$, korak časovne integracije pa $\Delta t = 0,5$.

Vzemimo nastanek začetnega impulza pravokotne oblike

$$f_0(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{pri } -\frac{L_0}{2} < \bar{x} < -\frac{\Delta}{2}, \\ 1 & \text{pri } -\frac{\Delta}{2} \leq \bar{x} \leq \frac{\Delta}{2}, \\ 0 & \text{pri } \frac{\Delta}{2} < \bar{x} < \frac{L_0}{2}, \end{cases} \quad (6.15)$$

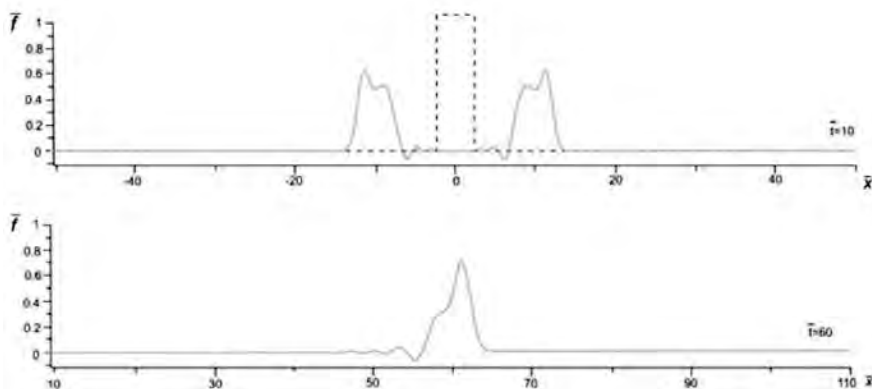
kjer je Δ brezdimenzijska širina impulza.

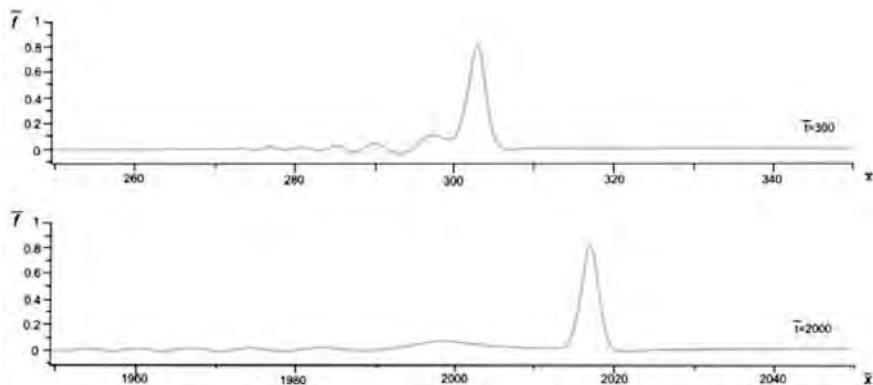
Numerični izračun se izvaja za tri različne scenarije: generiranje ločenega lokaliziranega vala, generiranje zaporedja lokaliziranih valov in sipanje začetnega impulza.

1. Generacija enega lokaliziranega vala.

Naj bo začetna oblika vzbujanja sorazmerno ozek impulz širine $\Delta = 5$. Amplituda deformacije je $F = 10^{-2}$. Upoštevajmo, da je ta relativno velika vrednost elastičnih deformacij značilna za elastomere in gumijaste materiale, pa tudi za polimere in organske molekularne verige.

Razvoj nelinearnega valovanja je prikazan na sliki 6.6. Tu in naprej črtkane krivulje ustrezajo rešitvi ob času $t = 0$. Pravokotni impulz se razdeli na dva simetrična dela, ki se premikata v nasprotnih smereh. Osredotočimo se na interval $0 < \bar{x} < L_0/2$, saj je na intervalu $-L_0/2 < \bar{x} < 0$ je rešitev enaka. Začetni impulz se pretvori v lokaliziran val zvonaste oblike (soliton) s hitro oscilirajočim repom. Poudariti je treba, da nastajanje lokaliziranega vala poteka na intervalu reda $x \sim 10^3 l$. Značilna velikost notranje strukture kompozitnih materialov je tipično na intervalu $l \sim 10^{-6} - 10^3$ m. Posledično lahko solitone opazimo v realnih konstrukcijah velikosti $l \sim 10$ m in več.

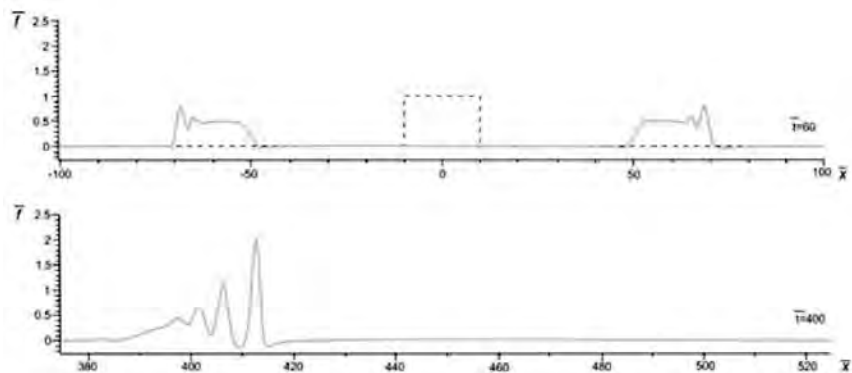


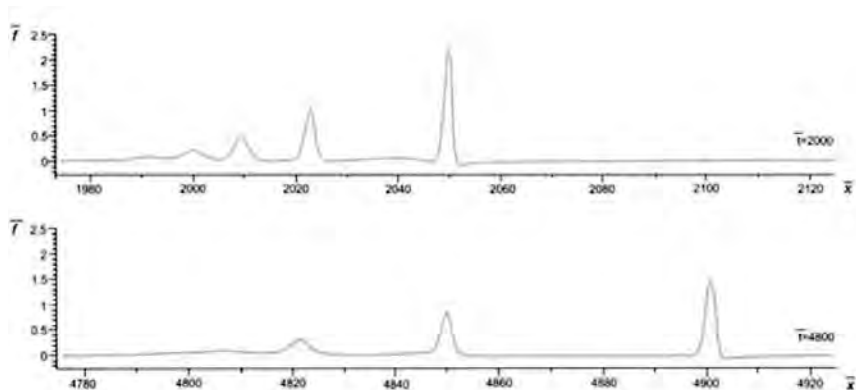


Slika 6.6. Nastanek "ozkega" impulza [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].

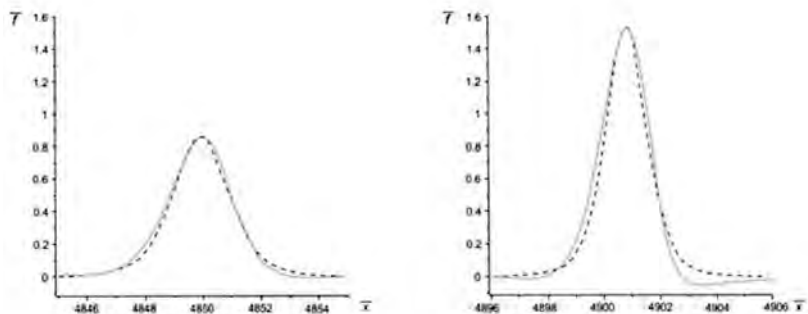
2. Generacija zaporedja lokaliziranih valov.

Začetno vzburjanje v obliki širokega impulza pomeni nastanek zaporedja solitonov. Nastanek pravokotnega impulza za $\Delta = 20$, $F = 10^{-2}$ je prikazan na sliki 6.7. "Visoki" solitoni imajo manjšo širino in se širijo hitreje kot "nizki" solitoni. Numerične in analitične rešitve stacionarnih lokaliziranih valov različnih amplitud in širin se dobro ujemajo (glej sliko 6.8).





Slika 6.7. Nastanek "širokega" tlačnega impulza [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].

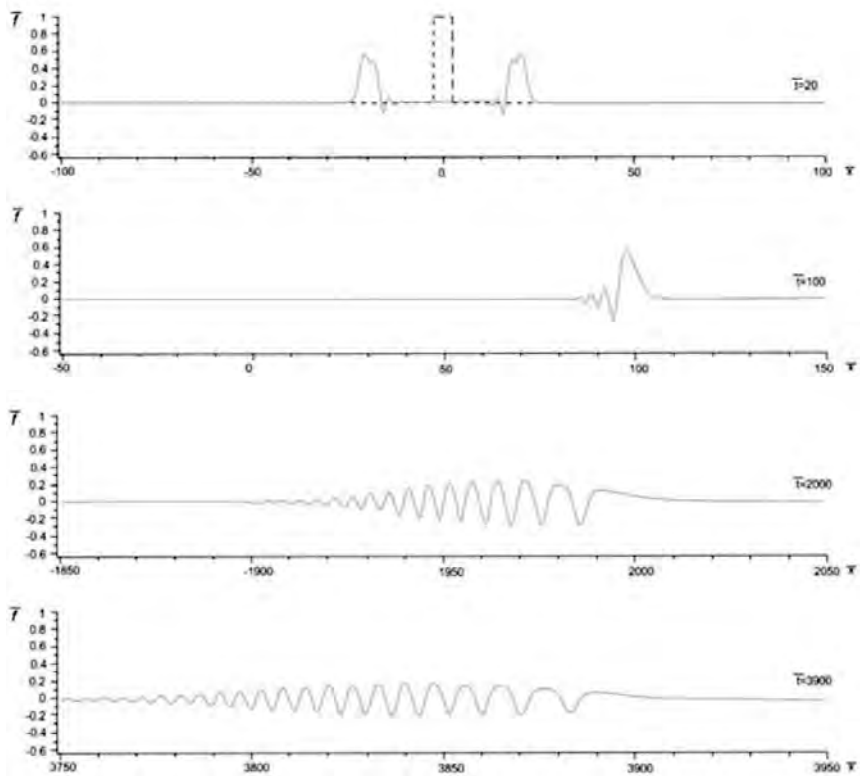


Slika 6.8. Stacionarni lokalizirani valovi za $\bar{t} = 4800$; numerične/analične rešitve so označene s polno/črtkano krivuljo [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].

3. Sipanje začetnega impulza napetosti.

Impulz napetosti $\Delta = 5$, $F = 10^{-2}$ ne sproži nastanka lokaliziranih valov. Namesto tega opazimo sipanje energije, ki povzroči delokalizacijo začetnega vzbujanja (glej sliko 6.9). Dobljeni rezultati so v skladu z zaključkom 4. poglavja, vezanim na analizo analitične rešitve za material z nelinearnostjo, kjer se širijo le lokalizirani tlačni valovi.

Rezultati, dobljeni v tem poglavju, se tudi kvalitativno ujemajo z rezultati, o katerih sta poročala Porubov [370] in Samsonov [398] glede lastnosti lokaliziranih nelinearnih valov, ki se širijo v trdnih telesih. Poudariti je treba tudi, da smo tukaj ponazorili pojave, povezane s pojavom strukturne disperzije, ki jo povzroča nehomogenost notranje mikrostrukture kompozitnih materialov. Dobljene rešitve omogočajo vzpostavitev odvisnosti med parametri mikrostrukture in značilnostmi nelinearnih valov deformacije, ki se širijo v materialih na makronivoju.



Slika 6.9. Delokalizacija začetnega nateznega impulza [ponatisnjeno z dovoljenjem založbe Elsevier].

7 Lokalizacija nihanj v 1D linearnih in nelinearnih mrežah: diskretni in zvezni modeli

To poglavje obravnava lokalizacijo nihanj v enodimenzionalnih linearnih in nelinearnih mrežah. Do lokalizacije nihanj lahko pride v primeru nehomogenosti pod naslednjimi pogoji: (i) frekvenčni spekter periodične strukture vključuje zaustavitvene pasove (ii) prisotna je motnja periodičnosti in (iii) lastna frekvenca motenega elementa je znotraj zaustavitvenega pasu. Pod temi pogoji se lahko energija prostorsko lokalizira v bližini defekta z eksponentnim upadanjem proti neskončnosti. Vpliv nelinearnosti lahko premakne frekvenco v območje zaustavitve.

Določene so frekvence lokalizacije in izračunani koeficienti oslabitve. Razviti so diskretni in zvezni modeli s primerjavo njihovih lastnosti. Določene so meje uporabnosti zveznih modelov. Analiza linearnega problema omogoča boljše razumevanje posebnih značilnosti nelinearnega problema in vodi do razvoja novega pristopa za analizo nelinearnih mrež, ki je alternativa metodi kontinualizacije.

7.1. UVOD

Učinek prostorske lokalizacije nihanj ima pomembno vlogo v dinamiki materialov in konstrukcij. Lokalna motnja lastnosti dinamičnega sistema (prisotnost napak, razpok, lukenj, vključkov itd.) vodi do koncentracije energije. Pod določenimi pogoji lahko povzroči lokalizirane načine v obliki stojnih valov z ničelno skupinsko hitrostjo. V tem primeru je vsa energija koncentrirana v bližini motečega elementa in z oddaljenostjo od elementa eksponentno upada. Nelinearnost sistema lahko na njegovo vedenje podobno učinkuje, kar povzroči lokalizirana nihanja [441].

Lokalizacija nihanj lahko vodi do lokalne izgube stabilnosti konstrukcij in povzroči njihovo odpoved. Hkrati ta učinek omogoča projektantu nadzor porazdelitve dinamičnih obremenitev, ki se lahko uporabijo za ustvarjanje dušilcev tresljajev in zmanjšanje amplitude tresljajev v najbolj kritičnih delih sistema. Lokalizirani načini igrajo pomembno vlogo v metodah akustične diagnostike, ki se uporabljajo za odkrivanje različnih okvar.

Učinki lokalizacije v homogenih in skoraj homogenih strukturah so raziskani v [218, 280]. Pregled problemov lokalizacije nihanj v linearnih in nelinearnih masnih mrežah je podan v [295], kjer je pozornost namenjena konstrukciji asimptotičnih rešitev v zveznih aproksimacijah. Homogenizacija in visokofrekvenčna asimptotika sta uporabljeni za opis lokalizacije v enodimenzionalnih mrežah v [131, 339]. Problemi lokalizacije nihanj v dvodimenzionalnih mrežah so obravnavani v [127].

Pojav lokalizacije nihajnih načinov v neskončno periodičnih ali biperiodičnih masnozmetnih sistemih z motnjami je bil raziskan v [104, 106] z uporabo tako imenovane metode U-transformacije. Ta metoda temelji na običajnem načinu razširitve.

Mnogi avtorji so uporabili Greenove funkcije za opis učinka lokalizacije. Vibracijski spektri defektnih polimerov so analizirani v [254]. Lokalizacije v linearnih zveznih sistemih z defekti (nosilec in plošča na elastičnem temelju; neenakomerne strune, palice in nosilci), kot

tudi v diskretnih sistemih (diskretna mreža na diskretnem elastičnem temelju; biperioidna diskretna mreža) so proučene v [324].

Perturbacijska metoda je bila uporabljena v [363] za analizo lokalizacije nihanj v neregularnih strukturah.

7.2. ENOATOMSKA MREŽA S PERTURBIRANO MASO

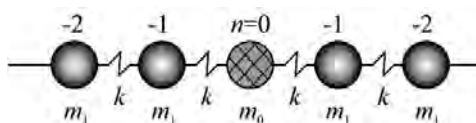
Spekter neskončne mreže v linearnem približku ne vsebuje lokaliziranih nihajnih načinov zaradi omejitev simetrije. Takšna rešitev lahko velja za mrežo s porušeno simetrijo. Podrobna analiza vpliva porušitve simetrije na lokalizacijo nihanj mreže je podana v [299 – 301].

Periodični sistemi so občutljivi na nekatere vrste motenj občasnih prekinitvev, kar ima za posledico pojav, znan kot lokalizacija nihajnega načina. Lokalizacija periodičnih nihanj v diskretnem sistemu pomeni, da nekatere amplitude bistveno presegajo ostale amplitude. To ima za posledico, da je energija sistema pretežno omejena na takem delu [441]. Večina obstoječih študij tega pojava obravnava linearne sisteme; pri čemer je bilo še posebej dokazano, da lahko v linearnem regularnem sistemu prihaja do lokalizacije, ko se vnesejo šibke motnje periodičnosti [104].

Obravnavamo enoatomsko mrežo, v kateri se masa elementa z indeksom $n = 0$ razlikuje od vseh ostalih mas, glej sliko 7.1. Gibalne enačbe so

$$m_0 \ddot{u}_0 + k(2u_0 - u_1 - u_{-1}) = 0, \quad (7.1)$$

$$m_1 \ddot{u}_1 + k(2u_1 - u_0 - u_2) = 0, \quad (7.2)$$



Slika 7.1. Enoatomska mreža s perturbirano maso [ponatisnjeno z dovoljenjem Springer Nature].

Iščemo prostorsko lokalizirano rešitev v naslednji obliki:

$$u_0 = A_0 e^{i\omega t}, \quad u_n = A_1 e^{-\alpha|n|} e^{i\beta n} e^{i\omega t}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (7.3)$$

kjer je α koeficient lokalizacije, $\alpha > 0$.

Pogoji za obstoj rešitve (7.3) in numerične vrednosti njenih parametrov so določeni s pogoji kompatibilnosti za gibalne enačbe.

Z vstavljanjem izrazov (7.3) v enačbe (7.1) in (7.2) dobimo

$$-m_0 \omega^2 A_0 + 2k[A_0 - e^{-\alpha} \cosh(i\beta) A_1] = 0, \quad (7.4)$$

$$-m_1 \omega^2 A_1 + k(2A_1 - A_0 e^{\alpha} e^{-i\beta} - A_1 e^{-\alpha} e^{i\beta}) = 0, \quad n = 1, \quad (7.5)$$

$$-m_1 \omega^2 A_1 + k(2A_1 - A_0 e^{\alpha} e^{i\beta} - A_1 e^{-\alpha} e^{-i\beta}) = 0, \quad n = -1, \quad (7.6)$$

$$-m_1 \omega^2 + k(2 - e^{-\alpha} e^{i\beta} - e^{\alpha} e^{-i\beta}) = 0, \quad n \geq 2, \quad (7.7)$$

$$-m_1 \omega^2 + k(2 - e^{-\alpha} e^{-i\beta} - e^{\alpha} e^{i\beta}) = 0, \quad n \leq -2. \quad (7.8)$$

Iz enačb (7.5), (7.7) ali (7.6), (7.8) dobimo $A_0 = A_1$ in iz enačb (7.7), (7.8) dobimo $\sinh(i\beta) = 0$. Zato je $\beta = 0$ ali $\beta = \pi$. Prvi koren ustreza trivialni rešitvi $\omega = 0$ in ga lahko zavrzemo. Za $\beta = \pi$ dobimo moteno π valovno obliko

$$u_n = (-1)^n A_1 e^{-\alpha|n|} e^{i\omega n}. \quad (7.9)$$

Enačbi (7.4) in (7.7) za $\beta = \pi$ omogočata določitev koeficienta lokalizacije:

$$\alpha = \ln \left(\frac{1 - \delta}{1 + \delta} \right), \quad (7.10)$$

kjer je $\delta = m/m_0 - 1$ brezdimenzijski parameter, ki določa stopnjo perturbacije.

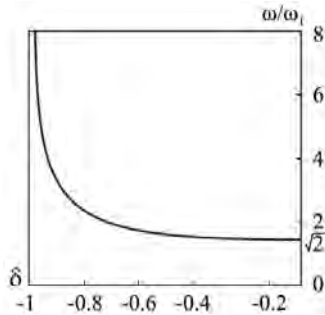
Lokalizacija nihanj je mogoča samo, če je $\alpha > 0$, zato iz enačbe (7.9) dobimo: $-1 < \delta < 0$. Z drugimi besedami, lokalizacija je možna samo za perturbirano maso, ki je manjša od drugih mas. Za majhne vrednosti δ dobimo

$$\alpha \approx -2\delta. \quad (7.11)$$

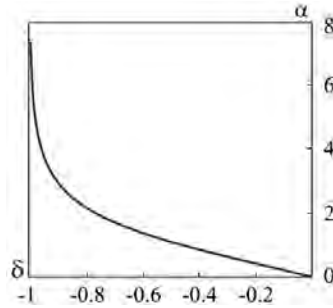
Iz enačbe (7.7) najdemo frekvenco, pri kateri poteka proces lokalizacije,

$$\frac{\omega^2}{\omega_1^2} = \frac{2}{1 - \delta^2}. \quad (7.12)$$

Numerični rezultati so prikazani na slikah 7.2 in 7.3. Zmanjševanje mase m_0 vodi do premika frekvence lokalizacije v območje zaustavitvenega pasu tj. $\omega > \sqrt{2}\omega_1$.



Slika 7.2. Pogostost lokalizacije v enoatomski mreži [ponatisnjeno z dovoljenjem Springer Nature].



Slika 7.3. Koefficient lokalizacije v enoatomski mreži [ponatisnjeno z dovoljenjem Springer Nature].

7.3. ENOATOMSKA MREŽA S PERTURBIRANO MASO– ZVEZNA APROKSIMACIJA

Osnovne enačbe v okviru zvezne aproksimacije ovojnice (poldiskretni pristop) [247, 250] in razdelka 10.5 lahko zapišemo na sledeči način

$$m_1 u_{tt}^{\pm} + 4k u^{\pm} + kh^2 u_{xx}^{\pm} = 0, \quad (7.13)$$

$$\text{at } x = 0, \quad u^+ = u^- = u, \quad (7.14)$$

$$kh(u_x^+ - u_x^-) = -\delta m_1 u_{tt}. \quad (7.15)$$

Funkciji $u^+(x, t)$ $u^-(x, t)$ opisujeta ovojnico nihanja z žagasto nihajno obliko desno oziroma levo od ničle, h pa je razdalja med masama.

Rešitev se išče v obliki

$$u^{\pm} = C^{\pm} e^{-\alpha|x|} e^{i\omega t}, \quad (7.16)$$

kjer je

$$\alpha = \sqrt{\frac{m_1 \omega^2 - 4k}{kh^2}}. \quad (7.17)$$

Enačba (7.14) daje $C^+ = C^-$. Predpostavimo, da

$$m_1 \omega^2 = 4k + \omega_1^2, \quad \omega_1^2 \ll 4k. \quad (7.18)$$

Nato enačba (7.15) daje

$$\alpha h \approx -2\delta, \quad (7.19)$$

ki sovпада s prvim členom vrste v rešitvi za diskretni sistem ki je predstavljena kot vrsta z majhnim parametrom δ , glej (7.11).

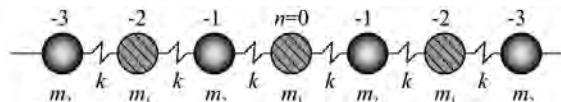
Izraz za frekvenco je podan z

$$\omega^2 = \frac{4k}{m_1} (1 + \delta^2). \quad (7.20)$$

Zanimiva ugotovitev je, da preureditev izraza (7.20) v Pade-jevi aproksimaciji (glej, npr. [47]) vodi do točnega izraza za frekvenco diskretnega modela (7.12).

7.4. DVOATOMSKA MREŽA

Obravnavajmo sedaj neskončno mrežo, sestavljeno iz mas m_1 in m_2 , ki se izmenjujeta, glejte sliko 7.4.



Slika 7.4. Dvoatomska mreža [ponatisnjeno z dovoljenjem Springer Nature].

Gibalni enačbi sta

$$m_1 \ddot{u}_n + k(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) = 0 \quad \text{za } n = \pm 1, \pm 3, \dots \quad (7.21)$$

$$m_2 \ddot{u}_n + k(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) = 0 \quad \text{za } n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \quad (7.22)$$

Z vstavljanjem izrazov

$$u_n = A_1 e^{i\beta|n|} e^{i\omega t} \quad \text{za } n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \quad (7.23)$$

$$u_n = A_2 e^{i\beta|n|} e^{i\omega t} \quad \text{za } n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \quad (7.24)$$

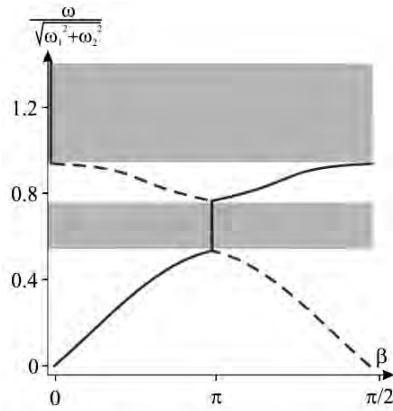
v enačbe (7.21) in (7.22) in z izločitvijo amplitud A_1, A_2 najdemo disperzijsko enačbo

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) = \cos^2 \beta, \quad (7.25)$$

kjer je $\omega_i = \sqrt{2k/m_i}$, $i = 1, 2$.

Disperzijske krivulje so prikazane na sliki 7.5. Tukaj in v nadaljevanju predpostavimo, da velja $m_1/m_2 = \omega_1^2/\omega_2^2 = 2$.

Upoštevajmo, da ima enačba (7.25) več korenov. Disperzijske odvisnosti normalnega valovanja v periodičnih strukturah so večlične narave [83]. Izbira enolične rešitve je eno temeljnih vprašanj teorije širjenja valovanja v periodičnih strukturah. V literaturi obstajajo o tem različna mnenja (glej npr. [83, 86, 98, 232, 272, 408]). Strinjamo se s stališčem, izraženim v [83, 408], da fizikalno upravičena izbira ene same disperzijske veje za vsak val zahteva dodatne informacije. Zmanjšanje negotovosti pri izbiri disperzijske krivulje mora temeljiti na omejujočem prehodu iz analizirane periodične strukture v drugo, za katero so disperzijske odvisnosti znane z večjo gotovostjo. V obravnavanem primeru je disperzijska krivulja izbrana iz pogoja obstoja mejnega prehoda v enoatomske verige.



Slika 7.5. Disperzijska krivulja za dvoatomno verigo [ponatisnjeno z dovoljenjem Springer Nature].

V strukturi z eno nihajno obliko obstaja enolična zveza med ω in β za dano rešitev (glej [408]). Ustrezne veje spektra so na sliki 7.5 prikazane s polnimi črtami, vse ostale veje pa s črtkanimi črtami.

Dvoatomska mreža ima dva zaustavitvena pasova, ki sta realizirana za $\beta = \pi/2$ (pari sodih in lihah mas se gibljejo z nasprotnimi fazami) in za $\beta = \pi$ (sosednje mase se gibljejo z nasprotnimi fazami).

Upoštevajmo še, da spodnja in zgornja meja prvega zaustavitvenega pasu sovpadata z lastnima frekvencama ω_2 in ω_1 nihanj nepovezanih mas, spodnja meja drugega zaustavitvenega pasu pa je $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

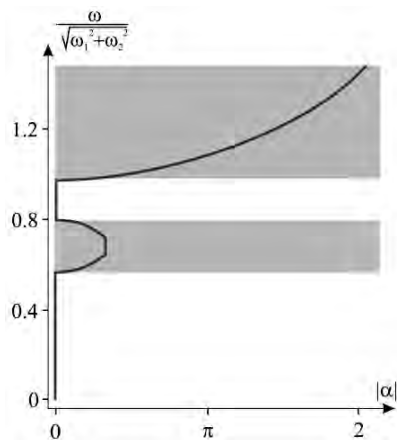
Z uvedbo valovnega števila, ki je enako $\beta + i\alpha$, najdemo koeficient oslabitve:

$$\alpha = \arcsin h \sqrt{-\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)} \quad (7.26)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln \left[1 + 2D \pm 2 \sqrt{D \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)} \right] \quad (7.27)$$

kjer je $D = (\omega^2/\omega_1^2)(\omega^2/\omega_2^2) - \omega^2/\omega_1^2 - \omega^2/\omega_2^2$.

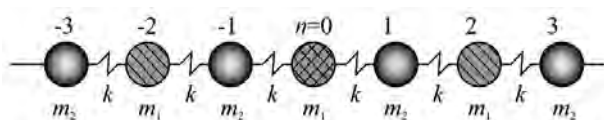
Numerični rezultati za koeficient oslabitve α so prikazani na sliki 7.6.



Slika 7.6. Koefficient oslabitve dvoatomske verige [ponatisnjeno z dovoljenjem Springer Nature].

7.5. DVOATOMSKA MREŽA S PERTURBIRANO MASO

Oglejmo si sedaj dvoatomsko mrežo, v kateri je masa elementa z indeksom $n = 0$ enaka m_0 in se razlikuje od mas preostalih sodih elementov, glej sliko 7.7.



Slika 7.7. Dvoatomska mreža s perturbirano maso [ponatisnjeno z dovoljenjem Springer Nature].

Gibalne enačbe so

$$m_0 \ddot{u}_0 + k(2u_0 - u_1 - u_{-1}) = 0, \quad (7.28)$$

$$m_1 \ddot{u}_n + k(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) = 0 \quad \text{za } n = \pm 1, \pm 3, \dots, \quad (7.29)$$

$$m_2 \ddot{u}_n + k(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) = 0 \quad \text{za } n = \pm 2, \pm 4, \dots, \quad (7.30)$$

Lokalizirano rešitev lahko zapišemo na naslednji način:

$$u_0 = A_0 e^{i\omega t} \quad \text{za } n = 0, \quad (7.31)$$

$$u_n = A_1 e^{-\alpha|n|} e^{i\beta n} e^{i\omega t} \quad \text{za } n = \pm 1, \pm 3, \dots, \quad (7.32)$$

$$u_n = A_2 e^{-\tilde{\alpha}|n|} e^{i\tilde{\beta} n} e^{i\omega t} \quad \text{za } n = \pm 2, \pm 4, \dots, \quad (7.33)$$

Če želimo najti vrednosti valovnega števila, za katere obstaja učinek lokalizacije, upoštevajmo dva sistema enačb (7.28) – (7.30) za $n = -3, -2$ in za $n = 2, 3$. Da bi izločili amplitudo, izenačimo z nič determinanto matrik, sestavljenih iz koeficientov A_1 in A_2

$$4 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) = \left(e^{\alpha} e^{i\beta} + e^{-\alpha} e^{-i\beta}\right)^2, \quad (7.34)$$

$$4 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) = \left(e^{-\alpha} e^{i\beta} + e^{\alpha} e^{-i\beta}\right)^2, \quad (7.35)$$

Iz enačb (7.34) in (7.35) sledi, da je $\beta = 0$ ali $\beta = \pi/2$ ali $\beta = \pi$. Prvi koren ustreza trivialni rešitvi $\omega = 0$. Pogoji združljivosti enačb. (7.29) in (7.30) za $n = 1, 2, 3$ so $A_0 = A_2$.

Oglejmo si sistema enačb (7.28) – (7.30) ko je $n = 0, 1$ in ko je $n = 1, 2$. Če determinanto ustreznih matrik izenačimo z nič, dobimo

$$4 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) = \left(e^{-2\alpha} e^{i\beta} + e^{-i\beta}\right) \left(e^{i\beta} + e^{-i\beta}\right), \quad (7.36)$$

$$4 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) = \left(e^{-\alpha} e^{i\beta} + e^{\alpha} e^{-i\beta}\right)^2, \quad (7.37)$$

kjer je $\omega_0 = \sqrt{2k/m_0}$, $\omega_1^2 < \omega_0^2 < \omega_2^2$.

Z reševanjem enačb (7.36), (7.37) določimo frekvenco in koeficient lokalizacije. V primeru $\beta = \pi/2$ imamo

$$\omega^2 = \omega_0^2. \quad (7.38)$$

$$\alpha = \arcsin h \sqrt{-\left(1 - \frac{m_1}{m_0}\right) \left(1 - \frac{m_2}{m_0}\right)} \approx \sqrt{-\left(1 - \frac{m_1}{m_0}\right) \left(1 - \frac{m_2}{m_0}\right)}. \quad (7.39)$$

V primeru $\beta = \pi$

$$\frac{\omega^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \frac{\lambda (1 - \delta^2) + 2 + \sqrt{\lambda^2 (1 - \delta^2)^2 + 4\delta^2}}{2(1 + \lambda)(1 - \delta^2)}, \quad (7.40)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\lambda (1 - \delta)^2}{2\delta + \sqrt{\lambda^2 (1 - \delta^2)^2 + 4\delta^2}} \right], \quad (7.41)$$

kjer sta $\lambda = m_2/m_1 = \omega_2^2/\omega_1^2$, $\delta = m_0/m_2 - 1$.

Lokalizacija nihanj je mogoča le pri $a < 0$, kar pomeni, da je $-1 < \delta < 0$. Za majhne vrednosti δ dobimo

v primeru $\beta = \pi/2$:

$$\alpha \approx \sqrt{-\left(1 - \frac{m_1}{m_0}\right) \left(1 - \frac{m_2}{m_0}\right)}, \quad (7.42)$$

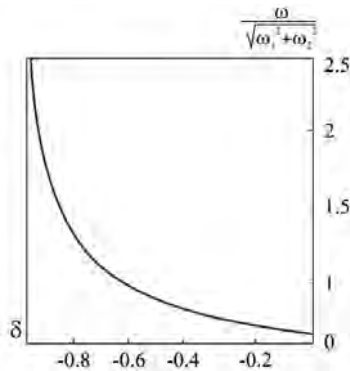
v primeru $\beta = \pi$

$$\alpha \approx -\delta \frac{m_1 + m_2}{m_2}, \quad (7.43)$$

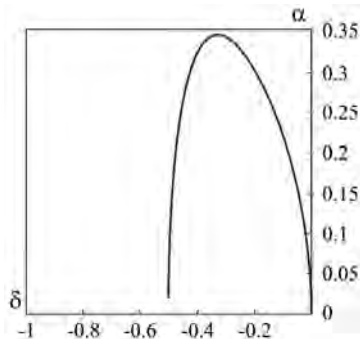
$$\frac{\omega^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \approx 1 + \delta^2 \frac{m_1}{m_2}. \quad (7.44)$$

Za $\lambda = 1$ enačba (7.40) preide v enačbo (7.12), enačba (7.41) pa preide v enačbo (7.9).

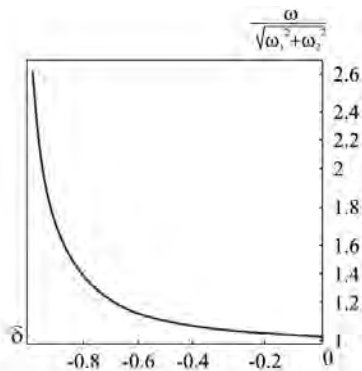
Numerični rezultati so prikazani na slikah 7.8 – 7.11. V izračunih je predpostavljena vrednost $\lambda = 2$. V primeru $\beta = \pi/2$ lokalizacija ($a > 0$) poteka v območju vrednosti $-(\lambda - 1)/\lambda < \delta < 0$. Frekvenca lokalizacije sovpada z lastno frekvenco ω_0 nevezanih nihanj perturbirane mase in je znotraj prvega zaustavitvenega pasu, $\omega_2 < \omega < \omega_1$.



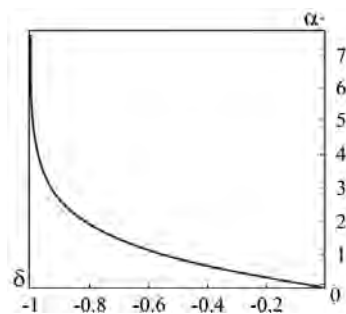
Slika 7.8. Frekvenca lokalizacije v dvoatomski mreži za $\beta = \pi/2$ [ponatisnjeno z dovoljenjem Springer Nature].



Slika 7.9. Koefficient lokalizacije v dvoatomski mreži za $\beta = \pi/2$ [ponatisnjeno z dovoljenjem Springer Nature].



Slika 7.10. Frekvenca lokalizacije v dvoatomski mreži za $\beta = \pi$ [ponatisnjeno z dovoljenjem Springer Nature].



Slika 7.11. Koefficient lokalizacije v dvoatomski mreži za $\beta = \pi$ [ponatisnjeno z dovoljenjem Springer Nature].

V primeru $\beta = \pi$ lokalizacija nastopi, ko je $\delta < 0$, kar zagotavlja premik frekvence v drugi zaustavitveni pas: $\omega > \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$. V obeh primerih je koefficient lokalizacije α po absolutni vrednosti enak koefficientu oslavitve nemotenega dela verige. Z vstavljanjem enačb (7.38) in (7.40) v enačbe (7.26) in (7.27) dobimo izraz, ki sovпада s formulama (7.39) oziroma (7.41).

7.6. DVOATOMSKA MREŽA S PERTURBIRANO MASO – ZVEZNA APROKSIMACIJA

Nadaljujmo sedaj z zveznimi približki. V primeru $\beta = \pi/2$ ima zvezni model naslednjo obliko

$$m_1 \ddot{u} + 2k(u - hv_v) = 0, \quad (7.45)$$

$$m_2 \ddot{v} + 2k(v - hu_v) = 0. \quad (7.46)$$

Tu $u(x, t)$ in $v(x, t)$ opisujeta ovojnico nihanja v obliki žagaste nihajne oblike. Iščemo rešitev enačb (7.45) in (7.46) v obliki

$$u = A_1 e^{i\omega_1 t} e^{-\alpha x}, \quad v = A_2 e^{i\omega_1 t} e^{-\alpha x}, \quad (7.47)$$

s čemer dobimo

$$\alpha h = \sqrt{-\left(1 - \frac{m_1}{m_0}\right)\left(1 - \frac{m_2}{m_0}\right)}, \quad (7.48)$$

kar se ujema s prvim členom natančne rešitve (7.39) pri majhni stopnji perturbacije mase (7.42).

V primeru $\beta = \pi$ se zvezni model zapiše kot

$$m_1 \ddot{u}^\pm + 2k \left(u^\pm + v^\pm + \frac{1}{2} h^2 v_{xx}^\pm \right) = 0, \quad (7.49)$$

$$m_2 \ddot{v}^\pm + 2k \left(v^\pm + u^\pm + \frac{1}{2} h^2 u_{xx}^\pm \right) = 0, \quad (7.50)$$

$$\text{pri } x = 0 \quad u^+ = u^- = u, \quad (7.51)$$

$$v^+ = v^- = v, \quad (7.52)$$

$$k h^2 (u_{xx}^+ - u_{xx}^-) = \delta m_2 h \omega^2 v. \quad (7.53)$$

Tukaj funkciji $u^\pm(x, t)$ in $v^\pm(x, t)$ opisujeta ovojnico nihanja v obliki žagaste nihajne oblike desno oziroma levo od koordinatnega izhodišča.

Rešitev enačb (7.49) in (7.50) iščemo v obliki

$$u^\pm = C^\pm e^{-\alpha|x|}, \quad v^\pm = D^\pm e^{-\alpha|x|}. \quad (7.54)$$

Iz enačb (7.51) in (7.52) najdemo

$$C^+ = C^- = C, \quad D^+ = D^- = D. \quad (7.55)$$

Uvedimo

$$\omega^2 = \frac{2k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} + \omega_1^2, \quad \omega_1^2 \ll \frac{2k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}. \quad (7.56)$$

Iz enačbe (7.49) dobimo

$$D \approx \frac{m_1}{m_2} C, \quad (7.57)$$

Iz enačbe (7.53) pa dobimo

$$\alpha h = -\delta \frac{m_1 + m_2}{m_2}, \quad (7.58)$$

kar se ujema s prvim členom natančne rešitve (7.41) pri majhni stopnji perturbacije mase (7.43).

Iz enačb (7.49), (7.50), (7.56) in (7.58) imamo

$$\omega_1^2 = \frac{2k\delta^2(m_1 + m_2)}{m_2^2}. \quad (7.59)$$

Zato velja

$$\omega^2 = \frac{2k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \left(1 + \frac{\delta^2 m_1}{m_2}\right), \quad (7.60)$$

kar sovпада z izrazom (7.44).

7.7. NIHANJA MREŽE NA PODPORI Z DEFEKTOM

Tankoslojne prevleke se pogosto uporabljajo kot zaščitni ali ojačitveni elementi v sodobnih konstrukcijah. Deformacije takšnih struktur lahko povzročijo znatne napetosti na vmesniku med podlago in prevleko zaradi razlik v njihovih fizikalnih in mehanskih lastnostih. Velike obremenitve lahko privedejo do odcepitve prevleke in okvare strukture. Trdnostna analiza teh konstrukcij pri dinamičnih obremenitvah ali udarcih je še posebej pomembna zaradi možnosti lokaliziranih tresljajev v bližini nehomogenosti, kot so vključki, defekti ipd. V [3] je na primeru odtrganja vrvice od elastične podpore, prikazana možnost lokaliziranih nihanj, pri čemer je analiziran učinek te lokalizacije na rast cone odcepitve. V nadaljevanju obravnavamo tresljaje mreže na podpori z napako.

Osnovne enačbe so

$$m_1 \ddot{u}_n + k(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) + (\gamma + \Delta\gamma \delta_0^n) u_n = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.61)$$

V enačbi (7.61) δ_0^n pomeni Kroneckerjev delta, γ je togost podpore, $\Delta\gamma$ je defekt togosti podpore. Rešitev enačbe (7.61) iščemo v obliki

$$\ddot{u}_n = A e^{-\alpha|n|} e^{i\beta n} e^{i\omega t}. \quad (7.62)$$

Z vstavljanjem izraza (7.62) v enačbo (7.61) dobimo

$$n = 0: -m_1 \omega^2 + k(2 - e^{-\alpha} e^{i\beta} - e^{\alpha} e^{-i\beta}) + \gamma + \Delta\gamma = 0, \quad (7.63)$$

$$n > 0: -m_1 \omega^2 + k[2 - e^{-\alpha}(e^{i\beta} - e^{-i\beta})] + \gamma = 0. \quad (7.64)$$

Iz tega izhaja, da ima lahko koeficient β vrednosti 0 ali π . Pri $\beta = 0$ v nemotenem stanju vse mase nihajo podobno, faktor oslavitve pa je enak

$$\alpha = \operatorname{arcsinh} \frac{\Delta\gamma}{2k} \approx \frac{\Delta\gamma}{2k}, \quad \Delta\gamma > 0. \quad (7.65)$$

Uporaba zvezne aproksimacije daje $\alpha = \frac{\Delta\gamma}{2k}$.

Za $\beta = \pi$ imamo žagasto valovno obliko in faktor oslavitve je enak

$$\alpha = -\operatorname{arcsinh} \frac{\Delta\gamma}{2k} \approx -\frac{\Delta\gamma}{2k}, \quad \Delta\gamma < 0. \quad (7.66)$$

Uporaba kontinualizacije ovojnice prinaša $\alpha = \frac{\Delta\gamma}{2k}$.

7.8. NELINEARNA NIHANJA MREŽE

Iz najnovejših dosežkov na tem področju izhaja, da uporaba lokalizacije v nelinearni verigi omogoča ustvarjanje akustične diode [282]. Na tem področju je objavljenih tudi nekaj obsežnejših raziskav [295, 410, 441].

Kvalitativna analiza periodičnih nihanj nelinearnih n -DOF sistemov je bila izvedena v [474] tako za avtonomne konzervativne in nekonzervativne kot tudi za neavtonomne sisteme. Dobljeni so zadostni pogoji za močno lokalizacijo. Drugi del pogojev zagotavlja obstoj periodične rešitve z enim parametrom, tako da nekatere amplitude naraščajo proti neskončnosti, medtem ko ostale težijo proti ničli, ko se parameter povečuje (asimptotična lokalizacija).

Nelinearne lokalizirane načine v popolnoma cikličnem periodičnem sistemu so proučevali v [440 – 442] z uporabo pristopa skaliranja.

Linearne verige z nelinearnimi motnjami so bile analizirane v [102, 103], kjer sta bili za analizo linearnih sistemov uporabljeni Lindstedt-Poincaré-jeva tehnika in U-transformacija.

Številni avtorji so za analizo diskretnih sistemov uporabljali zvezne aproksimacije. Tu je treba v prvi vrsti opozoriti na pionirsko delo [248]. Lokalizirana nihanja strune s koncentriranimi masami na nelinearnih elastičnih podporah so bile na podoben način proučene v [448].

V tem razdelku obravnavamo nihanje mreže na nelinearni podpori. Osnovne enačbe lahko zapišemo na naslednji način [248, 448]:

$$m_1 \ddot{u}_n + k(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) + \gamma u_n - \gamma_0 u_n^3 = 0; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.67)$$

Po uvedbi brezdimenzijske spremenljivke $\tau = \sqrt{\frac{k}{m_1}} t$ se enačba (7.67) lahko zapiše v obliki

$$\frac{d^2 u_n}{d\tau^2} + 2u_n - u_{n+1} - u_{n-1} + \gamma_1 u_n - \gamma_1 u_n^3 = 0; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.68)$$

kjer sta $\gamma_0 = \frac{\gamma}{k}$, $\gamma_1 = \frac{\gamma_0}{k}$.

Lokalizacija je možna pri premiku frekvence pod minimalno frekvenco linearnih nihanj $\omega = \gamma_0$. Uporabimo metodo harmoničnega ravnovesja, ki predstavlja rešitev enačbe (7.68) v obliki

$$u_n(\tau) \approx U_n \cos(\omega \tau). \quad (7.69)$$

Z vstavljanjem enačbe (7.69) v enačbo (7.68), dobimo v prvem približku metode harmoničnega ravnovesja

$$\varepsilon^2 U_n + 2U_n - U_{n-1} - U_{n+1} - \frac{3}{4} \gamma_1 U_n^3 = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.70)$$

kjer je $\varepsilon^2 = \gamma_0 - \omega^2 \ll 1$.

Rešitev enačbe (7.70) se išče v obliki perturbacijske vrste:

$$U_n = U_n^{(0)} + \varepsilon U_n^{(1)} + \dots \quad (7.71)$$

V ničelnem približku dobimo

$$U_n^{(0)} = A a^n. \quad (7.72)$$

kjer je $a \approx 1 \pm \varepsilon$.

Obravnavamo problem z $n \geq 0$ in v tem primeru izberemo $\alpha \approx 1 - \varepsilon$. S standardnim postopkom perturbacijske metode [330] najdemo

$$U_n^{(1)} = \frac{3\gamma}{32\varepsilon^2} A^3 a^{3n}, \quad (7.73)$$

Preoblikovanje skrajšane perturbacijske vrste (7.71) s prvima dvema členoma, definiranimi z enačbami (7.72) in (7.73), v Pade-jevo aproksimacijo [47] nam da

$$Aa^n + \frac{3\gamma}{32\varepsilon^2} A^3 a^{3n} \approx Aa^n \frac{1}{1 + \frac{3\gamma}{32\varepsilon^2} A^2 a^{2n}}. \quad (7.74)$$

Z uporabo pogoja simetrije

$$U_1 - U_0 = 0, \quad (7.75)$$

dobimo

$$A = 4\varepsilon \sqrt{\frac{2}{3\gamma}}. \quad (7.76)$$

Kot rezultat dobimo

$$U_n = 2\varepsilon \sqrt{\frac{2}{3\gamma}} \frac{2}{(1-\varepsilon)^n + (1-\varepsilon)^{-n}}. \quad (7.77)$$

Zvezna aproksimacija, opisana z enačbo

$$\varepsilon^2 U(x) - \frac{d^2 U(x)}{dx^2} - \frac{3}{4} \gamma U^3(x) = 0, \quad (7.78)$$

v tem primeru daje [410]:

$$U(x) = 2\varepsilon \sqrt{\frac{2}{3\gamma}} \frac{2}{e^{\varepsilon x} + e^{-\varepsilon x}}. \quad (7.79)$$

Zanimivo je primerjati dobljeno rešitev za diskretni sistem, ki ga daje enačba (7.77) z rešitvijo, podano z enačbo (7.79), pridobljeno v [248] z zvezno aproksimacijo tega sistema. V rešitvi (7.77) lahko vidimo, da je člen $e^{\varepsilon x}$ nadomeščen s prvimi členi razvoja tega eksponenta v Maclaurinovo vrsto. Analizirajmo, ali je mogoče doseči boljše sovpadanje rešitev za diskretno in zvezno aproksimacijo. Upoštevajmo, da je izraz (7.79) natančna rešitev enačbe (7.78), medtem ko je izraz (7.77) le približna rešitev enačbe (7.70). Asimptotična metoda za analizo diskretnih nelinearnih mrež, ki v prvem približku temelji na prehodu na integrabilne primere, je predlagana v [124, 242]. Z drugimi besedami, prvotni sistemi so dopolnjeni z nekaterimi izrazi, tako da imajo novi sistemi zadostno simetrijo za izpeljavo natančnih rešitev. Podobna ideja je uporabljena v [258].

V skladu s to idejo lahko namesto prehoda na zvezno aproksimacijo osnovne enačbe za nelinearno neintegrabilno mrežo (7.67) približno zamenjamo na naslednji način

$$m_1 \ddot{u}_n + k(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) + \gamma u_n - \frac{1}{2} \gamma_0 (u_{n-1} + u_{n+1}) |u_n^2| = 0, \quad (7.80)$$

Enačba (7.80) opisuje znano Ablowitz-Ladikovo mrežo (glej [401], razdelek (5.2.1)), ki ima natančno rešitev

$$U_n = 2\varepsilon \sqrt{\frac{2}{3\gamma_1}} \frac{2}{e^{\varepsilon n} + e^{-\varepsilon n}}. \quad (7.81)$$

Zvezna aproksimacija enačbe (7.80) sovpa z zvezno aproksimacijo enačbe (7.67), medtem ko rešitev (7.81) sovpa z rešitvijo (7.79). Zato asimptotični proces, predlagan v [124, 242], v prvem približku ustreza zveznemu približku.

7.9. VPLIV NELINEARNOSTI NA PREPUSTNE IN ZAUSTAVITVENE PASOVE

Za razliko od člankov [103, 248], ki so preučevali linearne mreže z nelinearnimi motnjami, raziskujemo dinamiko nelinearne mreže.

Upoštevajmo nihanja nelinearne mreže

$$m_1 \ddot{u}_n + k(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) + \varepsilon_1 \gamma_1 [(u_n - u_{n+1})^3 + (u_n - u_{n-1})^3] = 0, \quad (7.82)$$

kjer je $\varepsilon_1 \ll 1$.

Po zamenjavi spremenljivk

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{2k}{m_1}} t, \quad \tilde{u} = u \sqrt{\frac{\gamma_1}{k}} \quad (7.83)$$

dobimo naslednji sistem enačb:

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\tau_1^2} + \frac{1}{2} (2\tilde{u}_n - \tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_{n-1}) + \frac{\varepsilon_1}{2} [(\tilde{u}_n - \tilde{u}_{n+1})^3 + (\tilde{u}_n - \tilde{u}_{n-1})^3] = 0, \quad (7.84)$$

V primeru šibke nelinearnosti razvijemo asimptotično rešitev enačbe (7.84) z uporabo Lindstedt-Poincaré-jeve tehnike [114]. V ta namen uvedemo novo spremenljivko $\tau_2 = \omega \tau_1$, rešitev pa iščemo v obliki razširitve

$$\tilde{u}_n = u_n^{(0)} + \varepsilon_1 u_n^{(1)} + \varepsilon_1^2 u_n^{(2)} + \dots \quad (7.85)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon_1 \omega_1 + \varepsilon_1^2 \omega_2 + \dots \quad (7.86)$$

V ničelnem približku dobimo

$$u_n^{(0)} = A_0 e^{i\tau_2} e^{j\beta n} + c.c.c. \quad (7.87)$$

$$\omega_0^2 = 1 - \cos(\beta + \alpha i). \quad (7.88)$$

Tu sta β in α realni in imaginarni del valovnega števila. Sistem enačb prvega približka je

$$\omega_0^2 \frac{d^2 u_n^{(1)}}{d\tau_2^2} + \frac{1}{2} (2u_n^{(1)} - u_{n+1}^{(1)} - u_{n-1}^{(1)}) = \omega_1 \frac{d^2 u_n^{(0)}}{d\tau_2^2} - \frac{1}{2} [(u_n^{(0)} - u_{n+1}^{(0)})^3 + (u_n^{(0)} - u_{n-1}^{(0)})^3], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.89)$$

Iz pogoja odsotnosti izrazov najdemo

$$\omega_1 = 6A_0\bar{A}_0(2\cos\beta\cosh^2\alpha - \cos\beta - \cosh\alpha)(\cos\beta - \cosh\alpha). \quad (7.90)$$

kjer je \bar{A}_0 je konjugirano kompleksna vrednost konstante A_0 .

$$\omega_1 = 6A_0\bar{A}_0(1 - \cos\beta)^2. \quad (7.91)$$

Za pas prepustnosti ($\alpha = 0$) dobimo

$$\omega_1 = 6A_0\bar{A}_0(2\cosh^2\alpha + \cosh\alpha - 1)(1 + \cosh\alpha). \quad (7.92)$$

Magnituda ω_{SB} praga zaustavitvenega pasu ($\alpha = 0, \beta = \pi$) je

$$\omega_{SB} = \sqrt{2 + 24\varepsilon_1 A_0 \bar{A}_0}. \quad (7.93)$$

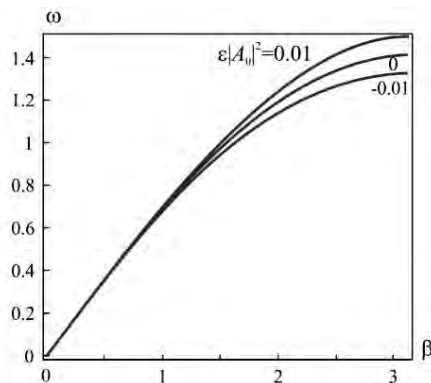
Ta rezultat se ujema z rezultatom, ki je v [114] dobljen na drugačen način.

V okviru metode kontinualizacije ovojnice, ob predpostavki $u_n = -u_{n+1}$ in nato po prehodu na zvezno spremenljivko x , lahko izvirno enačbo predstavimo na naslednji način:

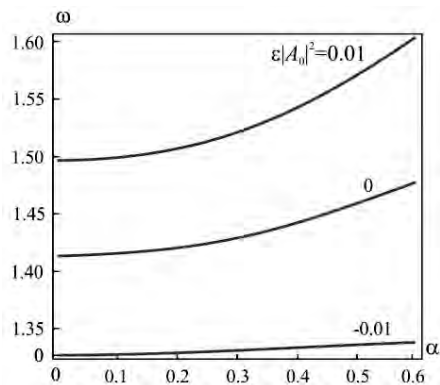
$$m_1 \ddot{u}(x,t) + 4ku(x,t) + 16\varepsilon_1 \gamma_{10} u^3(x,t) = 0. \quad (7.94)$$

Formulo (7.93) za določitev praga zaustavitvenega pasu lahko izpeljemo tudi z uporabo Lindstedt-Poincarejeve metode.

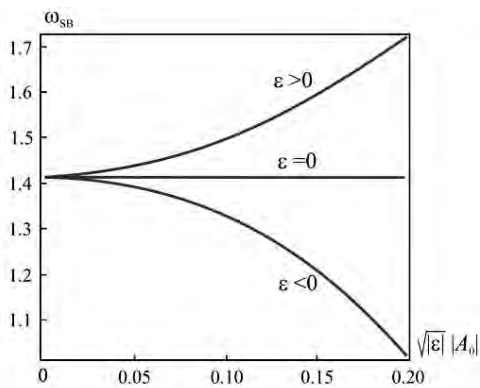
Hitrost nelinearnih učinkov je določena z velikostjo parametra ε_1 in amplitudnim modulom $|A_0|$. Slike 7.12, 7.13 in 7.14 prikazujejo vpliv nelinearnosti na disperzijske krivulje, na koeficient oslabitve α in na prag zaustavitvenega pasu ω_{SB} . Upoštevati je treba, da šibka nelinearnost ($\varepsilon_1 < 0$) zmanjša širino prepustnega pasu, medtem ko prisotnost močne nelinearnosti ($\varepsilon_1 > 0$) razširi območje prepustnega pasu.



Slika 7.12. Vpliv nelinearnosti na disperzijske krivulje [ponatisnjeno z dovoljenjem Springer Nature].



Slika 7.13. Vpliv nelinearnosti na koeficient oslabitve [ponatisnjeno z dovoljenjem Springer Nature].



Slika 7.14. Vpliv mehke in trde nelinearnosti [ponatisnjeno z dovoljenjem Springer Nature].

8 Prostorska lokalizacija linearnih elastičnih valov v kompozitnih materialih z defekti

V tem poglavju je uporabljen pristop prenosne matrike za raziskovanje lokalizacije linearnih valov v kompozitnih materialih. Analizirane so perturbacije gostote in volumskih deležev komponent. Proučena je tudi lokalizacija izvenravninskih linearnih strižnih valov v vlaknastem kompozitu. V slednjem primeru pristop širjenja ravninskega valovanja omogoča pridobitev lokalizacijskih frekvenc in faktorjev oslabitve. Raziskan je vpliv perturbacije volumskega deleža vlakna na omenjene karakteristike.

8.1. UVOD

Pojav lokalizacije valov igra pomembno vlogo v dinamiki heterogenih materialov in struktur. Na primer, linearni pretvorniki, ki temeljijo na tem učinku, se pogosto uporabljajo v medicinskem ultrazvočnem slikanju [108]. Lokalizacija valov je lahko pomembna pri študiju stabilnosti vlakov in vlakom podobnih zgibnih sistemov [394]. Lokalizacija valov v solarnih panelih je pomembna tudi z inženirskega vidika [161]. Kompozitni materiali, ki so zasnovani kot periodične strukture, v praksi nikoli niso povsem periodični zaradi naključno porazdeljenih defektov in napak pri izdelavi. Odstopanje od idealne periodičnosti je znano kot motnja, ki lahko vodi do učinka lokalizacije valov.

Ta učinek ima pomembno vlogo v dinamičnih odzivih materialov in struktur. Lokalna perturbacija lastnosti dinamičnega sistema (prisotnost defektov, razpok, lukenj, vključkov itd.) vodi do koncentracije energije. Pod določenimi pogoji lahko povzroči lokalizirane nihajne načine v obliki stojnih valov z ničelno skupinsko hitrostjo. V tem primeru je vsa energija koncentrirana v bližini perturbiranega elementa in z oddaljenostjo od elementa eksponentno upada.

Lokalizacija valov lahko povzroči lokalno izgubo stabilnosti struktur in povzroči njihovo odpoved. Hkrati ta učinek omogoča projektantu nadzor porazdelitve dinamičnih obremenitev, ki se lahko uporabijo za ustvarjanje dušilcev tresljajev in za zmanjšanje amplitude tresljajev v najbolj kritičnih delih sistema. Lokalizirani nihajni načini igrajo pomembno vlogo v metodah akustične diagnostike, ki jih uporabljamo za odkrivanje različnih defektov.

Lokalizacije valov v mrežah so analizirane v številnih raziskavah. Omenimo pregledni članek [295] in knjigo [441], kjer je precej pozornosti namenjene konstrukciji asimptotičnih rešitev v zveznem limitnem prehodu. Homogenizacija in visokofrekvenčna asimptotika sta uporabljeni za opis lokalizacije v enodimenzionalnih mrežah v [131, 339]. Lokalizacija valov v 2D mrežah je obravnavana v [127]. Preučevanje lokalizacije valov v mrežah omogoča sklepanje, ki je skupno vsem periodičnim linearnim sistemom. To pomeni, da se pojav lokalizacije valov lahko pojavi pod naslednjimi pogoji: (i) frekvenčni spekter periodične strukture vključuje zaporne pasove, (ii) zaradi defekta je prekinjena periodičnost strukture (perturbacija periodičnosti) in (iii) lastna frekvenca okvarjenega elementa se premakne v zaustavitveni pas. Potem se lahko energija prostorsko lokalizira v bližini defekta z eksponentnim upadanjem proti neskončnosti.

V nadaljevanju simuliramo defekte z lokalno spremembo lastnosti materiala ali volumskih deležev komponent kompozitnega materiala.

Lokalizacija valov v kompozitnih materialih je skupaj z lokalizacijo valov v mrežah pritegnila pozornost raziskovalcev. V linearnem primeru je eden najpogostejših pristopov metoda prenosnih matrik [105, 107, 240, 283, 363, 364, 464, 466]. Drug možen pristop je diskretizacija izvirnega zveznega sistema in nato uporaba rezultatov, dobljenih za mrežne strukture [67, 127, 280, 281, 465]. Bloch-Floquetovi valovi, ki se širijo v dvojno periodičnih kompozitnih strukturah z visokokontrastnimi vmesniki in defekti končne velikosti, so preučeni v [325].

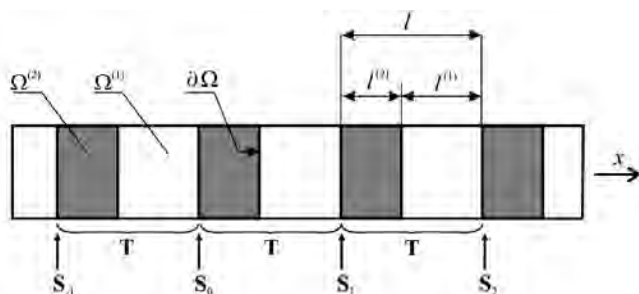
V [218] so formulirani osnovni principi lokalizacije linearnih valov v zveznih medijih z defekti in vključki. Z matematičnega vidika so za probleme, obravnavane v [218], značilne diskretne lastne vrednosti problemov z robnimi pogoji za operatorje.

V [3] je na primeru odtrganja strune od elastične podpore prikazana možnost lokaliziranih nihanj in analiziran vpliv te lokalizacije na povečanje razslojene cone. Homogenizacija z uporabo dveh skal je uporabljena v [423] za raziskovanje širjenja in lokalizacije elastičnih valov v periodičnih elastičnih kompozitih z visoko kontrastnimi fazami in visoko anizotropnimi togostmi za vzdolžne pomike. Različni modeli, ki opisujejo poškodovano plast v periodično slojevitih kompozitih, so preučeni v [188]. Perturbacijska metoda je bila uporabljena v [363] za analizo lokalizacije nihanj v nepravilno urejenih strukturah.

8.2. LOKALIZACIJA VALOV V VEČSLOJNEM KOMPOZITNEM MATERIALU: METODA PRENOSNE MATRIKE

Najprej obravnavamo najpreprostejši problem, ki omogoča elementarno numerično rešitev. To omogoča prepoznavanje pomembnih značilnosti obnašanja takih sistemov in poenostavitev nadaljnjih preiskav.

Oglejmo si kompozitni material, sestavljen iz izmenjujočih se slojev dveh različnih komponent $\Omega^{(1)}$ in $\Omega^{(2)}$ (glej sliko 8.1).



Slika 8.1. Večslojni kompozitni material [ponatisnjeno z dovoljenjem John Wiley and Sons].

Izvirna valovna enačba je:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (8.1)$$

kjer sta λ , μ Lamé-jevi konstanti, ρ je masna gostota, u je vzdolžni pomik.

Zaradi heterogenosti medija sta Lamé-jevi konstanti λ , μ in masna gostota ρ predstavljeni z delno zveznimi funkcijami koordinat:

$$\lambda(x) = \lambda^{(a)}(x), \quad \mu(x) = \mu^{(a)}(x), \quad \rho(x) = \rho^{(a)} \quad \text{pri} \quad x \in \Omega^{(a)}. \quad (8.2)$$

Tu in v nadaljevanju so z zgornjim indeksom (a) označene različne komponente strukture, $a = 1, 2$.

Enačbi (8.1), (8.2) vsebujeta delta funkcije, zato rešitev te enačbe obravnavamo v omejenem smislu [275].

Enačbo (8.1) lahko zapišemo v enakovredni obliki:

$$\left(\lambda^{(a)} + 2\mu^{(a)} \right) \frac{\partial^2 u^{(a)}}{\partial x^2} = \rho^{(a)} \frac{\partial^2 u^{(a)}}{\partial t^2}, \quad a = 1, 2. \quad (8.3)$$

Na mejni plasti $\delta\Omega$ predpostavimo popolne prestopne pogoje, ki ustrezajo kontinuiteti pomikov $u^{(a)}$ in napetosti $\sigma^{(a)}$:

$$\left\{ u^{(1)} = u^{(2)} \right\} \Big|_{\partial\Omega}, \quad \left\{ \sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} \right\} \Big|_{\partial\Omega}, \quad (8.4)$$

kjer je $\sigma^{(a)} = (\lambda^{(a)} + 2\mu^{(a)}) \frac{\partial u^{(a)}}{\partial x}$.

Uporabimo pristop prenosne matrike [87]. Ta pristop je zelo učinkovit, če je celoten sistem mogoče razdeliti na zaporedje podsistemov, od katerih vsak sodeluje z dvema sosednjima podsistemoma. Temelji na naslednji preprosti zamisli. Če so pomiki in napetosti znani na začetku sloja, se lahko pomiki in napetosti na koncu sloja izpeljejo s preprosto matrično operacijo. Sistem slojev lahko predstavimo s sistemsko matriko, ki je produkt matrik posameznih slojev. Zadnji korak metode vključuje pretvorbo sistemske matrike v disperzijske relacije. V našem primeru imamo:

$$S_n = \mathbf{T} S_{n-1}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.5)$$

Tukaj je $S_n = \begin{Bmatrix} u_n \\ \sigma_n \end{Bmatrix}$ vektor stanja, $\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{Bmatrix}$ je prenosna matrika, $u_n(t) = u^{(1)}(nl, t)$, $\sigma_n(t) = \sigma^{(1)}(nl, t)$. Rešitve enačb (8.3) iščemo v obliki:

$$u^{(a)} = \left[A^{(a)} \exp(-ik^{(a)}x) + B^{(a)} \exp(ik^{(a)}x) \right] \exp(i\omega t), \quad (8.6)$$

kjer je $k^{(a)} = \omega \sqrt{\rho^{(a)} / (\lambda^{(a)} + 2\mu^{(a)})}$, $k^{(a)}$ so valovna števila, ω je frekvenca.

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{(1)} \mathbf{T}^{(2)}, \quad (8.7)$$

kjer so

$$\begin{aligned} T_{11}^{(a)} = T_{22}^{(a)} &= \cos(k^{(a)}l^{(a)}), & T_{12}^{(a)} &= \frac{\sin(k^{(a)}l^{(a)})}{(\lambda^{(a)} + 2\mu^{(a)})k^{(a)}}, \\ T_{21}^{(a)} &= -(\lambda^{(a)} + 2\mu^{(a)})k^{(a)} \sin(k^{(a)}l^{(a)}). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Za izpeljavo disperzijske enačbe proučimo širjenje efektivnega harmoničnega valovanja. vzdolžne pomike lahko predstavimo kot sledi [98]:

$$u = U_0 \exp(ikx) \exp(i\omega t), \quad (8.9)$$

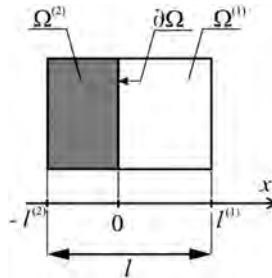
kjer je k efektivno valovno število.

Določimo sedaj efektivno valovno število k z izenačenjem izrazov (8.9) in (8.6). Razmerje pomikov na nasprotnih straneh periodično ponavljajoče se enotske celice (glej sliko 8.2) je mogoče izračunati na naslednji način:

$$u_n/u_{n-1} = \Lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{T}) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{T})\right]^2 - 1}, \quad (8.10)$$

kjer $\operatorname{tr}(\cdot)$ označuje sled matrike, $\operatorname{tr}(\mathbf{T}) = T_{11}^{(1)}T_{11}^{(2)} + T_{12}^{(1)}T_{21}^{(2)} + T_{21}^{(1)}T_{12}^{(2)} + T_{22}^{(1)}T_{22}^{(2)}$ ali

$$\sin(k^{(1)}l^{(1)})\sin(k^{(2)}l^{(2)}) \left[\frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})k^{(2)}}{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})k^{(1)}} + \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})k^{(1)}}{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})k^{(2)}} \right]. \quad (8.11)$$



Slika 8.2. Enotska celica večslojnega kompozitnega materiala [ponatisnjeno z dovoljenjem John Wiley and Sons].

Disperzijska enačba je

$$\exp(ikl) = \Lambda_{1,2}. \quad (8.12)$$

Za identifikacijo pasovnih vrzeli lahko uporabimo naslednje pogoje:

- prepustni pasovi

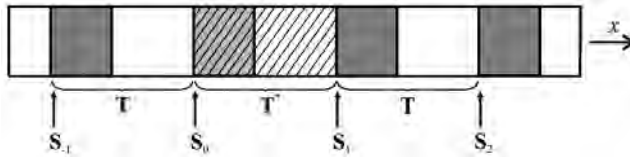
$$k \in \operatorname{Re}, \quad |\operatorname{tr}(\mathbf{T})| < 2, \quad (8.13)$$

- zaustavitveni pasovi

$$k \in \operatorname{Im}, \quad |\operatorname{tr}(\mathbf{T})| > 2, \quad (8.14)$$

Predpostavimo sedaj, da ima večslojni kompozit defektno enotsko celico (glej sliko 8.3). Za določitev lokalizacijskega valovnega števila k velja naslednji pogoj:

$$2 \cos(k^{(1)}l^{(1)})\cos(k^{(2)}l^{(2)}) - \sin(k^{(1)}l^{(1)})\sin(k^{(2)}l^{(2)}) \left[\frac{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})k^{(2)}}{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})k^{(1)}} + \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})k^{(1)}}{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})k^{(2)}} \right] = \pm 2. \quad (8.15)$$



Slika 8.3. Večslojni kompozit z defektno enotsko celico (zasenčeno) [ponatisnjeno z dovoljenjem John Wiley and Sons].

Iz enačbe (8.15) dobimo: $k = 0, \pi/l$.

Za določitev frekvence lokalizacije ω^* se uporablja disperzijska enačba za defektno enotsko celico:

$$\text{tr}(\mathbf{T}^*) = \pm 2 \quad \text{pri} \quad k = 0, \quad \pi/l, \quad (8.16)$$

kjer je \mathbf{T}^* prenosna matrika za celico z defektom.

V primeru lokalizacije valovanja lahko rešitev za celotno strukturo zapišemo takole:

$$u = U_0 \exp[i(k + i\alpha)x] \exp(i\omega^* t), \quad (8.17)$$

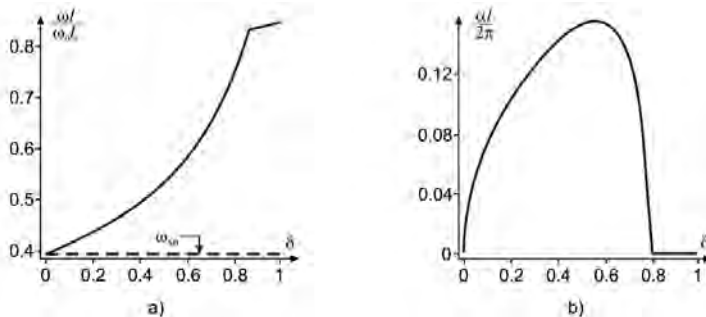
kjer je α faktor oslabitve.

Disperzijska enačba za navadno enotsko celico se uporablja za določitev α :

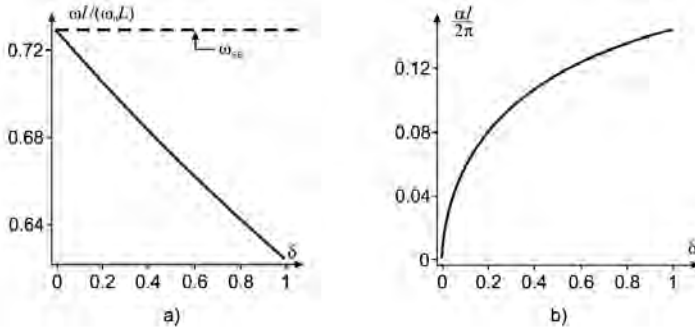
$$\exp[i(k + i\alpha)l] = \Lambda_{1,2} \quad \text{pri} \quad \omega = \omega^*. \quad (8.18)$$

Oglejmo si rezultate izračuna enačb (8.16), (8.18) za jekleno-aluminijev kompozit, za katerega so značilne naslednje vrednosti parametrov: volumski deleži $c^{(a)} = l^{(a)}/l$ komponent so enaki $c^{(1)} = c^{(2)} = 0,5$, elastična koeficienta $\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} = 112$ GPa in $\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} = 275$ GPa, masni gostoti $\rho^{(1)} = 2700$ kg/m³ in $\rho^{(2)} = 7800$ kg/m³.

Proučevali bomo vpliv različnih parametrov defektne celice na lokalizacijo valov. Najprej upoštevamo perturbacijo gostote okvarjene celice: $\rho^{(2)*} = \rho^{(2)}(1 - \delta)$, $\rho^{(2)*} < \rho^{(2)}$. Parameter $\delta \leq 1$ označuje stopnjo perturbacije. Numerični rezultati, prikazani na sliki 8.4, kažejo, da zmanjševanje masne gostote $\rho^{(2)}$ povzroči lokalizacijo na začetku prvega zaustavitvenega pasu z $\omega > \omega_{SB}$. Tu in v nadaljevanju ω_0 označuje frekvenco prvotne popolnoma periodične strukture; ω_{SB} označuje frekvenco prvega zaustavitvenega pasu. Povečanje masne gostote $\rho^{(2)}\rho^{(2)*} = \rho^{(2)}(1 + \delta)$, $\rho^{(2)*} > \rho^{(2)}$ povzroči lokalizacijo na koncu prvega zaustavitvenega pasu (glej sliko 8.5) z $\omega < \omega_{SB}$.

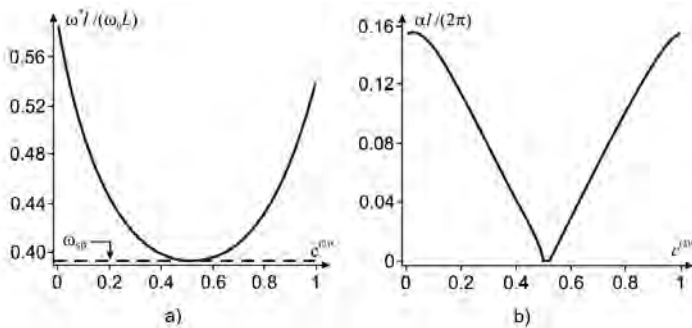


Slika 8.4. Lokalizacija valov na začetku prvega zaustavitvenega pasu, ki jo povzroči zmanjšanje gostote celice z defektom: a) frekvenca lokalizacije, b) faktor oslabitve [ponatisnjeno z dovoljenjem John Wiley and Sons].

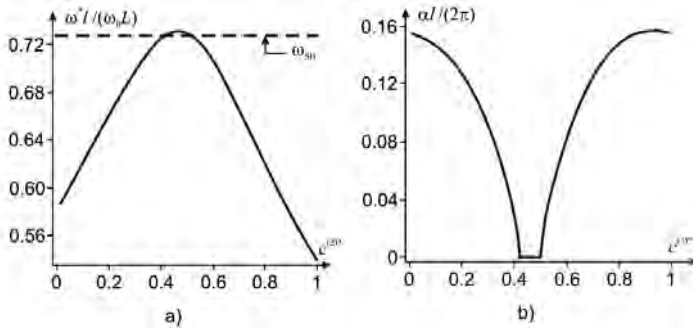


Slika 8.5. Lokalizacija valov na koncu prvega zaustavitvenega pasu, ki jo povzroči zmanjšanje gostote celice z defektom: a) frekvenca lokalizacije, b) faktor oslabitve [ponatisnjeno z dovoljenjem John Wiley and Sons].

Perturbacija volumskega deleža vključkov vodi do lokalizacije na začetku prvega zaustavitvenega pasu z $\omega > \omega_{SB}$ (glej sliko 8.6) ali na koncu prvega zaustavitvenega pasu z $\omega < \omega_{SB}$ (glej sliko 8.7). Volumski deleži komponent celice z defektom so definirani kot $c^{(1)*}$, $c^{(2)*}$, pri čemer je $c^{(1)*} + c^{(2)*} = 1$.



Slika 8.6. Lokalizacija valov na začetku prvega zaustavitvenega pasu, ki jo povzroči perturbacija volumskega deleža vključka: a) frekvenca lokalizacije, b) faktor oslabitve [ponatisnjeno z dovoljenjem John Wiley and Sons].



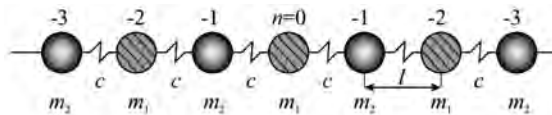
Slika 8.7. Lokalizacija valov na koncu prvega zaustavitvenega pasu, ki jo povzroči perturbacija volumskega deleža vključka: a) frekvenca lokalizacije, b) faktor oslabitve [ponatisnjeno z dovoljenjem John Wiley and Sons].

8.3. LOKALIZACIJA VALOV V VEČSLOJNEM KOMPOZITNEM MATERIALU: MREŽNI PRISTOP

Metoda prenosne matrike omogoča natančno rešitev, vendar zahteva uporabo računalnika. V tem razdelku bomo izpeljali približno analitično rešitev. V ta namen zamenjamo večslojni kompozit (glej sliko 8.1) z dvoatomsko verigo (glej sliko 8.8) po shemi, opisani v [326]. Disperzijsko enačbo za 1D kompozit (8.12) lahko zapišemo na naslednji način

$$\cos(kl) = \cos \Omega \cos(\Omega \tau) - \frac{\xi^2 + 1}{2\xi} \sin \Omega \sin(\Omega \tau), \quad (8.19)$$

kjer so $\Omega = \frac{\omega l^{(1)}}{c_1}$, $\tau = \frac{l^{(2)} c_1}{l^{(1)} c_2}$, $\xi = \frac{\sqrt{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) \rho^{(1)}}}{\sqrt{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \rho^{(2)}}}$, $C_i = \sqrt{\frac{\lambda^{(i)} + 2\mu^{(i)}}{\rho^{(i)}}}$.



Slika 8.8. Dvoatomska mreža [ponatisnjeno z dovoljenjem John Wiley and Sons].

S fizikalnega vidika je jasno, da bi morala biti dinamika večslojnega kompozita z ozkimi togimi sloji ($x \gg 1$, $\tau \ll 1$) za dovolj nizke frekvence z nekaterimi parametri blizu dinamiki dvoatomske mreže. Uporabljamo asimptotični pristop za izračun teh parametrov. Uporaba Maclaurinove vrste v potencah Ω do drugega reda na desni strani enačbe (8.19) (ξ in t imata red 1) nam da

$$A_1 \omega^4 - A_2 \omega^2 + 2[1 - \cos(kl)] = 0, \quad (8.20)$$

kjer sta

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{12} \left(\frac{l^{(1)}}{C_1} \right)^4 \left(1 + 2\xi\tau + 6\tau^2 + 2\xi\tau^3 + 2\frac{\tau}{\xi} \right), \\
 A_2 &= \left(\frac{l^{(1)}}{C_1} \right)^2 \left(1 + \xi\tau + \tau^2 + \frac{\tau}{\xi} \right).
 \end{aligned}
 \tag{8.21}$$

V izrazih (8.21) upoštevamo člene do drugega reda v t in $1/\xi$.

Zdaj pa si oglejmo neskončno mrežo, sestavljeno iz izmeničnih mas m_1 in m_2 (glej sliko 8.8). Disperzijsko enačbo za dvoatomsko mrežo lahko zapišemo na naslednji način [326]

$$\frac{4}{\omega_1^2 \omega_2^2} \omega^4 - 4 \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \right) \omega^2 + 2[1 - \cos(kl)] = 0,
 \tag{8.22}$$

kjer je $\omega_i = \sqrt{2c/m_i}$, $i = 1, 2$, c je togost vzmeti, k je valovno število.

Parametri mrežnega modela so določeni na osnovi naslednjega pogoja: enačba (8.20), ki opisuje dinamično obnašanje kompozitnega materiala, mora ustrezati disperzijski enačbi dvoatomske mreže.

S primerjavo enačb (8.20) in (8.22) dobimo

$$\omega_1^2 \omega_2^2 = \frac{4}{A_1}, \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{A_2}{A_1},
 \tag{8.23}$$

kjer sta $\omega_{1(2)}^2 = (A_2 - \sqrt{A_2^2 - 16A_1}) / (2A_1)$ in $\omega_{2(1)}^2 = (A_2 + \sqrt{A_2^2 - 16A_1}) / (2A_1)$.

Mrežni pristop, opisan z enačbami (8.22), (8.23), lahko uporabimo za ocenjevanje parametrov lokalizacije valov v 1D kompozitih, glej razdelke 7.4 – 7.6. Tako na primer, lahko upoštevamo perturbacijo gostote celice: z defektom $\rho^{(2)*} = \rho^{(2)}(1 - \delta)$. V tem primeru je $kl = 2\pi$, z uporabo razdelkov 7.4 – 7.6 definiramo lokalizacijsko frekvenco ω^* in faktor oslavitve α :

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega^{*2}}{\omega_1^2 + \omega_2^2} &= \frac{\lambda(1 - \delta^2) + 2 + \sqrt{\lambda^2(1 - \delta^2)^2 + 4\delta^2}}{2(1 + \lambda)(1 - \delta^2)}, \\
 \alpha &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\lambda(1 - \delta)^2}{2\delta + \sqrt{\lambda^2(1 - \delta^2)^2 + 4\delta^2}} \right],
 \end{aligned}
 \tag{8.24}$$

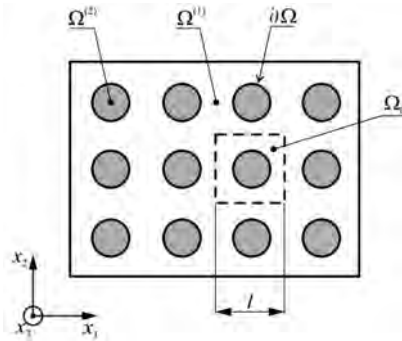
kjer je $\lambda = \omega_1^2 / \omega_2^2$.

8.4. IZVENRAVNINSKO STRIŽNO VALOVANJE V VLKNASTEM KOMPOZITU

Zdaj pa si oglejmo 2D problem. Proučujemo namreč transverzalno izvenravninsko strižno valovanje, ki se širi v ravnini x_1x_2 skozi regularno strukturo, sestavljeno iz prostorsko neskončne elastične matrike $\Omega^{(1)}$ in elastičnih vključkov $\Omega^{(2)}$ (glej sliko 8.9). Izvirna 2D valovna enačba je (glej razdelek 3.1):

$$\nabla(\mu \nabla u) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},
 \tag{8.25}$$

kjer je $\nabla = \mathbf{e}_1 \partial / \partial x_1 + \mathbf{e}_2 \partial / \partial x_2$, u je pomik v smeri x_3 , \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2 sta enotska kartezična vektorja.



Slika 8.9. Kompozitni material z vlakni [ponatisnjeno z dovoljenjem John Wiley and Sons].

Zaradi heterogenosti medija sta Lamé-jeva konstanta μ in masna gostota ρ predstavljena z delno zveznimi funkcijami koordinat:

$$\mu(\mathbf{x}) = \mu^{(a)}, \quad \rho(\mathbf{x}) = \rho^{(a)} \quad \text{za} \quad \mathbf{x} \in \Omega^{(a)}, \quad a = 1, 2, \quad \mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2. \quad (8.26)$$

Enačbo (8.25) lahko zapišemo v enakovredni obliki:

$$\mu^{(a)} \nabla^2 u^{(a)} = \rho^{(a)} \frac{\partial^2 u^{(a)}}{\partial t^2}, \quad (8.27)$$

$$\left\{ u^{(1)} = u^{(2)} \right\}_{\partial\Omega}, \quad \left\{ G^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} = G^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} \right\}_{\partial\Omega}, \quad (8.28)$$

kjer je $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$, $\partial / \partial \mathbf{n}$ je odvod v smeri normale na konturo $\partial\Omega$.

Iz fizikalnega vidika enačbe (8.28) pomenijo popolne prestopne pogoje na vmesniku $\partial\Omega$.

Po Floquet-Blochovem izreku (glej razdelek 2.3) je harmonično valovanje, ki se širi skozi periodično strukturo, predstavljeno v obliki:

$$u = F(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \exp(i\omega t), \quad (8.29)$$

kjer je $F(\mathbf{x})$ prostorsko periodična funkcija, $F(x_{1,2}) = F(x_{1,2} + l)$, \mathbf{k} je valovni vektor, $\mathbf{k} = k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2$.

Opozoriti je treba, da 1D rešitev, ki temelji na pristopu reševanja s prenosno matriko, ne more opisati širjenja valov v 2D kompozitnem materialu. Pri 2D problemu moramo upoštevati spremenljivost napetostno-deformacijskega stanja ne le v smeri širjenja valov (ki jo določa vektor \mathbf{k}), temveč tudi v pravokotni smeri. Slednje je posledica heterogenosti medija in vpliva tudi na valovne lastnosti.

Zato je treba uvesti 2D opis napetostno-deformacijskega stanja. V ta namen uporabljamo metodo ravninskih razširitev [266, 411]. Funkcija $F(\mathbf{x})$ in lastnosti materiala $\mu(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$ so izražene z neskončnimi Fourierjevimi vrstami:

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{x}) &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} F_{n_1 n_2} \exp \left[i \frac{2\pi}{l} (n_1 x_1 + n_2 x_2) \right], \\
\mu(\mathbf{x}) &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \mu_{n_1 n_2} \exp \left[i \frac{2\pi}{l} (n_1 x_1 + n_2 x_2) \right], \\
\rho(\mathbf{x}) &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \rho_{n_1 n_2} \exp \left[i \frac{2\pi}{l} (n_1 x_1 + n_2 x_2) \right],
\end{aligned} \tag{8.30}$$

kjer sta

$$\begin{aligned}
\mu_{k_1 k_2} &= \frac{1}{l^2} \iint_{\Omega_0} \mu(\mathbf{x}) \exp \left[-i \frac{2\pi}{l} (k_1 x_1 + k_2 x_2) \right] dx_1 dx_2, \\
\rho_{k_1 k_2} &= \frac{1}{l^2} \iint_{\Omega_0} \rho(\mathbf{x}) \exp \left[-i \frac{2\pi}{l} (k_1 x_1 + k_2 x_2) \right] dx_1 dx_2.
\end{aligned} \tag{8.31}$$

in operator $\iint_{\Omega_0} (\cdot) dx_1 dx_2$ označuje integracijo preko enotske celice Ω_0 (glej sliko 8.9).

Če zamenjamo izraz (8.29) in razširitve (8.30) v valovni enačbi (8.25) ter zberemo koeficiente pri členih $\exp[i2\pi l^{-1}(j_1 x_1 + j_2 x_2)]$, $j_1, j_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, dobimo neskončni sistem linearnih algebraičnih enačb za neznanne koeficiente $F_{n_1 n_2}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} F_{n_1 n_2} \left\{ \mu_{j_1 - n_1, j_2 - n_2} \left[\left(\frac{2\pi}{l} n_1 + k_1 \right) \left(\frac{2\pi}{l} j_1 + k_1 \right) + \right. \right. \\
\left. \left. + \left(\frac{2\pi}{l} n_2 + k_2 \right) \left(\frac{2\pi}{l} j_2 + k_2 \right) \right] - \rho_{j_1 - n_1, j_2 - n_2} \omega^2 \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{8.32}$$

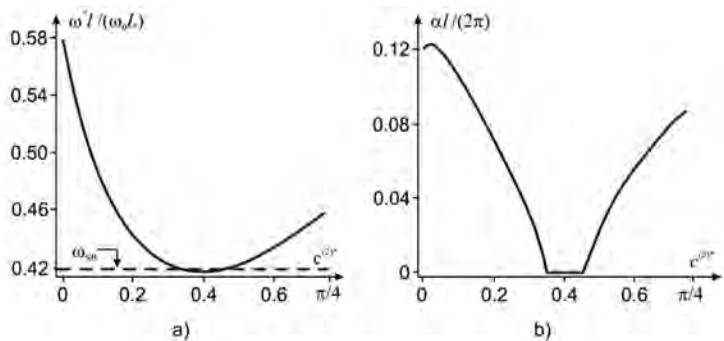
Sistem (8.32) dopušča netrivialno rešitev, če in samo če je determinanta matrike $(F_{n_1 n_2})$ enaka nič, tj.

$$\det(F_{n_1 n_2}) = 0. \tag{8.33}$$

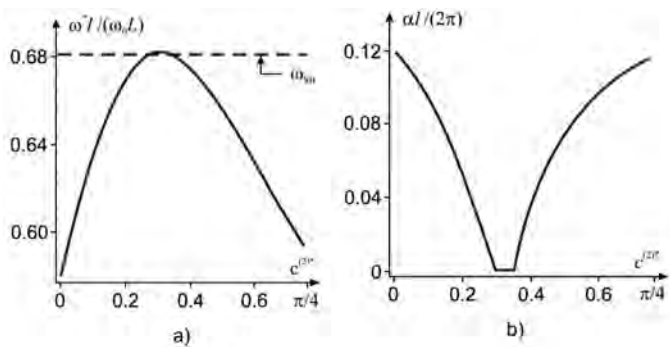
Disperzijsko enačbo (8.33) za ω in \mathbf{k} lahko približno rešimo z okrnitvijo neskončnega sistema (8.32) ob predpostavki $-j_{\max} \leq j_s \leq j_{\max}$. Iz fizikalnega vidika taka okrnitev pomeni odstranitev višjih frekvenc iz frekvenčnega spektra.

Zdaj pa predpostavimo, da kompozitni material vsebuje defektno enotsko celico, katere lastnosti se razlikujejo od drugih celic. Za napoved lokalizacijskega učinka najprej uporabimo enačbo (8.33) za defektno enotsko celico, nato pa še za navadno (regularno) enotsko celico. Enačba (8.33) za defektno enotsko celico določa frekvenco lokalizacije, za navadno enotsko celico pa koeficient oslabitve. Oglejmo si numerične rezultate za kompozit nikelj-aluminij, za katerega so značilne naslednje vrednosti parametrov: volumski delež vključka niklja $c^{(2)} = 0,35$, Lamé-jevi konstanti komponent sta $\mu^{(1)} = 28$ GPa in $\mu^{(2)} = 75$ GPa, masni gostoti komponent sta $\rho^{(1)} = 2700$ kg/m³ in $\rho^{(2)} = 8940$ kg/m³.

Analizirajmo vpliv perturbacije volumskega deleža vlakna v defektni celici. Ta perturbacija lahko privede do lokalizacije valovanja na začetku prvega zaustavitvenega pasu z $\omega > \omega_{SB}$ (glej sliko 8.10) kot tudi na koncu prvega zaustavitvenega pasu z $\omega < \omega_{SB}$ (glej sliko 8.11).



Slika 8.10. Lokalizacija valov na začetku prvega zaustavitvenega pasu, ki jo povzroča perturbacija volumskega deleža vlakna: a) frekvenca lokalizacije, b) faktor oslabitve [ponatisnjeno z dovoljenjem John Wiley and Sons].



Slika 8.11. Lokalizacija valov na koncu prvega zaustavitvenega pasu, ki jo povzroča perturbacija volumskega deleža vlakna: a) frekvenca lokalizacije, b) faktor oslabitve [ponatisnjeno z dovoljenjem John Wiley and Sons].

9 Nelinearna nihanja viskoelastičnih heterogenih trdnin končne velikosti: notranje resonance in interakcije nihajnih načinov

V tem poglavju preučujemo nelinearna nihanja večslojnih viskoelastičnih trdnin. Predlagana je makroskopska valovna enačba, ki upošteva lastnosti mikrostrukture. Z uporabo razvitega modela je analiziran medsebojni vpliv med učinki nelinearnosti in disipacije. Omogoča napovedovanje vpliva viskoznega dušenja na sklopitev nihajnih načinov in utemeljuje okrnitev prvotnega neskončnega sistema na končno število nihajnih načinov vodilnega reda. Raziskana je tudi interakcija med učinki nelinearnosti in disipacijo. Ugotovili smo, da je v primeru povsem elastičnega materiala lahko neskončno število nihajnih načinov povezanih z nelinearnimi notranjimi resonancami. Posledica tega je periodični prenos energije med različnimi načini in samovzbujanje načinov višjega reda. Zato je okrnitev na načine z neničelno začetno energijo prepovedana.

9.1. UVOD

Realni materiali in strukture nikoli niso popolnoma elastični. Pri dinamičnih problemih se del mehanske energije zaradi notranjega trenja vedno pretvori v toploto. Disipativno obnašanje heterogenih trdnih snovi je lahko določeno z različnimi dejavniki, kot so lastnosti komponent, značilnosti mikrostrukture, pogoji vezave na vmesniku "matrica-vključitev" in tako naprej [62, 158, 304, 369]. V tem poglavju obravnavamo fenomen, pri katerem je disipacija energije posledica izkazovanja viskoelastičnih lastnosti komponent, kar je značilno na primer za materiale na osnovi polimerov.

Viskoelastične lastnosti medija je mogoče preučevati z dobro poznanim Kelvin-Voigtovim modelom (glej na primer [177]). V hidrodinamiki ustreza klasičnemu obnašanju viskoznega plina, kjer so strižne napetosti sorazmerne s hitrostjo deformacije, koeficienti sorazmernosti pa so določeni z gostoto plina. Za trdne snovi je mogoče Kelvin-Voigtov model naravno izpeljati iz mrežnega modela s prehodom na zvezno mejo in ob predpostavki, da so interakcijske sile med sosednjimi delci odvisne od hitrosti spremembe razdalje in ne od same razdalje [304].

Palmov [343,344] je preučeval nelinearna nihanja polneskončnih in končnih palic, ki so bile izpostavljene disipaciji. Uporabil je metodo harmonične linearizacije, ki je dala aproksimacijo prvega reda, ki sovpada z Rayleigh-Ritzovim pristopom. Pridobljene in analizirane so bile enačbe, ki vsebujejo odvisnosti od počasnih spremenljivk. Visokofrekvenčne deformacije materialov, odvisnih od nelinearne hitrosti, ki jih povzročajo širjenje prehodnega valovanja, so obravnavali Varley in Rogers [445] ter Seymour in Varley [404]. Mortell in Varley [323] sta obravnavala nelinearno elastično valovanje v telesih končne velikosti in proučevala dinamični odziv viskoelastične palice, izpostavljene impulzni obremenitvi [322]. V približku prvega reda je bila rešitev razvita kot superpozicija dveh moduliranih valov, ki potujeta v nasprotnih smereh in ne delujeta drug na drugega.

Nihanja zveznih struktur lahko opišemo z dinamičnimi sistemi, ki imajo neskončno število prostostnih stopenj. Nelinearnost vodi do lokalizacije energije in njenega prenosa iz nizkofrekvenčnega v visokofrekvenčni del spektra in obratno. Nihajne oblike so lahko nato vključene v zapletene interakcije, kar povzroči notranje resonance in samovzbujanje načinov

višjega reda. V takem primeru okrnitev na načine z začetno energijo, ki ni ničelna (kar je običajno uporabno pri linearnih problemih), ni mogoča in je treba upoštevati vse resonančne načine.

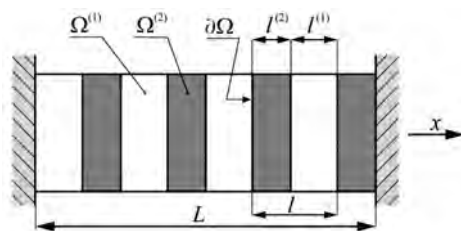
Učinki sklopitve nihajnih oblik in notranje resonance so pritegnili precejšnje pozornost mnogih avtorjev. Dobljeni so bili številni rezultati za nihanja homogenih struktur in numerični [383] ter asimptotični [24, 84, 85, 293, 331] pristopi so bili široko uporabljeni. Vendar je bilo nelinearno dinamično obnašanje heterogenih trdnih snovi preučeno v bistveno manjšem obsegu.

Šele pred kratkim so enodimenzionalna nihanja mikrostrukturiranih palic obravnavali Andrianov [21] in soavtorji v primerih nelinearno elastičnega zunanega medija ter geometrijske in fizikalne nelinearnosti. Heterogenost povzroči disperzijo energije in tako kompenzira vpliv nelinearnosti. Ko se prostorsko območje nihajnih načinov zmanjša in se približa velikosti mikrostrukture, so notranje resonance zatrite in okrnitev na le nekaj nihajnih načinov vodilnega reda je lahko upravičena.

Opozoriti je treba, da disipacija omejuje prenose energije med nihajnimi načini in na večji časovni skali povezovanje nihajnih načinov izgine. V tem smislu lahko disperzija in disipacija, ki delujeta v nelinearnem sistemu, povzročita kvalitativno podobne fizikalne posledice (Zabusky in Kruskal [468] sta naletela na to analogijo pri analizi problema FPU, glej tudi [456]).

9.2. VHODNI PROBLEM IN HOMOGENIZIRANA DINAMIČNA ENAČBA

Oglejmo si heterogeno trdno snov, sestavljeno iz periodično ponavljajočih se viskoelastičnih slojev $\Omega^{(1)}$ in $\Omega^{(2)}$ (glej sliko 9.1). Proučevali bomo naravna vzdolžna nihanja v smeri x . Ta model lahko opiše lastnosti laminiranih kompozitnih materialov, fononskih kristalov in akustičnih diod (glej na primer reference [217, 282, 317]). Upoštevajmo, da se večslojne strukture uporabljajo v inženirskih aplikacijah za načrtovanje naprav za nadzor nihanj in zvoka [216].



Slika 9.1. Obravnavana periodično heterogena trdna snov [ponatisnjeno z dovoljenjem Elsevierja].

Mehansko obnašanje vsakega sloja $\Omega^{(i)}$ opisuje Kelvin-Voigtov model [177], ki vključuje elastično vzmet z vzporedno povezano viskozno dušilko. Predpostavlja se, da so lastnosti dušilke linearne, vzmet pa izkazuje nelinearen odziv. Geometrijska nelinearnost je upoštevana s pomočjo Cauchy-Greenovega deformacijskega tenzorja, fizikalna nelinearnost pa je

modelirana s pomočjo Murnaghanovega elastičnega potenciala (glej poglavje 4.1). Časovno odvisna vzdolžna napetost $\sigma^{(i)}$ je podana z izrazom

$$\sigma^{(i)} = \alpha^{(i)} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} + \frac{\beta^{(i)}}{2} \left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \nu^{(i)} \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x \partial t}, \quad (9.1)$$

kjer so $u^{(i)}$ pomiki, $\alpha^{(i)}$ in $\beta^{(i)}$ sta elastična koeficienta, pri čemer $\alpha^{(i)} = \lambda^{(i)} + 2\mu^{(i)}$, $\beta^{(i)} = 3(\lambda^{(i)} + 2\mu^{(i)}) + 2(A^{(i)} + 2B^{(i)} + C^{(i)})$, $\lambda^{(i)}$ in $\mu^{(i)}$ sta Lamé-jevi elastični konstanti, $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ in $C^{(i)}$ so Landaujeve elastične konstante, $\nu^{(i)}$ je viskoznost.

Tu in v nadaljevanju se zgornji indeksi (i) , $i = 1, 2$ nanašajo na različne komponente $\Omega^{(1)}$, oz. $\Omega^{(2)}$ medija.

Vodilna dinamična enačba je naslednja

$$\left(\alpha^{(i)} + \nu^{(i)} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x^2} + \beta^{(i)} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x^2} = \rho^{(i)} \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial t^2}, \quad (9.2)$$

kjer je $\rho^{(i)}$ masna gostota.

Na vmesniku $\delta\Omega$ predpostavimo pogoje popolne vezave, ki pomenijo kontinuiteto polj pomikov in napetosti:

$$u^{(1)} = u^{(2)}, \quad \sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} \quad \text{at} \quad \partial\Omega. \quad (9.3)$$

Predpostavimo, da je značilna velikost l mikrostrukture bistveno manjša od prostorske periode L_n obravnavanega nihajnega načina. S tem lahko vhodni problem (9.2), (9.3) nadomestimo s homogenizirano dinamično enačbo naslednje oblike

$$\left(\langle \alpha \rangle + \langle \nu \rangle \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \langle \beta \rangle \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \langle \rho \rangle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (9.4)$$

kjer je u polje makroskopskega pomika in $\langle \cdot \rangle$ označuje homogenizirane (tako imenovane efektivne) lastnosti medija.

Enačba (9.4) predstavlja aproksimacijo vodilnega reda $O(\eta^0)$, kjer $\eta = l/L \ll 1$ pomeni majhen naravni parameter. Opazimo, da bo upoštevanje členov višjega reda v potencah η v enačbi (9.4) vodilo do dodatnih členov z visokim gradientom, ki opisujejo disperzijo energije nihanj v mikrostrukturi. Homogenizirani modeli višjega reda so bili obravnavani v poglavju 4.3. V tem poglavju se osredotočamo na disipacijo ter opravljeno analizo omejimo samo na približek $O(\eta^0)$.

Efektivna masna gostota ρ je podana s preprostim utežnim pravilom: $\langle \rho \rangle = c^{(1)}\rho^{(1)} + c^{(2)}\rho^{(2)}$, kjer sta $c^{(i)}$ prostorninska deleža komponent, $c^{(i)} = l^{(i)}/l$.

V prvem približku lahko elastične in viskozne lastnosti neodvisno homogeniziramo. Ta poenostavljeni postopek lahko zagotovi razumen pristop, če sta nelinearnost in viskoznost majhni. Efektivna elastična koeficienta $\langle \alpha \rangle$ in $\langle \beta \rangle$ sta ovrednotena tako kot v poglavju 4.3:

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}}{c^{(1)}\alpha^{(2)} + c^{(2)}\alpha^{(1)}}, \quad (9.5)$$

$$\langle \beta \rangle = \frac{c^{(1)}\beta^{(1)}\left(\alpha^{(2)}\right)^3 + c^{(2)}\beta^{(2)}\left(\alpha^{(1)}\right)^3}{\left(c^{(1)}\alpha^{(2)} + c^{(2)}\alpha^{(1)}\right)^3}. \quad (9.6)$$

Pri določitvi efektivne viskoznosti $\langle \nu \rangle$ uporabimo za enačbe (9.2), (9.3) Laplaceovo transformacijo $u_s^{(i)}(x, s) = \int_0^\infty u^{(i)}(x, t) \exp(-st) dt$. Ob predpostavki ničelnih začetnih pogojev dobimo v linearnem približku

$$\left(\alpha^{(i)} + s\nu^{(i)} \right) \frac{\partial^2 u_s^{(i)}}{\partial x^2} = s^2 \rho^{(i)} u_s^{(i)}, \quad (9.7)$$

$$u_s^{(1)} = u_s^{(2)}, \quad \left(\alpha^{(1)} + s\nu^{(1)} \right) \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial x} = \left(\alpha^{(2)} + s\nu^{(2)} \right) \frac{\partial u_s^{(2)}}{\partial x} \text{ na robu } \partial\Omega. \quad (9.8)$$

Homogenizacija problema (9.7), (9.8) da [306]

$$\left(\alpha + s\nu \right) \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} = s^2 \langle \rho \rangle u_s^{(i)}, \quad (9.9)$$

kjer je $\alpha + s\nu = \left[c^{(1)} / (\alpha^{(1)} + s\nu^{(1)}) + c^{(2)} / (\alpha^{(2)} + s\nu^{(2)}) \right]^{-1}$.

Uporaba inverzne Laplaceove transformacije privede na integro-diferencialno enačbo, kar bistveno oteži nadaljnjo analizo. Da bi se temu izognili, v primeru majhne viskoznosti predstavimo homogenizirani parameter $\langle \alpha + s\nu \rangle$ z razvojem v potenčno vrsto

$$\langle \alpha + s\nu \rangle = \frac{\alpha^{(1)} \alpha^{(2)}}{c^{(1)} \alpha^{(2)} + c^{(2)} \alpha^{(1)}} + s \frac{c^{(1)} \nu^{(1)} (\alpha^{(2)})^2 + c^{(2)} \nu^{(2)} (\alpha^{(1)})^2}{(c^{(1)} \alpha^{(2)} + c^{(2)} \alpha^{(1)})^2} + \mathcal{O}(s^2). \quad (9.10)$$

Če vstavimo (9.10) v (9.9) in izvedemo obratno transformacijo, dobimo linearni del homogenizirane enačbe (9.4), kjer je efektivni elastični koeficient $\langle \alpha \rangle$ podan s formulo (9.5), efektivna viskoznost $\langle \nu \rangle$ pa je pridobljena na naslednji način

$$\langle \nu \rangle = \frac{c^{(1)} \nu^{(1)} (\alpha^{(2)})^2 + c^{(2)} \nu^{(2)} (\alpha^{(1)})^2}{(c^{(1)} \alpha^{(2)} + c^{(2)} \alpha^{(1)})^2} \quad (9.11)$$

Enačba (9.4) opisuje dinamično obnašanje heterogene trdne snovi na makro nivoju, ki je povezana s prostorsko periodo nihajnih načinov. Opažamo, da so vsi efektivni koeficienti določeni izrecno glede na mikroskopske lastnosti medija. To je v nasprotju s številnimi dobro znanimi fenomenološkimi pristopi, kot sta Cosseratova [129] in Biotova teorija, kjer materialni parametri običajno ostanejo nedoločeni.

9.3. POSTOPEK DISKRETIZACIJE

Uvedimo brezdimenzijske spremenljivke $\bar{x} = x(\pi/L)$, $\bar{t} = t(\pi/L)\sqrt{\alpha/\rho}$, $\bar{u} = u/A$, kjer je L dolžina celotne heterogene trdnine in je A amplituda nihanj. Zaradi enostavnosti so v nadaljevanju črte nad spremenljivkami izpuščene. Potem dobi enačba (9.4) naslednjo obliko:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (9.12)$$

kjer sta $\gamma = \pi \langle \nu \rangle / (L \sqrt{\langle \alpha \rangle \langle \rho \rangle})$, $\varepsilon = \pi A \langle \beta \rangle / (L \langle \alpha \rangle)$ majhna brezdimenzijska parametra, ki označujeta viskoznost in nelinearnost. Koeficient γ je vedno pozitiven, medtem ko je predznak ε odvisen od fizikalnih lastnosti medija. Za večino materialov (npr. kovine, polimere, kamnine)

imamo $\langle \beta \rangle < 0$ in $\varepsilon < 0$, kar ima za posledico mehko nelinearnost. Pri elastomerih in gumi podobnih materialih je mogoče opaziti trdo nelinearnost, tj. $\langle \beta \rangle > 0$, $\varepsilon > 0$.

Enačba (9.12) predstavlja asimptotični model, ki upošteva primer majhne viskoznosti in majhne nelinearnosti. Zato je dušilni člen obravnavan v linearni obliki, nelinearni člen pa je čisto elastičen. Izboljšani model lahko vključuje sklopljeno dušenje in nelinearni člen reda $O(\gamma\varepsilon)$. Vendar, če predpostavimo, da teži $\gamma\varepsilon \rightarrow 0$, ga lahko v sedanjem približku asimptotično zanemarimo.

Enačba (9.12) dopušča različne modifikacije. Če dodamo disperzijski člen s prostorskim odvodom četrtega reda in z $\gamma = 0$ zanemarimo nastavitev disipativnega člana, bomo dobili različico dobro znane Boussinesqove enačbe, ki se pogosto uporablja za preučevanje širjenja valov v nelinearnih heterogenih medijih (glej na primer, [306] in tam navedene reference). Podobni modeli so bili pred kratkim uporabljeni za opisovanje nelinearnih nihanj heterogenih teles končne velikosti [21, 456]. Uporaba dveh ali treh disperzijskih členov omogoča razvoj prečiščenih gradientnih modelov [74], ki so uporabni v širšem frekvenčnem območju. Enačbe dvojne in trojne disperzije so bile uporabljene za napovedovanje širjenja linearnih prehodnih valov, ki jih povzročajo impulzne in harmonične obremenitve [43, 126].

Vodilni dinamični model, uveden v obliki (9.12), je namenjen preučevanju medsebojnega delovanja nelinearnih in disipativnih učinkov, če pri tem upoštevamo, da je območje nihajnih načinov bistveno večje od velikosti mikrostrukture. Oglejmo si primer obojestransko togo vpetih robov. Robni pogoji so

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad (9.13)$$

Za rešitev problema z robnimi pogoji (9.12), (9.13) se uporabi postopek diskretizacije. Ob izpolnjevanju pogojev (9.13) je polje pomikov predstavljeno z razvojem v Fourierjevo vrsto

$$u(x, t) = q_1(t) \sin(x) + q_2(t) \sin(2x) + q_3(t) \sin(3x) + \dots \quad (9.14)$$

Če vstavimo izraz (9.14) v enačbo (9.12), dobimo neskončni sistem nelinearnih navadnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \gamma \frac{dq_1}{dt} + q_1 + \varepsilon(q_1 q_2 + 3q_2 q_3 + 6q_3 q_4 + \dots) &= 0, \\ \frac{d^2 q_2}{dt^2} + 4\gamma \frac{dq_2}{dt} + 4q_2 + \varepsilon \left(\frac{q_1^2}{2} + 3q_1 q_3 + 8q_2 q_4 + \dots \right) &= 0, \\ \frac{d^2 q_3}{dt^2} + 9\gamma \frac{dq_3}{dt} + 9q_3 + \varepsilon(3q_1 q_2 + 6q_1 q_4 + \dots) &= 0, \\ \frac{d^2 q_4}{dt^2} + 16\gamma \frac{dq_4}{dt} + 16q_4 + \varepsilon(6q_1 q_3 + 4q_2^2 + \dots) &= 0, \end{aligned} \quad (9.15)$$

ki se lahko zapiše v bolj splošni obliki

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} + n^2 \gamma \frac{dq_n}{dt} + n^2 q_n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 q_m [|m-n| q_{|m-n|} - (m+n) q_{m+n}] = 0, \quad (9.16)$$

kjer je $n = 1, 2, 3, \dots$

Dobljeni nelinearni sistem je nesimetričen glede na lihe in sode nihajne načine. Preprosta analiza razkrije dve bistveno različni vrsti interakcij nihajnih načinov, ki sta jih opisala Chechin in Sakhnenko [118]. Začetno vzbujanje lihih načinov nujno vodi do pojava sodih načinov, tj. enačbe (9.15) ne dopuščajo rešitve $q_{2n-1} \neq 0$, $q_{2n} = 0$. Sodi načini so podvrženi tako

imenovanemu prisilnemu vzbujanju. Po drugi strani sta rešitvi $q_{2n-1} = 0$, $q_{2n} \neq 0$ dovoljeni in na splošno prisotnost sodih nihajnih načinov ne pripelje do pojava lih nihajnih načinov. Vendar se izkaže, da so sodi nihajni načini nestabilni in majhna motnja začetnih pogojev povzroči prenose energije na lihe načine [21]. V tem primeru so neparni načini izpostavljeni "parametričnemu" vzbujanju.

9.4. METODA VEČ ČASOVNIH SKAL

Iščemo asimptotično rešitev ob predpostavki, da je nelinearnost majhna, tj. $|\varepsilon| \ll 1$. Uvedimo različne časovne skale, ki jih opisujejo nove neodvisne spremenljivke $t_0 = t$, $t_1 = \varepsilon t$, ... in je q_n razvoj po potencah ε :

$$q_n(t) = q_{n0}(t_0, t_1) + \varepsilon q_{n1}(t_0, t_1) + O(\varepsilon^2). \quad (9.17)$$

Število zahtevanih časovnih skal je odvisno od reda aproksimacije. Izvedli bomo razvoj vrste (9.17) do $O(\varepsilon^2)$, zato sta potrebni dve časovni skali ("hitra" t_0 in "počasna" t_1). Zamenjave z ozirom na prvotno spremenljivko t so predstavljene na naslednji način

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + O(\varepsilon^2), \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_1} + O(\varepsilon^2). \quad (9.18)$$

Če vsako enačbo sistema (9.15) razvijemo po potencah ε , dobimo v približku $O(\varepsilon^0)$

$$\frac{\partial^2 q_{n0}}{\partial t_0^2} + n^2 \gamma \frac{\partial q_{n0}}{\partial t_0} + n^2 q_{n0} = 0. \quad (9.19)$$

Rešitev enačbe (9.19) je

$$q_{n0} = \exp(-n^2 \gamma t_0 / 2) [a_n(t_1) \cos(\omega_n t_0) + b_n(t_1) \sin(\omega_n t_0)], \quad (9.20)$$

kjer je ω_n naravna frekvenca n -tega nihajnega načina v linearnem primeru, pri čemer je $\omega_n^2 = n^2(1 - n^2 \gamma^2 / 4)$, a_n in b_n sta počasi spreminjajoči se amplitudi.

Približek $O(\varepsilon^1)$ sistema (9.15) daje:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q_{n1}}{\partial t_0^2} + n^2 \gamma \frac{\partial q_{n1}}{\partial t_0} + n^2 q_{n1} = \\ -2 \frac{\partial^2 q_{n0}}{\partial t_0 \partial t_1} - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 q_{m0} [|m-n| q_{|m-n|0} - (m+n) q_{|m+n|0}]. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Neposredna integracija sistema (9.21) bo povzročila sekularne člene v izrazih za q_{n1} . Sekularni izrazi s časom neomejeno naraščajo, kar ni v skladu s fizikalnimi lastnostmi obravnavanega konservativnega sistema. Da bi odpravili sekularne izraze, morata biti koeficienta ob $\cos(\omega_n t_0)$ in $\sin(\omega_n t_0)$ na desni strani enačbe (9.21) enaka nič. Če vstavimo (9.20) v (9.21) in razvijamo produkte $q_{j0} q_{k0}$ z uporabo standardnih trigonometričnih identitet, dobimo sistem enačb za a_n in b_n , ki daje možnost raziskovanja interakcij med različnimi nihajnimi načini.

V nedisipativnem primeru, $\gamma = 0$, postanejo frekvence ω_n med seboj sorazmerne

$$\omega_j / \omega_k = j / k, \quad (9.22)$$

Tako je neskončno število nihajnih načinov povezano z notranjimi resonancami. Prisotnost viskoznosti vodi v "detonacijo" relacije (9.22) in na večji časovni skali preprečuje prenose energije med nihajnimi načini.

Predpostavimo, da je viskoznost majhna, tj. $\gamma \ll 1$ ter $\cos(\omega_n t_0)$ in $\sin(\omega_n t_0)$ v izrazu (9.20) predstavimo kot sledi

$$\begin{aligned}\cos(\omega_n t_0) &= \cos(nt_0) + \frac{n^3 \gamma^2 t_0}{8} \sin(nt_0) + O(n^6 \gamma^4 t_0^2), \\ \sin(\omega_n t_0) &= \sin(nt_0) - \frac{n^3 \gamma^2 t_0}{8} \cos(nt_0) + O(n^6 \gamma^4 t_0^2).\end{aligned}\tag{9.23}$$

Če skrajšamo razvoj (9.23) v vodilnem redu, strogo upoštevamo resonančni pogoj (9.22). Fizikalni smisel tega približka je, da viskoznosti pripisujemo odgovornost za disipacijo energije (tj. za eksponentno oslabeitev q_{n0}), vendar je njen vpliv na lastne frekvence zanemarljiv tako da so notranje resonance možne. Razviti pristop je uporaben v kratkem časovnem obsegu, ko je $n^3 \gamma^2 t_0 / 8 \ll 1$.

Kot izhaja iz (9.20), je koeficient oslabeitve n -tega nihajnega načina sorazmeren z n^2 . Opažamo, da ima notranja disipacija kvadratno rast s povečanjem števila nihajnih načinov, zato so lahko najnižji nihajni načini najpomembnejši pri nihanju realnih struktur. Oglejmo si resonančne interakcije med načinoma 1 in 2. Primerno je uvesti amplitudo $r_n(t_1)$ in fazo $\varphi_n(t_1)$ na naslednji način: $a_n = r_n \cos(\varphi_n)$, $b_n = r_n \sin(\varphi_n)$. Če ohranimo prvi dve enačbi sistema (9.21), pogoj izločitve sekularnih členov daje:

$$\begin{aligned}\frac{dr_1}{dt_1} &= \frac{1}{4} r_1 r_2 \exp(-2\gamma t_0) \sin(\varphi_2 - 2\varphi_1), \\ r_1 \frac{d\varphi_1}{dt_1} &= -\frac{1}{4} r_1 r_2 \exp(-2\gamma t_0) \cos(\varphi_2 - 2\varphi_1), \\ \frac{dr_2}{dt_1} &= -\frac{1}{16} r_1^2 \exp(\gamma t_0) \sin(\varphi_2 - 2\varphi_1), \\ r_2 \frac{d\varphi_2}{dt_1} &= -\frac{1}{16} r_1^2 \exp(\gamma t_0) \cos(\varphi_2 - 2\varphi_1).\end{aligned}\tag{9.24}$$

Rešitev sistema (9.24) v čisto elastičnem primeru ($\gamma = 0$) so analizirali Andrianov in soavtorji [21]. Opažamo, da nihanje v enojnem nihajnem načinu 1 ni mogoče. Če je vsa začetna energija akumulirana v nihajnem načinu 1, tj. $r_1(0) \neq 0$, $r_2(0) = 0$, potem je način 2 nujno vzbujen in poteka periodična izmenjava energije med načinoma. Po drugi strani pa, če začnemo z ničelno začetno energijo, način 1, $r_1(0) = 0$, $r_2(0) \neq 0$, potem je $dr_2/dt_1 = d\varphi_2/dt_1 = 0$. Amplituda r_2 in faza φ_2 sta konstantni, tako da lahko sistem niha samo v načinu 2. Vendar pa ta režim ni stabilen, ker bo že majhna motnja začetnih pogojev povzročila vzbujanje načina 1. Opisano vedenje je ponazorjeno v fazi ravnini $(r_2, \varphi_2 - 2\varphi_1)$ (glej sliko 2, navedeno v [21]).

9.5. NUMERIČNA SIMULACIJA SKLOPITVE NHAJNIM NAČINOV

Porazdelitev energije med nihajnimi načini je mogoče določiti z uporabo Lagrangevih enačb gibanja. Zapišimo posplošeno gibalno enačbo za n -ti način

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial (dq_n/dt)} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_n} = -\frac{\partial V}{\partial q_n} - n^2 \gamma \frac{dq_n}{dt},\tag{9.25}$$

kjer sta T kinetična in V potencialna energija celotnega sistema.

Z integracijo enačb (9.15) dobimo

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial q_n}{\partial t} \right)^2, \quad (9.26)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n^2 q_n^2 + \varepsilon \int \sum_{m=1}^{\infty} m^2 q_m [|m-n| q_{|m-n|} - (m+n) q_{m+n}] dq_n \right\}. \quad (9.27)$$

Člen $(dq_n/dt)^2$ v izrazu (9.26) in člen $n^2 q_n^2$ v (9.27) prispevata k n -ti enačbi sistema (9.15). Nato lahko v približku vodilnega reda in brez koeficienta $1/2$ skupno energijo E_n n-tega načina ovrednotimo na naslednji način

$$E_n = \left(\frac{dq_n}{dt} \right)^2 + n^2 q_n^2 + O(\varepsilon). \quad (9.28)$$

Drugi člen v izrazu (9.27) predstavlja popravek reda $O(\varepsilon)$ z ozirom na potencialno energijo V . Popravek lahko vključuje produkta $q_m q_{|m-n|}$ in $q_m q_{m+n}$, zato se njegov prispevek deli med načini m , $|m-n|$ in $m+n$. V nadaljevanju smo omejeni na približek $O(\varepsilon^0)$ in izračunamo energijo po formuli (9.28).

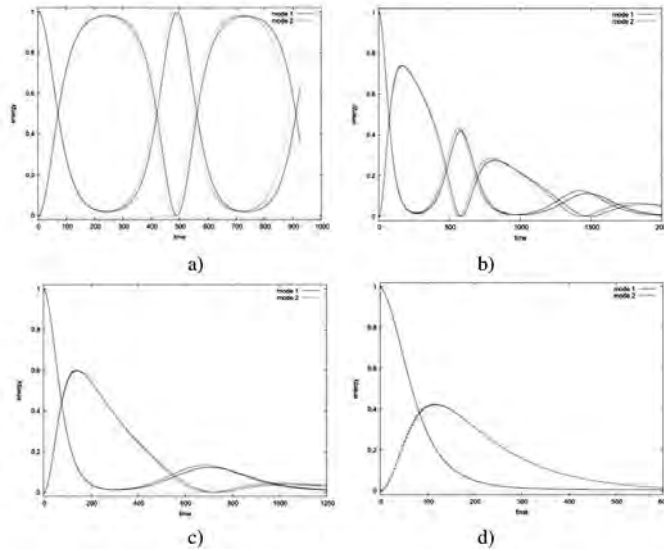
Numerični primeri so predstavljeni za primer mehke nelinearnosti, ki je značilna za večino industrijskih materialov in za $\varepsilon = -0,1$. Povečanje velikosti ε povzroči hitreje prenose energije, vendar kvalitativno obnašanje rešitve ostane enako. Numerična integracija je izvedena po metodi Runge-Kutta četrtega reda z odprtokodnim programskim orodjem CAS Maxima. Praktično konvergenco preverimo tako, da dvakrat zmanjšamo korak integracije in se prepričamo, da to ne vpliva na pridobljene numerične rezultate.

Najprej vzamemo približek dveh nihajnih načinov in primerjamo razvit asimptotični pristop (9.24) z neposredno numerično integracijo obeh vodilnih enačb nelinearnega sistema (9.15). Predpostavlja se, da je začetna energija lokalizirana v načinu 1. Sistem (9.24) izkazuje singularnost pri $r_2 = 0$; da bi se temu izognili zapišemo začetne pogoje na sledeči način

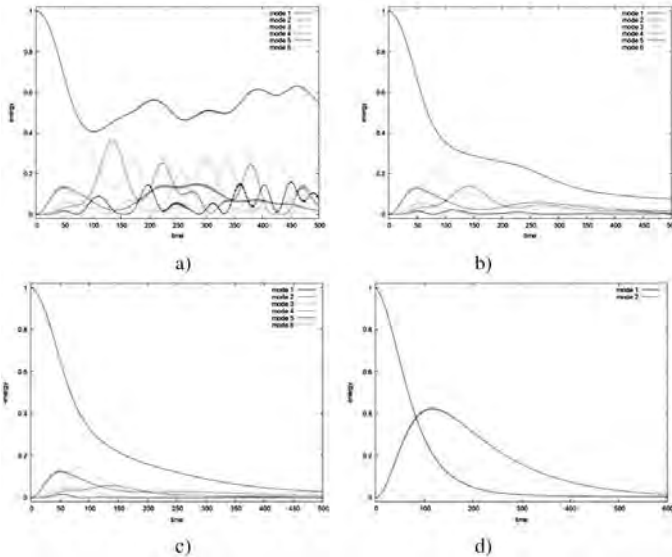
$$\begin{aligned} r_2 = q_2 = 0.01, \quad r_1 = q_1 = \sqrt{1 - 4r_2^2} = 0.99979998, \\ \frac{dr_1}{dt} = \frac{dq_1}{dt} = \frac{dr_2}{dt} = \frac{dq_2}{dt} = 0 \quad \text{pri } t = 0. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Slika 9.2 prikazuje periodično izmenjavo energije med nihajnima načinoma 1 in 2. Asimptotični približek metode več časovnih skal je formalno uporaben na relativno kratki časovni skali $t \sim O(\varepsilon^{-1})$. Izkaže pa se, da njegova numerična uporabnost močno presega nominalni obseg veljavnosti. Nato preučimo interakcije med šestimi vodilnimi načini. Začetni pogoji ustrezajo primeru, ko je vsa vhodna energija lokalizirana v načinu 1:

$$q_1 = 1, \quad q_k = 0, \quad k = 2, \dots, 6, \quad \frac{dq_n}{dt} = 0, \quad n = 1, \dots, 6 \quad \text{pri } t = 0. \quad (9.30)$$



Slika 9.2. Izmenjava energije med vodilnima nihajnima načinoma (polne krivulje - numerična rešitev, pikčaste krivulje - asimptotična rešitev): (a) $\gamma = 0$ (nedisipativni primer), (b) $\gamma = 0,0005$, (c) $\gamma = 0,001$, (d) $\gamma = 0,002$ [ponatisnjeno z dovoljenjem Elsevierja].



Slika 9.3. Prenosi energije med šestimi vodilnimi nihajnimi načini: (a) $\gamma = 0$ (nedisipativni primer), (b) $\gamma = 0,0005$, (c) $\gamma = 0,001$, (d) $\gamma = 0,002$ [ponatisnjeno z dovoljenjem Elsevierja].

Slika 9.3 prikazuje rezultate numerične integracije sistema (9.15), okrnjenega z $n = 1, \dots, 6$. Opažamo, da povečanje disipacije zavira prenose energije in omogoča skrajšanje prvotnega neskončnega sistema na le nekaj vodilnih nihajnih načinov.

9.6. ZAKLJUČNE OPOMBE

Preučevali smo naravna nihanja heterogene trdne konstrukcije, sestavljene iz periodično ponavljajočih se slojev iz dveh različnih materialov. Viskoelastične lastnosti komponent so bile predstavljene s Kelvin-Voigtovim modelom. Geometrijsko nelinearnost smo uvedli s Cauchy-Greenovim tenzorjem deformacij, fizikalna nelinearnost pa je bila modelirana z uporabo Murnaghanovega elastičnega potenciala. Značilna velikost mikrostrukture (npr. dolžina enotne celice) naj bi bila bistveno manjša od značilne velikosti (skale) makroskopskega problema (npr. prostorske periode nihajnih načinov). Predlagana je bila homogenizirana dinamična enačba za opis dinamičnih lastnosti medija na makronivoju.

Pomemben prispevek poglavja je, da so bili koeficienti homogenizirane enačbe določeni eksplicitno na podlagi strogih teoretičnih izhodišč. Razviti makroskopski model vsebuje informacije o lastnostih mikrostrukture.

Z uporabo Fourierjeve vrste je bil vhodni zvezni problem diskretiziran in reduciran na neskončni sistem nelinearnih navadnih diferencialnih enačb. Asimptotična rešitev je bila razvita z metodo večkratnih časovnih skal in numeričnih simulacij, izvedenih po Runge-Kutta metodi četrtega reda. Dobljeni numerični in analitični rezultati se dobro ujemajo.

Če se viskoznost poveča, disipacija zaduši vpliv nelinearnosti. Prenosi energije med nihajnimi načini so omejeni, obenem sklopitev nihajnih načinov na večji časovni skali izgine. Koeficient oslabitve n -tega načina je sorazmeren z n^2 , tako da notranja disipacija kaže kvadratno rast s povečanjem števila načinov. V takem primeru lahko okrnitev prvotnega neskončnega sistema na samo nekaj načinov vodilnega reda zagotovi razumen približek. Kljub temu, da je z matematičnega vidika pri nelinearnih interakcijah vključenih neskončno veliko načinov, smo pokazali, da za realne strukture že precej majhna viskoznost omogoča uporabo približnih modelov z le nekaj prostostnimi stopnjami.

10 Nelokalni, gradientni in lokalni modeli elastičnih struktur: enodimenzionalni primer

To poglavje obravnava lokalne/nelokalne in gradientne enodimenzionalne modele elastičnih struktur. Najprej je obravnavano modeliranje mreže elastično sklopljenih delcev. Nato je ilustrirana in obravnavana klasična zvezna aproksimacija diskretne problema. Nato so opisane in raziskane prekoračitve, kontinualizacija ovojnice in vmesni zvezni modeli. Opisane so prednosti uporabe Padéjevih približkov za konstrukcijo zveznih modelov. Ponovno so obravnavani razvoj normalnih načinov nihanja in teorije elastičnosti s sklopljenimi napetostmi. Nato so orisani odnosi med funkcijami diskretnih argumentov in zveznimi sistemi ter soodvisnosti med jedri integro-diferencialnih enačb diskretnih in zveznih sistemov. Poleg tega so obravnavane naslednje teme: disperzivno širjenje valov, Greenova funkcija, dvojne disperzijske enačbe, Todine mreže, diskretni pregibi, kontinualizacija Fermi-Pasta-Ulamove mreže, antikontinuumska meja in 2D mreže. Nazadnje so obravnavani problemi, ki se nanašajo na molekularno dinamiko nasproti kontinualizaciji, kontinualizacija nasproti diskretizaciji ter odprti problemi.

10.1. UVOD

V zadnjih letih so se pojavili številni novi materiali in konstrukcijski elementi, ki zahtevajo bolj sofisticirane raziskave kot zmožnosti klasičnega kontinuiranega medija. Predvsem obstajajo ultra disperzivni in nanokristalni materiali [137, 195, 355]. Nanokristalni material je predstavljen s pravilno ali kvazipravilno mrežo granul, fullerenov, nanocevk, ogljikovih nanostruktur itd. in ima notranje prostostne stopnje [374]. To stanje je običajno tudi za različne probleme nanomehanike [217], saj je za pravilen opis mehanskih lastnosti nanomaterialov potrebno upoštevati velikostne učinke. Modeli, ki temeljijo na klasičnih zveznih medijih, ne morejo nadzorovati visokofrekvenčnih nihanj, obnašanja materiala v bližini razpok in na frontah destruktivnih valov ter med faznimi prehodi [340]. Ni mogoče doseči bifurkacijskih točk, tj. pragov stabilnosti mreže pri katastrofalnih deformacijah [6]. Disperzija valov v granuliranih materialih [354, 375] predstavlja tudi pomemben primer mikrostrukturnih učinkov. Mikrostrukturni učinki so bistveni za pravilen opis pojavov mehčanja [356] v mehaniki loma [41, 115, 136] in v teoriji plastičnosti [174, 384]. Ne pozabimo tudi na probleme biomehanike in molekularne biologije. Kot je omenjeno v [237], »Od obnašanja kalcijevih valov v živih celicah do diskontinuiranega širjenja akcijskih potencialov v srcu ali verigah nevronov in od verig kemičnih reaktorjev ali Josephsonovih spojev do optičnih valovodov, dislokacij in dvojnih verig DNK, so ustrezni modeli fizikalne realnosti sami po sebi diskretni«.

Akustični (ali mehanski) metamateriali, tj. celične periodične strukture, se le v območju dolgih valovnih dolžin obnašajo kot neprekinjeni materiali. Preučevanje pojava diskretizacije, disperzije, disipacije in nelinearnosti akustičnih valov v metamaterialih ni le teoretičnega pomena. Gre tudi za možnosti praktične uporabe metamaterialov [137, 183, 476], na primer ustvarjanje super-absorberjev zvoka.

Diskretni mrežni modeli se pogosto uporabljajo za opisovanje nihanj v kristalih, v penah, v celičnih strukturah in kostnih tkivih. Nekatere nove aplikacije vključujejo modeliranje polimernih molekul, atomskih mrež (npr. grafen). Diskretni modeli se lahko pojavijo tudi v tehniki, na primer za simulacijo lahkih nosilnih konstrukcij s pritrjenimi masami.

V nasprotju z zveznimi mediji diskretne mreže včasih omogočajo oceno natančnih disperzijskih enačb v zaključeni analitični obliki, kar je primerno za nadaljnjo analizo. Zato jih je moč obravnavati kot primerjalne modele za poudarjanje glavnih učinkov širjenja valovanja v heterogenih strukturah.

Omenjene učinke je moč analizirati v okviru diskretnih modelov, z uporabo molekularne dinamike [255], kvazikontinualne analize [426, 455] ali drugih numeričnih pristopov. Vendar je želeni rezultat težko doseči z uporabo visokotehnoških računalnikov na ekonomičen način. Na primer, sodobni praktični problemi molekularne dinamike so še vedno nerešljivi tudi če se uporabljajo najmočnejše računalniške zmogljivosti.

Tako stanje lahko opišemo z Diracovimi besedami [138]: »Fizikalni zakoni, potrebni za matematično teorijo velikega dela fizike in celotne kemije, so popolnoma znani, težava je le v tem, da natančna uporaba teh zakonov vodi do enačb, ki so preveč zapletene, da bi bile rešljive. Zato postane zaželeno, da se razvijejo približne praktične metode uporabe kvantne mehanike, ki lahko privedejo do razlage glavnih značilnosti kompleksnih atomskih sistemov brez predolгих izračunov.«

Z ozirom na to je dejanski cilj raziskav izpopolnjevanje obstoječih teorij zveznih medijev z namenom bolj realističnih napovedi mehanskih lastnosti. Največja težava pri večstopenjski analizi je iskanje zveznih modelov za atomistično mrežo, ki izhaja iz osnovnih načel. V statistični fiziki so ta vprašanja obravnavana že pred 100 leti. Najpomembnejše vprašanje je, kako iz mikroskopskih modelov, ki so reverzibilni, pridobiti ireverzibilno termodinamiko kot makroskopsko mejo. V zadnjem času se sicer izrisuje določen napredek pri reševanju teh problemov [288, 471], vendar je še daleč od končnih zaključkov.

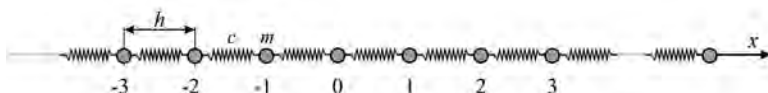
Namen tega poglavja je veliko skromnejši od zgoraj opisanih globalnih nalog. Na preprostih modelih obravnavamo različne načine modeliranja vmesne kompleksnosti med klasičnimi zveznimi in diskretnimi sistemi. Tukaj obstajajo naslednje strategije.

- (i) Fenomenološki pristop. Dodatni členi so dodani energijskemu funkcionalu ali -konstitutivni relaciji. Struktura in značaj teh izrazov sta utemeljena v referencah [8, 204, 307]. Fenomenološki pristop je pomemben pri reševanju aplikativnih problemov, ko je treba rešiti probleme praktičnega pomena. Vendar obseg uporabnosti teh pristopov običajno ni znan, osnovne posebnosti obnašanja diskretnih sistemov pa ostajajo nejasne.
- (ii) Statistični pristop. Izhajajoč iz zveznih nehomogenih teorij, je cilj pridobiti prečiščene teorije homogenega kontinuuma (npr. v obliki sklopljenih napetosti) [73]. Poznamo samo dve deli, v katerih je ta ideja privedla do konkretnih rezultatov [291, 292]. V teh prispevkih so polikristali obravnavani kot mikronehomogeni elastični medij, ki je sestavljen iz homogenih anizotropnih kristalitov z naključno orientacijo. Dokazano je, da je gostota elastične energije polikristalnega medija nelokalno odvisna od neotnega polja povprečnih deformacij. V primeru gladkih polj povprečnih deformacij to pomeni, da gostota energije ni lokalno odvisna samo od vrednosti deformacij, temveč tudi od vrednosti njihovih odvodov. Zato je za odvisnost gostote energije v izotropnem primeru značilno pet gradientnih modulov poleg dveh elastičnih modulov klasične teorije elastičnosti. Prvič so dobljeni eksplicitni izrazi za gradientne module polikristalnih materialov.
- (iii) Pristopi homogenizacije in kontinualizacije [20, 28, 39, 40, 43, 80, 81, 94, 236 – 238, 257 – 259, 353, 382]. Temeljijo na različnih aproksimacijah nelokalnih (diskretnih, psevdodiferencialnih, integralnih) operatorjev z lokalnimi (diferencialnimi) operatorji.

Ta del monografije je posvečen pristopom kontinualizacije in njihovim značilnostim.

10.2. VERIGA ELASTIČNO SKLOPLJENIH MAS

V tem razdelku sledimo članku [329]. Preučujemo verigo $n + 2$ masnih točk z enakimi masami m , ki se nahajajo v ravnotežnih stanjih v točkah osi x s koordinatami jh ($j = 0, 1, \dots, n, n + 1$) in so medsebojno elastično sklopljene z vzmetmi s togostmi c (glej sliko 10.1).



Slika 10.1. Veriga elastično sklopljenih mas.

Zaradi Hookovega zakona je elastična sila, ki deluje na j -to maso, naslednja

$$\sigma_j(t) = c[y_{j+1}(t) - y_j(t)] - c[y_j(t) - y_{j-1}(t)] = c[y_{j-1}(t) - 2y_j(t) + y_{j+1}(t)], \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (10.1)$$

kjer je $y_j(t)$ pomik j -te materialne točke iz njenega statičnega ravnotežnega položaja.

Z uporabo drugega Newtonovega zakona dobimo naslednji sistem NDE, ki ureja dinamiko verige

$$m\ddot{y}_{jt}(t) = c[y_{j-1}(t) - 2y_j(t) + y_{j+1}(t)], \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.2)$$

Ta sistem NDE se imenuje Lagrangeova mreža, ker jo je Lagrange proučeval v svoji »Analitični mehaniki« [267]. Včasih lahko preberemo izraz »Newtonova mreža« [98], ki se nanaša na Principia (livre II, predlog XLIX), vendar pa ta del Principia vsebuje le nekaj splošnih razprav o hitrosti zvoka. Pravzaprav so se NDE (10.2) pojavile samo v Lagrangeovi knjigi.

Sistem (10.2) je mogoče preoblikovati v naslednjo obliko:

$$m\sigma_{jt}(t) = c(\sigma_{j+1} - 2\sigma_j + \sigma_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n. \quad (10.3)$$

Naj bodo konci verige pritrjeni

$$y_0(t) = y_{n+1}(t) = 0. \quad (10.4)$$

Na splošno imajo začetni pogoji naslednjo obliko:

$$y_j(t) = \varphi_j^{(0)}, \quad \dot{y}_{jt}(t) = \varphi_j^{(1)} \quad \text{pri} \quad t = 0. \quad (10.5)$$

Kot je bilo prikazano v [329], je za vsako rešitev PRV (pojasnilo: Problema Robnih Vrednosti) (10.2), (10.4), (10.5) skupna energija konstantna. Poleg tega do sedaj omenjene rešitve po Ljapunovi definiciji stabilnosti niso asimptotično stabilne.

Rešitev PRV (10.2), (10.4), (10.5) lahko izrazimo z elementarnimi funkcijami z uporabo diskretne različice metode ločitve spremenljivk. V ta namen se normalna nihanja zapišejo v obliki

$$y_j(t) = C_j T(t), \quad j = 1, \dots, n, \quad (10.6)$$

kjer so konstante C_j definirane z rešitvijo naslednjega problema lastnih vrednosti

$$-\lambda C_j = C_{j+1} - 2C_j + C_{j-1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad C_0 = C_{n+1} = 0. \quad (10.7)$$

Funkcija $T(t)$ zadošča naslednji enačbi:

$$mT_{tt} + c\lambda T = 0. \quad (10.8)$$

Lastne vrednosti problema (10.7) so [329]

$$\lambda_k = 4\sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10.9)$$

Rešitev enačbe (10.8) ima obliko $T = A \exp(i\omega t)$. Zato dobimo iz enačb (10.8), (10.9) naslednjo Lagrangeovo formulo za frekvence ω_k diskretnega sistema (10.3):

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{c}{m}} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10.10)$$

Ker se vse vrednosti λ_k med seboj razlikujejo, so tudi vse lastne vrednosti različne. Zato je vsaki od lastnih vrednosti pridružen po en lastni vektor $\mathbf{C}_k(C_1^{(k)}, C_2^{(k)}, \dots, C_n^{(k)})$ v obliki:

$$\mathbf{C}_k = \operatorname{cosec} \frac{k\pi}{n+1} \left(\sin \frac{k\pi}{n+1}, \sin \frac{2k\pi}{n+1}, \dots, \sin \frac{nk\pi}{n+1} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10.11)$$

Lastni vektorji so med seboj pravokotni, medtem ko je

$$|\mathbf{C}_k|^2 = \frac{n+1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10.12)$$

Vsaki od lastnih frekvenc (10.10) je pridružen normalni način nihanja

$$y_j^{(k)}(t) = C_j^{(k)} [A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)], \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10.13)$$

Splošno rešitev PRV (10.3) – (10.5) dobimo kot rezultat superpozicije normalnih načinov nihanja

$$y_j(t) = \sum_{k=1}^n C_j^{(k)} [A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)], \quad j = 1, \dots, n. \quad (10.14)$$

Preučimo zdaj problem gibanja verige pod vplivom delovanja enotne enotske konstantne sile na točko z indeksom nič. Gibanje takega sistema ureja enačba. (10.3) z naslednjimi robnimi in začetnimi pogoji

$$\sigma_0(t) = 1, \quad \sigma_{n+1}(t) = 0, \quad (10.15)$$

$$\sigma_j(t) = 0, \sigma_{jt}(t) = 0 \quad \text{pri} \quad t = 0. \quad (10.16)$$

V nadaljevanju bo začetni PRV z nehomogenimi RP (10.3), (10.15), (10.16) preveden na PRV za homogene RP za enačbo (10.3) z nehomogenimi začetnimi pogoji, pri katerem lahko

uporabimo metodo superpozicije normalnih nihanj. Do sedaj pridobljene formule normalnih oblik lahko uporabimo na podoben način, če $y_j(t)$ zamenjamo s $\sigma_j(t)$. Kot rezultat dobimo naslednjo natančno rešitev PRV (10.3), (10.15), (10.16) [289, 329]:

$$\sigma_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k j}{n+1} \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{2(n+1)} [1 - \cos(\omega_k t)], \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.17)$$

10.3. KLASIČNE ZVEZNE APROKSIMACIJE

Za velike vrednosti n se običajno uporablja zvezna aproksimacija diskretnega problema. Uvedimo zvezno koordinato x , skalirano tako, da je $x = nh$ v vozliščih mreže, kjer je h razdalja med delci. Klasična zvezna aproksimacija za diskretni model, opisan z enačbami. (10.3), (10.15), (10.16) dobi s tem obliko

$$m\sigma_{tt}(x, t) = ch^2 \sigma_{xx}(x, t), \quad (10.18)$$

$$\sigma(0, t) = 1, \quad (10.19)$$

$$\sigma(l, t) = 0, \quad (10.20)$$

$$\sigma(x, 0) = \sigma_t(x, 0) = 0, \quad (10.21)$$

kjer sta $l = (n+1)h$, $\sigma(x, t) = chy_x(x, t)$.

Analizirajmo RP (10.19). Z uporabo izraza za silo

$$\sigma_0(t) = c[y_1(t) - y_0(t)] = ch \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \dots \right] y(x, t) \quad (10.22)$$

in ohranitvijo samo prvega člena na desni strani enačbe (10.22), dobimo RP (10.19).

PRV (10.18) – (10.22) lahko uporabimo na primer za modeliranje napetosti pri sklapljanju tirnih vozil [261].

Če imamo rešitev zveznega PRV (10.18)–(10.22), dobimo približno rešitev diskretnega problema ob upoštevanju naslednjih formul

$$\sigma_j(t) = \sigma(jh, t), \quad j = 0, 1, \dots, n, n+1. \quad (10.23)$$

Formalno lahko do sedaj opisani približek dobimo na naslednji način. Označimo diferenčni operator, ki se pojavlja v enačbi (10.3) z D , tj.

$$m\sigma_{jt}(t) = cD\sigma(t). \quad (10.24)$$

Z uporabo operatorja prevedbe $\exp(h \partial / \partial x)$ dobimo [319]

$$D = \exp\left(h \frac{\partial}{\partial x}\right) + \exp\left(-h \frac{\partial}{\partial x}\right) - 2 = -4\sin^2\left(-\frac{ih}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right). \quad (10.25)$$

Razložimo enačbo (10.25) podrobneje. Maclaurinova formula za neskončno mnogokrat odvedljivo funkcijo $F(x)$ ima naslednjo obliko:

$$F(x+1) = \left[1 + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots \right] F(x) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x). \quad (10.26)$$

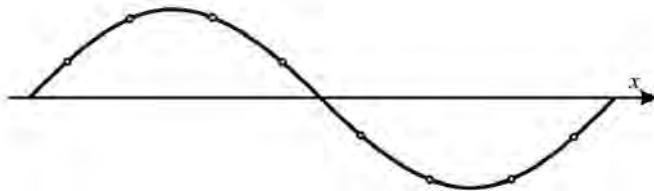
Upoštevajmo, da $\exp(h\partial/\partial x)$ pripada tako imenovanim psevdodiferencialnim operatorjem. Z uporabo enačb (10.24) – (10.26) pretvorimo enačbo (10.3) v psevdodiferencialno enačbo naslednje oblike:

$$m \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + 4c \sin^2\left(\frac{ih}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \sigma = 0. \quad (10.27)$$

Po drugi strani pa razcep psevdodiferencialnega operatorja v Maclaurinovo vrsto daje

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{ih}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{2k}}{(2k)!} \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} = \\ &= \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(1 + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{h^4}{360} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{h^6}{10080} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + \dots \right). \end{aligned} \quad (10.28)$$

Če ohranimo na desni strani enačbe (10.28) samo prvi člen, dobimo zvezno aproksimacijo (10.18). Upoštevajmo, da uporaba Maclaurinove vrste implicira, da se premiki okoliških mas nekoliko razlikujejo med seboj. S fizikalnega vidika to pomeni, da proučujemo nihanje verige z nekaj masami, ki se nahajajo na prostorski periodi (glej sliko 10.2), torej gre za dolgovalovno aproksimacijo. To je tako imenovani sofazni ali akustični način



Slika 10.2. Prostorska oblika nihanja v določenem času $t = const$ (točke - diskretni sistem, krivulja - zvezni sistem) za akustični način.

Upoštevajmo, da navpična os na sliki 10.2 predstavlja pomik v smeri x , saj raziskujemo 1D problem. Zvezni sistem (10.18) ima naslednji diskretni neskončni spekter

$$\alpha_k = \pi \sqrt{\frac{c}{m}} \frac{k}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10.29)$$

Relacije (10.29) razmeroma dobro aproksimirajo nizke frekvence diskretnega sistema (10.10), medtem ko se n -ta frekvenca α_k zveznega sistema močno razlikuje od ustrezne n -te frekvence ω_k diskretnega sistema. Natančnost zveznih aproksimacij je mogoče izboljšati, o čemer bomo še razpravljali.

Zamenjavo končnega spektra diskretnega sistema (10.10) s prvimi n členi neskončnega spektra (10.29) lahko imenujemo Debyejev približek, saj je tak približek uporabil v svoji teoriji specifične toplote (toplotne kapacitete) v trdnem telesu.

10.4. "PREKORAČITVE"

Točno rešitev za PRV (10.18) – (10.22) lahko dobimo z uporabo d'Alembertove metode, ki se ujema z operatorskim računom [261, 289, 329]:

$$\sigma(x, t) = H \left(nh \arcsin \left| \sin \left(\frac{\pi}{2n} \sqrt{\frac{c}{m}} t \right) \right| - x \right), \quad (10.30)$$

kjer je $H(\dots)$ Heavisideova funkcija.

Iz enačbe (10.30) dobimo naslednjo oceno:

$$|\sigma(x, t)| \leq 1. \quad (10.31)$$

Predvidevali smo, da lahko oceno (10.31) uporabimo tudi za diskretni sistem [222]. Vendar pa so analitične in tudi numerične raziskave [165–168, 260, 261] pokazale potrebo po razlikovanju med globalnimi in lokalnimi značilnostmi diskretnega sistema. Z drugimi besedami, klasično zvezno aproksimacijo lahko uporabimo samo za nizkofrekvenčni del spektra diskretnega sistema [303]. Numerične raziskave kažejo, da lahko pri danih masah v diskretni verigi količina $P_j = \sigma_j(t)$ preseže vrednosti enote v določenih časovnih trenutkih (glej tabelo 10.1, ki je navedena v [165]).

Tabela 10.1.

Prekoračitve

n	8	16	32	64	128	256	$n \rightarrow \infty$
P_n	1.7561	2.0645	2.3468	2.3468	2.9078	3.1887	$P_n \rightarrow \infty$

Opazimo, da amplituda prekoračitve ni odvisna od parametra m/c . Poleg tega se amplituda nihanja verige povečuje s povečanjem n , medtem ko njena skupna energija od n ni odvisna. Vendar to ni paradoks. Amplituda nihanja ima namreč red vsote količin $\sigma_j(t)$, medtem ko red potencialne energije predstavlja vsota kvadratov omenjenih količin [329].

Po drugi strani je amplituda nihanja določene mase s stalnim indeksom omejena za $n \rightarrow \infty$, vendar amplituda nihanja mase z določenim indeksom, ki narašča z naraščanjem n , teži k neskončnosti za $n \rightarrow \infty$ po zakonu $\ln n$ [329]. »V jeziku mehanike pravkar povedano pomeni, da v analizi tako imenovanih "lokalnih lastnosti" enodimenzionalnega zveznega medija, lastnosti medija ne moremo obravnavati z mejnim primerom linearne verige točkovnih mas, ki ga dobimo, ko število točk neomejeno narašča« [261].

Prej je enak učinek kontinualizacije napovedal Ulam, ki je zapisal [439]: »Najenostavnejši problemi, ki vključujejo dejansko neskončno število delcev v porazdelitvi snovi, se pojavljajo že v klasični mehaniki.

Strogo gledano je resnično neskončnost v porazdelitvi snovi potrebno upoštevati v vseh problemih fizike kontinuuma. V klasični obravnavi, kot je običajno podana v učbenikih hidrodinamike in teorije polja, ta ni bistvena in v večini teorij služi le kot priročen limitni model končnih sistemov, ki omogoča uporabo algoritmov za izračune. Običajna uvedba kontinuuma ponuja veliko možnosti za razpravo in kritično presojo. Izpeljava enačb gibanja za tekočine, na primer, poteka na naslednji način. Obravnavamo zelo veliko število delcev N , recimo z enakimi masami, tako da sestavljajo mrežo, ki predstavlja približek preučevanega kontinuuma.

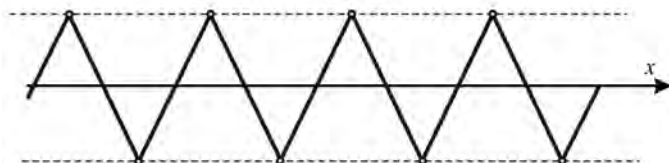
Predpostavimo, da so sile med temi delci dane, tako da lahko napišemo Lagrangeove enačbe za gibanje N delcev. Končni sistem navadnih diferencialnih enačb preide v limitnem primeru $N = \infty$ v eno ali več parcialnih diferencialnih enačb. Newtonovi zakoni ohranitve energije in gibalne količine so za limitni primer kontinuuma navidezno pravilno formulirani. Vendar se takoj pojavi vsaj možen ugovor glede neomejene veljavnosti te formulacije. Kajti že samo dejstvo, da limitne enačbe prikrito implicirajo zveznost in odvedljivost funkcij, ki opisujejo gibanje kontinuuma, nalaga različne omejitve na možna gibanja aproksimativnih končnih sistemov. Dejansko je na kateri koli stopnji limitnega procesa povsem možno, da se dva sosednja delca gibljeta v nasprotnih smereh z relativno hitrostjo, ki ji ni potrebno težiti proti nič, ko N narašča proti neskončnosti, medtem ko zveznost, ki je naložena rešitvi limitnega kontinuuma takšno situacijo izključuje. Zato obstajajo omejitve razreda možnih gibanj, ki niso izrecno prepoznane. To pomeni, da je že na začetku potrebno uvesti viskoznost ali druge vrste omejitev, ki med vsemi možnimi gibanji izločijo "gladka" gibanja. Zato lahko v nekaterih primerih običajne diferencialne enačbe hidrodinamike predstavljajo zavajajoč opis fizikalnega procesa.

Razlaga iluzornega protislovja med diskretnimi in zveznimi modeli je precej preprosta. Točna rešitev diskretnega problema (10.17) vsebuje tako počasne kot hitro prostorsko spreminjajoče se harmonike. Rešitev zveznega sistema (10.30) natančno opiše le počasne komponente rešitve. Tako mora pravilni zvezni model diskretnega sistema upoštevati tudi visoke harmonike.

10.5. KONTINUALIZACIJA OVOJNICE

Klasična zvezna aproksimacija je dala dober opis spodnjega dela spektra nihanja končne verige mas. V nadaljevanju preučujemo še en mejni primer, protifazno nihanje, ko je $\sigma_k = -\sigma_{k+1}$ (glej sliko 10.3). V tem primeru dobimo naslednjo NDE:

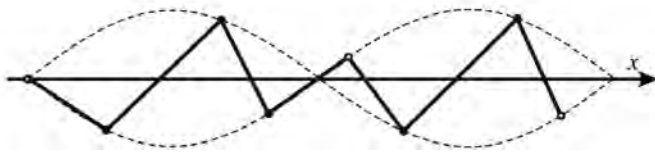
$$m\Omega_{tt} + 4c\Omega = 0. \quad (10.32)$$



Slika 10.3. Protifazno nihanje masne verige (optični ali π -način).

To je tako imenovani optični ali π - nihajni način. V primeru nihanj, ki so blizu π - načinu, se običajno uporablja "kontinualizacija ovojnice" ali "poldiskretni približek" [247, 250, 251, 382] (glej sliko 10.4). Najprej namreč, uporabimo »alternirajočo transformacijo« [164]

$$\sigma_k = (-1)^k \Omega_k, \quad (10.33)$$



Slika 10.4. Kontinualizacija ovojnice (poldiskretni pristop).

na kar se enačba (10.3) skrči na naslednjo obliko:

$$m\Omega_{k,t} + c(4\Omega_k + \Omega_{k-1} - 2\Omega_k + \Omega_{k+1}) = 0. \quad (10.34)$$

Nato se uporabijo naslednje relacije:

$$\begin{aligned} \Omega_{k-1}(t) - 2\Omega_k(t) + \Omega_{k+1}(t) &= -4\sin^2\left(-\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \Omega(x,t) = \\ &= \left(h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{h^6}{360} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + \dots\right) \Omega(x,t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, n+1. \end{aligned} \quad (10.35)$$

Z uporabo enačb (10.36), (10.33) in z upoštevanjem, da \hbar^2 lahko služi kot majhen parameter, dobimo (obdržimo samo približke ničelnega in prvega reda)

$$m\Omega_{tt} + 4c\Omega + c\hbar^2\Omega_{xx} = 0. \quad (10.36)$$

Ustrezni RP za enačbo (10.36) za primer lastnih nihanj so:

$$\Omega = 0 \quad \text{pri} \quad x = 0, l, \quad (10.37)$$

Zanimivo je omeniti, da je Einsteinova teorija toplotne kapacitete trdnih teles uporabljala doslej predstavljeno zamisel π -načina. Einsteinovo trdno telo je model trdnega telesa, ki temelji na dveh predpostavkah: vsak atom v rešetki je neodvisen 3D kvantni harmonični oscilator in vsi atomi nihajo z enako frekvenco (v nasprotju z Debyejevim modelom).

10.6. VMESNI ZVEZNI MODELI

V nadaljevanju bomo izdelali izboljšane zvezne aproksimacije. Lokalno modeliranje takih sistemov (nelokalne teorije elastičnosti) zahteva gradientno formulacijo. Integralno formulacijo je mogoče skrčiti na gradientno obliko z okrnitvijo razvoja nelokalnega jedra v vrsto v dualnem prostoru [362]. V nadaljevanju uporabljamo pristop gradientne formulacije.

Če v vrsti (10.28) ohranimo prve tri člene, dobimo naslednji model

$$m \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = c\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\hbar^4}{360} \frac{\partial^6}{\partial x^6} \right) \sigma. \quad (10.38)$$

Enačba (10.38) vključuje prostorske odvode četrtega in šestega reda, zaradi česar so potrebni pomožni RP. To je tipična težava, ki se pojavi, ko se modeli višjega reda, prvotno izpeljani za neskončne medije, uporabijo na omejenih domenah [258, 259]. Za odpravljanje te težave je možnih več pristopov. Prvi pristop, ki izvira iz [231], lahko imenujemo fenomenološki. V [231] so avtorji uporabili točni izraz za frekvenčni spekter in predlagali

uvvedbo pomožnih RP na način, ki zagotavlja najbolj natančne aproksimacije frekvenc. Kot rezultat so dobili naslednje RP:

$$\sigma = \sigma_{,xx} = \sigma_{,xxxx} = 0 \quad \text{at} \quad x = 0, l. \quad (10.39)$$

Enak pristop je bil uporabljen v [28] za problem impulzne obremenitve. Analitično rešitev smo primerjali z numerično simulacijo diskretne mreže. Preverjene so bile tri različice pomožnih RP višjega reda in izbrani so bili RP, ki zagotavljajo najboljše ujemanje zveznih in diskretnih rešitev.

Drugi pristop temelji na variacijskem principu [166]. V tem primeru se pomožni robni pogoji obravnavajo kot naravni robni pogoji za ustrezno variacijsko formulacijo problema. RP, ki so predlagani v [166] sovpadajo z RP (10.39).

Prav tako lahko opazimo, da je postavitve robnih pogojev med kontinualizacijo precej podobna uvajanju dodatnih točk v metodi končnih razlik. Tu je nekaj prostora za poljubno izbiro, uspešnost izbire pa se ocenjuje a posteriori. Natančneje, vrednosti v pomožnih točkah $k < 0$ ($k > n + 1$) [17] lahko poljubno izbiramo. Zlasti, če želimo ohraniti translacijsko simetrijo in izberemo $y_{-1} = -y_1(t)$ itd., dobimo RP (10.39).

Primerjava n -te frekvence zveznega sistema (10.38), (10.39) s frekvenco diskretne sistema kaže bistveno izboljšanje natančnosti (koeficient 2,1 namesto 2 pri točni rešitvi daje napako 5 %).

Če v splošnem primeru v vrsti (10.28) ohranimo N členov, dobimo enačbe tako imenovanih vmesnih zveznih modelov [166]

$$m \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 2c \sum_{k=1}^N \frac{h^{2k}}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} \sigma}{\partial x^{2k}}. \quad (10.40)$$

RP za enačbo (10.40) imajo naslednjo obliko:

$$\frac{\partial^{2k} \sigma}{\partial x^{2k}} = 0 \quad \text{za} \quad x = 0, l, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (10.41)$$

Iz enačbe (10.40) dobimo

$$\alpha_k^2 = 2 \frac{c}{m} \sum_{k=1}^N \frac{h^{2k}}{(2k)!} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^{2k}. \quad (10.42)$$

Glede na odbojno simetrijo in periodičnost zadostuje, da upoštevamo valovna števila v intervalu prve Brillouinove cone. Rešitev je tedaj stabilna, če in samo če je desna stran v (10.42) pozitivna za vse k . Ta pogoj je daljnosežna posplošitev Legendre-Hadamardovega pogoja krepke eliptičnosti v elastičnem kontinuumu [435]. Vidimo lahko, da je PRV (10.40), (10.41) stabilen pri lihem številu N . V tem primeru je enačba (10.40) hiperboličnega tipa [166].

Uporaba vmesnih zveznih modelov omogoča upoštevanje zgoraj omenjenega učinka prekoračitev.

10.7. UPORABA PADÉJEVIH APROKSIMACIJ

Konstrukcija vmesnih zveznih modelov temelji predvsem na razcepitvi nelokalnega diferenčnega operatorja v Maclaurinovo vrsto. Vendar pa je zelo pogosto uporaba Padéjevih

aproximacij (PA) učinkovitejša za aproksimacijo [47]. Collins [125] je predlagal konstruiranje zveznih modelov z uporabo PA. Nato je ta približek široko uporabljal Rosenau [385–389]. Nadaljnji razvoj tega pristopa je bil opravljen v [438, 453, 454]. Včasih se ti zvezni modeli imenujejo kvazikontinuumski približki.

Če v vrsti (10.28) obdržimo samo dva člena, lahko PA pretvorimo v naslednjo obliko:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \approx \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2}}{1 - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}. \quad (10.43)$$

Za utemeljitev tega postopka lahko uporabimo Fourierovo ali Laplaceovo transformacijo. Ustrezni model kvazikontinuum se glasi

$$m \left(1 - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sigma_{tt} - ch^2 \sigma_{xx} = 0. \quad (10.44)$$

RP za enačbo (10.44) imajo obliko

$$\sigma = 0 \quad \text{za} \quad x = 0, l. \quad (10.45)$$

Z uporabo enačbe (10.44) nam ni potrebno oblikovati dodatnih RP, ki fizikalno niso utemeljeni. Napaka v oceni n -te frekvence v primerjavi z diskretno verigo je 16,5 %. Vendar je enačba (10.45) nižjega reda v primerjavi z enačbo (10.38).

V teoriji elastičnosti se enačba tipa (10.45) običajno imenuje Lovejeva enačba [190] (toda kot je omenil Love [285], je to enačbo že prej dobil Rayleigh [379]). Izraz σ_{xxtt} lahko obravnavamo kot lateralno (bočno) vztrajnost. Enačba (10.45) je hiperboličnega tipa. Kaplunov in soavtorji [230] označujejo te teorije kot teorije s spremenjeno vztrajnostjo.

Prehod na enačbo (10.45) lahko obravnavamo kot regularizacijski postopek za enačbo (6.3) z $N = 2$, ki je pogojno stabilen. Model, ki ga ureja enačba (10.45) je brezpogojno stabilen in valovanje, ki se širi, ne more prenašati energije hitreje od hitrosti c . Vendar model, ki ga ureja enačba (10.45) napoveduje, da kratki valovi prenašajo elastično energijo s skoraj ničelno hitrostjo [314], kar s fizikalnega vidika ni pravilno.

Enačba (10.38) se lahko z uporabo PA v zadnjih dveh členih na desni strani preoblikuje v naslednjo obliko

$$m \left(1 - \frac{h^2}{30} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = ch^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{h^2}{20} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) \sigma. \quad (10.46)$$

V teoriji elastičnosti se enačba tipa (10.46) običajno imenuje Bishopova enačba [79]. Enačba (10.46) z RP

$$\sigma = \sigma_x = 0 \quad \text{ali} \quad \sigma = \sigma_{xx} = 0 \quad \text{pri} \quad x = 0, l \quad (10.47)$$

je pogojno stabilna.

Velja omeniti, da enačbo (10.37), ki opisuje poldiskretni pristop, prav tako lahko regulariziramo z uporabo PA, kot sledi [162, 164]:

$$m \left(1 - \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Omega_{tt} + c\Omega = 0. \quad (10.48)$$

Končno, če imamo na voljo tako dolgovalovno kot kratkovalovno asimptotiko, lahko uporabimo tudi dvotočkovno PA [11, 12]. V nadaljevanju konstruiramo dvotočkovno PA z uporabo prvega člena vrste (10.28) kot enega od limitnih primerov. Predpostavimo, da je

$$\begin{aligned} \sin^2\left(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right) &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\hbar^{2k}}{(2k)!}\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} = \\ &= -\frac{\hbar^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(1+\frac{\hbar^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\hbar^4}{360}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\dots\right) \approx \frac{-\frac{\hbar^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}}{1-\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}}. \end{aligned} \quad (10.49)$$

Izboljšani zvezni približek določa naslednja enačba

$$m\left(1-\alpha^2\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma_{ii}-c\hbar^2\sigma_{xx}=0. \quad (10.50)$$

Zdaj zahtevajmo, da n -ti frekvenci zveznega in diskretnega sistema sovpadata (primerjaj (10.10) in (10.29))

$$\alpha_n \approx 2\sqrt{c/m}. \quad (10.51)$$

Z uporabo pogoja (10.51) dobimo

$$\alpha^2 = 0,25 - \pi^{-2}. \quad (10.52)$$

Največja napaka pri oceni lastnih frekvenc se pojavi pri $k = [0,5(n+1)]$ in znaša 3 %.

Opazimo, da so približni modeli, opisani z enačbo (10.46), pri čemer se vrednosti α^2 nekoliko razlikujejo od (10.52), že znani. Eringen [155–157] je s pomočjo primerjave med disperzijskimi krivuljami zveznega in diskretnega modela [87, 98] dobil $\alpha^2 = 0,1521$. Ta vrednost je zelo blizu tisti, ki je bila predlagana v [42, 315] na podlagi neke fizikalne hipoteze "dinamično skladnega modela".

Zanimivo je, da sta Mindlin in Herrmann uporabila zelo podobno zamisel dvotočkovne PA za konstrukcijo svoje dobro znane enačbe za longitudinalno valovanje v palici [319].

Disperzijska enačba (10.50) ne zadošča pogoju $d\alpha_k/dk = 0$ na koncu prve Brillouinove cone [98]. Zato je bila v [156,273] predlagana tako imenovana enačba bi-Helmholtzevega tipa. V [273] ima ta enačba naslednjo obliko

$$m\left(1-\alpha^2\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\alpha_1^2\hbar^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)\sigma_{ii}-c\hbar^2\sigma_{xx}=0, \quad (10.53)$$

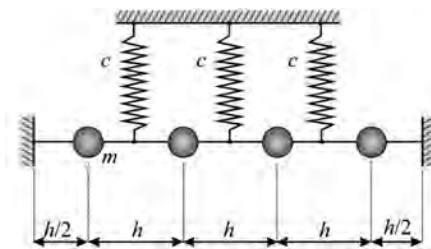
kjer je $\alpha_1 = 1/\pi$.

Pridruženi RP za to enačbo so

$$\sigma = \sigma_{xx} = 0 \text{ pri } x = 0, l \text{ ali } \sigma = \sigma_x = 0 \text{ pri } x = 0, l. \quad (10.54)$$

Na žalost je ta enačba nestabilna. To je cena, ki jo je treba plačati, da se skupinska hitrost na koncu Brillouinove cone zmanjša na vrednost nič [273].

Analizirajmo še mrežo z inercialno povezanimi masami (glej sliko 10.5).



Slika 10.5. Veriga vztrajnostno sklopljenih mas.

Vodilne enačbe lahko zapišemo na naslednji način [271]

$$4cy_j(t) = m \frac{d^2}{dt^2} [y_{j-1}(t) - 2y_j(t) + y_{j+1}(t)], \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.55)$$

Frekvence ω_k diskretnega sistema (10.55) so

$$\omega_k = \sqrt{\frac{c}{m}} \sin^{-1} \frac{k\pi}{2(n+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10.56)$$

Zvezni približek za ta model je naslednji

$$4cy(x, t) = mh^2 \frac{d^2}{dx^2} y_{tt}(x, t), \quad (10.57)$$

in opisuje najvišje frekvence.

Protifazni način v naslednji obliki

$$cy(x, t) = -my_{tt}(x, t), \quad (10.58)$$

predstavlja najnižjo frekvenco.

Kvazizvezne modele opisujejo naslednje PDE

$$c \left(1 - \frac{h^2}{12} \frac{d^2}{dx^2} \right) y(x, t) = mh^2 \frac{d^2}{dx^2} y_{tt}(x, t), \quad (10.59)$$

$$c \left(1 - \alpha^2 h^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) y(x, t) = mh^2 \frac{d^2}{dx^2} y_{tt}(x, t). \quad (10.60)$$

RP za enačbe (10.57), (10.59) in (10.60) imajo obliko

$$y(0, t) = y(l, t) = 0, \quad (10.61)$$

10.8. RAZVOJ NORMALNIH NAČINOV NIHANJA

V prejšnjih razdelkih smo proučevali učinkovitost različnih pristopov kontinualizacije za izračun lastnih nihanj diskretnega sistema. Prikazana je možnost zadovoljive aproksimacije lastnih frekvenc na celotnem območju njihovega spreminjanja. Vendar preučevanje prostih ali

vsiljenih nihanj zahteva razvoj normalnih načinov. Kot primer obravnavajmo diskretni problem (10.3), (10.15), (10.16), ki ima točno rešitev (10.17).

Uporabimo za zvezno aproksimacijo enačbe (10.50), (10.52) z RP (10.19) in ZP (10.22) ter naslednjim nastavkom

$$\sigma(x, t) = 1 - \frac{x}{l} + u(x, t). \quad (10.62)$$

Funkcija $u(x, t)$ je definirana z naslednjim PRV:

$$m \left(1 - \alpha^2 h^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) u_{tt} - ch^2 u_{xx} = 0, \quad (10.63)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (10.64)$$

$$u(x, 0) = -1 + \frac{x}{l}, \quad u_t(x, 0) = 0. \quad (10.65)$$

Rešitev PRV (10.63) – (10.65) je mogoče dobiti s Fourierjevo metodo

$$\sigma = 1 - \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \cos(\beta_k t), \quad (10.66)$$

kjer so $\beta_k = \frac{l}{\sqrt{l^2 + \alpha_k^2 \pi^2 h^2 k^2}} \alpha_k^2$.

Za aproksimacijo gibanja verige ohranimo v neskončni vsoti le prvih n harmonikov

$$\sigma = 1 - \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \cos(\beta_k t). \quad (10.67)$$

Primerjajmo rešitvi (10.17) in (10.67). Funkcija $1 - x/l$ služi kot dober približek okrnjene vrste

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k j}{n+1} \cot \frac{\pi k}{2(n+1)}. \quad (10.68)$$

Frekvence β_k predstavljajo dober približek frekvencam ω_k . Vendar se koeficienti v okrnjenih vrstah (10.67) in (10.68) med seboj razlikujejo. Projekcije na normalne načine diskretnih in zveznih sistemov,

$$\frac{1}{n+1} \cot \frac{\pi k}{2(n+1)} \quad (10.69)$$

oziroma $\frac{2}{\pi k}$, se med seboj močno razlikujejo za $k \gg 1$. To je zaradi tega, ker je tekom projekcije v normalne načine za diskretni sistem potrebno uporabiti seštevek po indeksu k od 0 do n , medtem ko je za zvezni sistem potrebno integrirati glede na x od 0 do l . Problem, ki se je s tem pojavil, je mogoče rešiti z uporabo Euler-Maclaurinovih formul [2]

$$\sum_{k=0}^{n+1} f(k) = \int_0^{n+1} f(x) dx + \frac{1}{2} [f(0) + f(n+1)] + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j+1} B_j \left[\frac{d^j f(n+1)}{dx^j} - \frac{d^j f(0)}{dx^j} \right], \quad (10.70)$$

kjer so B_i Bernoullijeva števila [2], ki imajo naslednje vrednosti: $B_0 = 1$, $B_2 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, ...

Poleg tega veljajo naslednje formule [377]:

$$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n C_{n+1}^{k+1} B_{n-k}, \quad (10.71)$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \sin^2 \frac{k\pi j}{n+1} = \frac{n+1}{2}, \quad (10.72)$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) \sin \frac{k\pi j}{n+1} = \frac{1}{n+1} \operatorname{ctg} \frac{\pi j}{2(n+1)}. \quad (10.73)$$

Ustrezni integrali se zapišejo kot

$$\int_0^{n+1} \sin^2 \frac{\pi j x}{n+1} dx = \frac{n+1}{2}, \quad (10.74)$$

$$\int_0^{n+1} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \frac{\pi j x}{n+1} dx = \frac{2}{\pi j}. \quad (10.75)$$

Opazimo, da vrednosti vsote (10.72) in integrala (10.74) sovpadata. Z uporabo Euler-Maclaurinove formule dobimo

$$\sum_{k=0}^{n+1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) \sin \frac{k\pi j}{n+1} = \int_0^{n+1} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \frac{\pi j x}{n+1} dx + \frac{1}{2} [\sin 0 + \sin(j\pi)] - \frac{j\pi}{6(n+1)} \cos 0 + \dots = \frac{2}{\pi j} \left[1 - \frac{\pi^2 j^2}{12(n+1)^2}\right]. \quad (10.76)$$

S formulo (10.76) lahko sestavimo preprost izraz, ki relativno dobro aproksimira vsoto (10.73) za poljubno vrednost j od $j = 1$ do $j = n$. V ta namen spremenimo drugi člen na desni strani enačbe (10.76) na naslednji način:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) \sin \frac{k\pi j}{n+1} \approx \frac{2}{\pi j} \left[1 - \frac{j^2}{(n+1)^2}\right]. \quad (10.77)$$

10.9. TEORIJE ELASTIČNOSTI S SKLOPLJENIMI NAPETOSTMI

Od izida klasične monografije bratov Cosserat [129] in prispevka Le Roux [274] se nadaljuje aktivnost v smeri posplošitve teorije elastičnosti, ki širijo možnosti za opisovanje učinkov, ki spremljajo elastične deformacije materialov z notranjo strukturo [257 – 259]. Dober opis teh teorij je mogoče najti v obsežnih pregledih, vključno z [308, 446]. Pričakovati je bilo, da bodo rezultati takšnega dela privedli do pomembne spremembe vrednosti koeficientov koncentracije in tipov napetostnih singularnosti [318, 434]. Kot problem, ki ovira uporabo posplošenih teorij za reševanje realnih problemov, lahko izpostavimo pomanjkanje kvantitativnih podatkov o fizikalnih konstantah teh teorij [308, 446]. Kot je omenjeno v [446], "posplošene teorije elastičnosti vsebujejo celo za izotropne materiale veliko dodatnih konstant, ki jih je težko ali nemogoče eksperimentalno določiti".

Teoretično so bili gradientni moduli predhodno določeni [291] za mikronehomogeni medij, sestavljen iz homogenih in izotropnih zrn, katerih Lamé-jeve konstante so naključne spremenljivke. Pred kratkim so definirali gradientne module za dvofazne kompozite v primeru nizke koncentracije vključkov v homogeni matriki [46, 78]. Dokazano je, da je možno oceniti vrednosti gradientnih modulov in pripadajočih karakterističnih dolžin za kristalno mrežo kovin z metodami teorije funkcionala gostote [406]. Vendar je trenutno problem določanja konstant teorije elastičnosti s sklopljenimi napetostmi z neposredno kontinualizacijo realne atomske mreže daleč od rešitve. V zvezi s tem je delo [292] zelo zanimivo. V prispevku so bili dobljeni zaključeni izrazi za pet fizikalnih konstant Toupin-Mindlinove teorije izotropne gradientne elastičnosti za polikristalne materiale. Polikristal obravnavamo kot mikronehomogen elastičen medij, ki je sestavljen iz homogenih anizotropnih kristalitov z naključno orientacijo. Dokazano je, da je gostota elastične energije polikristalnega medija nelokalno odvisna od neenakomernega polja povprečnih deformacij. V primeru gladkih polj povprečnih deformacij lahko smatramo, da je gostota energije lokalno odvisna ne samo od vrednosti deformacij, temveč tudi od vrednosti njihovih odvodov. Za to odvisnost v izotropnem primeru je značilno pet gradientnih modulov, poleg dveh elastičnih modulov klasične teorije elastičnosti. Prvič so dobljeni eksplicitni izrazi za gradientne module polikristalnih materialov.

Čprav je en sam vzorec polikristalnega telesa opisan z lokalno klasično teorijo elastičnosti mikronehomogenih teles, se povprečne makroskopske lastnosti reprezentativne družine polikristalnih vzorcev izkažejo za homogene v makroskopskem smislu. Zato lahko prehod od obravnave določenega vzorca do opisa povprečnih makroskopskih lastnosti družine vzorcev imenujemo homogenizacija. V tem primeru se izkaže, da makroskopske lastnosti opisuje nelokalna teorija elastičnosti. Homogenizacijo zveznega mikronehomogenega medija je potrebno razlikovati od kontinualizacije diskretnega elastičnega medija, kot je kristalna mreža [257–259]. Formalno oba pristopa vodita do teorij z nelokalno odvisnostjo gostote elastične energije od polja pomikov, fizikalno pa sta to popolnoma različni teoriji. Toda s fizikalnega vidika se rezultat kontinualizacije mreže bistveno razlikuje od homogenizacije zveznega mikronehomogenega medija. Prvič, nelokalni učinki za mrežo so v teoriji vključeni že od samega začetka zaradi medatomske sil dolgega dosega. Drugič, značilne dolžine nelokalnih mrežnih učinkov po velikosti ustrezajo redu medatomske razdalje, kar pomeni, da je njihov vpliv za nekaj redov velikosti manjši kot v primeru polikristalov. In tretjič, pravilni opis obnašanja mreže zahteva upoštevanje njene anizotropije, kar dodatno zaplete že tako obsežen opis nelokalnih učinkov. Na primer, lokalna Toupin-Mindlinova gradientna teorija, dobljena kot rezultat homogenizacije, zahteva uvedbo petih dodatnih fizikalnih konstant. Toda celo po kontinualizaciji preproste kubične mreže se pojavi enajst dodatnih fizikalnih konstant [45, 199].

10.10. ODNOSI MED FUNKCIJAMI DISKRETNIH ARGUMENTOV IN APROKSIMACIJSKIMI ANALITIČNIMI FUNKCIJAMI

Za kontinualizacijo moramo zgraditi funkcijo $u(x, t)$, ki predstavlja zvezno aproksimacijo funkcije diskretnega argumenta $u_j(t)$

$$u(jh, t) = u_j(t), \quad (10.78)$$

kjer je h razdalja med točkami diskretne funkcije.

Opazimo, da je zvezna funkcija definirana tako, da se v vozliščih $x = jh$ ne razlikuje od poljubne funkcije diskretnega argumenta. Zaradi tega lahko iz nabora interpolacijskih funkcij izberemo najbolj gladko funkcijo zaradi filtracije hitro nihajočih členov. Kot je prikazano v [258], je interpolacijska funkcija enolično določena, če zahtevamo, da je njena Fourierjeva slika

$$\bar{u}(q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-iqx} dx; u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(q, t) e^{iqx} dx \quad (10.79)$$

od nič različna samo na odseku $-\pi/h \leq q \leq \pi/h$. Iz tega pogoja dobimo

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \frac{\sin \frac{\pi(x-kh)}{h}}{\pi(x-kh)}, \quad (10.80)$$

Funkcija

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (10.81)$$

je znana normalizirana sinc funkcija, pogosto imenovana interpolacijska funkcija Whittaker-Kotelnikov-Shannon (WKS). Za vrednost te funkcije pri odstranljivi singularnosti v koordinatnem izhodišču $x=0$ smatramo limitno vrednost 1. Funkcija sinc postane s tem povsod analitična in s tem integrabilna funkcija. Tudi ta funkcija ima zanimive lastnosti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{\pi x} dx = 1, \quad (10.82)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi x}{h}}{\pi x} = \delta(x). \quad (10.83)$$

Ugotavljamo, da je koncept koncentrirane sile v teoriji elastičnosti s sklopljenimi napetostmi potrebno spremeniti v primerjavi s klasično teorijo elastičnosti. Delta-funkcijo je namreč potrebno zamenjati s funkcijo sinc zaradi učinka velikosti, ki ga povzroča notranja struktura materiala. To trditev ponazarja identiteta (10.83).

10.11. JEDRA INTEGRODIFERENCIALNIH ENAČB DISKRETNIH IN ZVEZNIH SISTEMOV

Oglejmo si verigo materialnih točk z enakimi masami m , ki se nahajajo v ravnotežnih stanjih v točkah osi x s koordinatami jh , $j = 0, 1, 2, \dots$ in so medsebojno elastično sklopljene z vzmetmi s togostmi c . Konstitutivne NDE so naslednje

$$m \frac{d^2 y_j(t)}{dt^2} = c(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (10.84)$$

kjer je $y_j(t)$ pomik j -te materialne točke iz njenega statičnega ravnotežnega položaja.

Namesto dimenzijskih koordinat x, y, t , uvedemo brezdimenzijske koordinate $\xi = x/h$, $\tau = t\sqrt{c/m}$, $z_j = y_j/h$ in prepišemo (10.84) na obliko

$$\frac{d^2 z_j}{d\tau^2} = z_{j+1} - 2z_j + z_{j-1}. \quad (10.85)$$

Diferencialno-diferenčna enačba (10.85) se lahko reducira na naslednjo integrodiferencialno enačbo [182, 400]:

$$\frac{\partial^2 z(x, \tau)}{\partial \tau^2} = - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_d(\xi - \xi_1) y(\xi_1, \tau) d\xi_1, \quad (10.86)$$

$$\Phi_d(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\left(\frac{q}{2}\right) \cos(q\xi) dq = \frac{2}{\pi\xi} \frac{(2\xi^2 - 1)}{(\xi^2 - 1)} \sin(\pi\xi). \quad (10.87)$$

Enačbe (10.86), (10.87) opisujejo medij z nelokalnimi interakcijami. Klasični zvezni približek je:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}. \quad (10.88)$$

Zamenjava diskretnega medija z zveznim je razlog za nastanek dveh napak. Prvi je povezan z zamenjavo integrala s končnimi mejami integracije z integralom z neskončnimi mejami integracije.

$$\Phi(\xi) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \sin^2\left(\frac{q}{2}\right) \cos(q\xi) dq. \quad (10.89)$$

Takšna zamenjava je iz fizikalnega vidika posledica prehoda iz diskretne na zvezni medij.

Drugi razlog za napako je povezan z aproksimacijo operatorja $4 \sin^2(q/2)$. Splošni pristop k izboljšanju aproksimacije (10.88) je sestavljen iz aproksimacije integralskega operatorja na desni strani enačbe (10.87) z odvodi višjega reda ob predpostavki, da je nelokalna lastnost šibka. Na primer, z zamenjavo integracijskih mej v integralu (10.87) z neskončnimi mejami in uporabo okrnjenih Maclaurinovih vrst

$$4 \sin^2\left(\frac{q}{2}\right) \approx q^2 - \frac{1}{12} q^4 + \frac{1}{360} q^6 \quad (10.90)$$

dobimo vmesni zvezni model (glej poglavje 10.6):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \frac{1}{360} \frac{\partial^6}{\partial \xi^6} \right) z. \quad (10.91)$$

Eden od načinov za izboljšanje lokalne aproksimacije je lahko natančnejša aproksimacija operatorja $\sin^2(q/2)$. Z uporabo PA za ta namen dobimo (glej poglavje 10.7)

$$4\sin^2\left(\frac{q}{2}\right) \approx q^2 / \left(1 + \frac{1}{12}q^2\right). \quad (10.92)$$

Z uporabo enačbe (10.92) dobimo naslednji model:

$$\left(1 - \frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}. \quad (10.93)$$

Dvotočkovna PA daje natančnejši približek (glej poglavje 10.7)

$$4\sin^2\left(\frac{q}{2}\right) \approx \frac{q^2}{1 + \alpha^2 q^2}, \quad \alpha^2 = 0.25 - \pi^{-2}. \quad (10.94)$$

Z uporabo enačbe (10.94) dobimo naslednji približek:

$$\left(1 - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}. \quad (10.95)$$

Raziščimo natančnost aproksimacije jedra integrodiferencialne enačbe (10.86), ki opisuje deformacijo diskretnega medija. Integral (10.87) ima naslednjo asimptotiko

$$\Phi_d(\xi) \rightarrow \frac{4}{\pi} \frac{\sin(\pi\xi)}{\xi} \approx 1.2732 \frac{\sin(\pi\xi)}{\xi} \quad \text{pri } \xi \rightarrow \infty, \quad (10.96)$$

$$\Phi_d(\xi) \rightarrow 2 \quad \text{pri } \xi \rightarrow 0, \quad (10.97)$$

$$\Phi_d(\xi) \rightarrow -1 \quad \text{pri } \xi \rightarrow 1. \quad (10.98)$$

Jedra integro-diferencialnih enačb klasične zvezne aproksimacije (10.90) $\Phi_c(\xi)$ in vmesne zvezne aproksimacije (10.91) $\Phi_{ci}(\xi)$ imajo naslednje izraze in asimptotiki:

$$\Phi_c(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q^2 \cos(q\xi) dq = \frac{(\pi^2 \xi^2 - 2) \sin(\pi\xi) + 2\pi\xi \cos(\pi\xi)}{\pi \xi^3}, \quad (10.99)$$

$$\Phi_c(\xi) \rightarrow \pi \frac{\sin(\pi\xi)}{\xi} \quad \text{pri } \xi \rightarrow \infty, \quad (10.100)$$

$$\Phi_c(\xi) \rightarrow \frac{\pi^2}{3} \approx 3.2899 \quad \text{pri } \xi \rightarrow 0, \quad (10.101)$$

$$\Phi_c(\xi) \rightarrow -2 \quad \text{pri } \xi \rightarrow 1, \quad (10.102)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{ci}(\xi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(q^2 - \frac{q^4}{12} + \frac{q^6}{360} \right) \cos(q\xi) dq = \\
&= \frac{\left(1 - \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^4}{360} \right) \pi \sin(\pi\xi)}{\xi} + \frac{\left(2 - \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^4}{60} \right) \cos(\pi\xi)}{\xi^2} - \\
&= \frac{\left(2 - \pi^2 + \frac{\pi^4}{12} \right) \sin(\pi\xi)}{\pi\xi^3} + \frac{\left(2 - \frac{\pi^2}{3} \right) \cos(\pi\xi)}{\xi^4} - \\
&= \frac{(2 - \pi^2) \sin(\pi\xi)}{\pi\xi^5} + \frac{2 \cos(\pi\xi)}{\xi^6} - \frac{2 \sin(\pi\xi)}{\pi\xi^7}.
\end{aligned} \tag{10.103}$$

$$\Phi_{ci}(\xi) \rightarrow \frac{\left(1 - \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^4}{360} \right) \pi \sin(\pi\xi)}{\xi} \approx 1.4077 \frac{\sin(\pi\xi)}{\xi} \quad \text{pri } \xi \rightarrow \infty, \tag{10.104}$$

$$\Phi_{ci}(\xi) \rightarrow \frac{\pi^2}{3} \left(1 - \frac{\pi^2}{20} + \frac{\pi^4}{840} \right) \approx 2.0479 \quad \text{pri } \xi \rightarrow 0, \tag{10.105}$$

$$\Phi_{ci}(\xi) \rightarrow -6 + \frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^4}{60} \approx -1.0437 \quad \text{pri } \xi \rightarrow 1. \tag{10.106}$$

Jedra integro-diferencialnih enačb zvezne aproksimacije (10.93) $\Phi_{qc}(\xi)$ in izboljšane zvezne aproksimacije (10.95) $\Phi_{qci}(\xi)$ lahko zapišemo na naslednji način

$$\Phi_{qc}(\xi) = \Phi_0(b^2, \xi) \quad \text{za } b^2 = 1/3, \tag{10.107}$$

$$\Phi_{qci}(\xi) = \Phi_0(b^2, \xi) \quad \text{za } b^2 = 1 - 4/\pi^{-2}, \tag{10.108}$$

kjer je

$$\Phi_0(b^2, \xi) = \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{q^2 \cos(2q\xi)}{1 + b^2 q^2} dq. \tag{10.109}$$

Z vrednotenjem integrala (10.109) dobimo

$$\begin{aligned}
\Phi_0(b^2, \xi) &= \frac{4 \sin \xi \pi}{\pi b^2 \xi} + \frac{8}{\pi b^3} \left[\operatorname{Re} \operatorname{Si} \left(\pi \xi + i \frac{2\xi}{b} \right) \sinh \left(\frac{2\xi}{b} \right) + \right. \\
&\quad \left. \left(\operatorname{Im} \operatorname{Ci} \left(\pi \xi + i \frac{2\xi}{b} \right) - \operatorname{Im} \operatorname{Ci} \left(i \frac{2\xi}{b} \right) \right) \cosh \left(\frac{2\xi}{b} \right) \right],
\end{aligned} \tag{10.110}$$

kjer sta $\operatorname{Si}(\cdot)$ in $\operatorname{Ci}(\cdot)$ znana sinusna in kosinusna integrala, $\operatorname{Ci}(y) = \gamma + \ln y + \int_0^y t^{-1} (\cos t - 1) dt$, $\operatorname{Si}(y) = \int_0^y t^{-1} \sin t dt$, γ je Eulerjeva konstanta, $\gamma = 0,5772156649 \dots$ (glej [2], poglavje 5).

Asimptotiki jeder zvezne aproksimacije (10.93) $\Phi_{qc}(\xi)$ in izboljšane zvezne aproksimacije (10.95) $\Phi_{qci}(\xi)$ sta

$$\Phi_{qc}(\xi) \rightarrow \frac{12\pi}{12+\pi^2} \frac{\sin(\pi\xi)}{\xi} \approx 1.7238 \frac{\sin(\pi\xi)}{\xi} \quad \text{pri } \xi \rightarrow \infty, \quad (10.111)$$

$$\Phi_{qc}(\xi) \rightarrow 4 \frac{3\pi - 6\sqrt{3}\arctg\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)}{\pi} \approx 2.2532 \quad \text{pri } \xi \rightarrow 0, \quad (10.112)$$

$$\Phi_{qc}(\xi) \rightarrow -1.2123 \quad \text{pri } \xi \rightarrow 1, \quad (10.113)$$

$$\Phi_{qci}(\xi) \rightarrow \frac{4}{\pi} \frac{\sin(\pi\xi)}{\xi} \quad \text{pri } \xi \rightarrow \infty, \quad (10.114)$$

$$\Phi_{qci}(\xi) \rightarrow \frac{4\pi^2 \left(\sqrt{\pi^2 - 4} - 2\arctg\left(\frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{2}\right) \right)}{\sqrt{(\pi^2 - 4)^3}} \approx 1.8360 \quad \text{pri } \xi \rightarrow 0, \quad (10.115)$$

$$\Phi_{qci}(\xi) \rightarrow -0.92036 \quad \text{pri } \xi \rightarrow 1, \quad (10.116)$$

Za dobro zvezno aproksimacijo je najpomembnejša kolikor mogoče natančna aproksimacija jedra integro-diferencialne enačbe pri $\xi \rightarrow \infty$ [258]. Najboljši približek daje zvezni približek (10.95), ki zagotavlja natančen približek do reda $O(\xi^{-2})$.

10.12. DISPERZIVNO ŠIRENJE VALOVANJA

Analizirajmo disperzivno širjenje valovanja v naslednji mreži sistema masa-vzmet

$$mY_{j\tau\tau}(\tau) = c[Y_{j-1}(\tau) - 2Y_j(\tau) + Y_{j+1}(\tau)]; j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (10.117)$$

kjer je $Y_j(t)$ pomik j -te materialne točke iz njenega statičnega ravnotežnega položaja, t je čas.

Če uporabimo nove spremenljivke $y_j(t) = Y_j(t)/h$, $t = \tau\sqrt{c/m}$, lahko enačbo (10.117) pretvorimo v naslednjo:

$$y_{jtt}(t) = y_{j-1}(t) - 2y_j(t) + y_{j+1}(t); j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (10.118)$$

Predpostavimo, da pri $t = 0$ vse mase v mreži mirujejo razen mase z indeksom nič, ki je bila premaknjena za 1

$$y_j(0) = \delta_{j0}, y_{jt}(0) = 0, \quad (10.119)$$

kjer je δ_{ji} Kroneckerjev delta.

Rešitev problema začetnih vrednosti (PZV) (10.4) je prvi dobil Schrodinger [400] in jo lahko zapišemo na naslednji način [182]

$$y_m(t) = J_{2m}(2t) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \cos \left[2t \sin \left(\frac{qh}{2} \right) \right] \cos(mhq) dq, \quad (10.120)$$

kjer je $J_{2m}(2t)$ Besselova funkcija prve vrste s celoštevilčnim redom $2m$, m označuje m - to vozlišče.

Analizirajmo zvezne približke. Uvedimo zvezno koordinato x , skalirano tako, da je $x = jh$ v vozliščih mreže. Predpostavimo, da je $y_m(t)$ diskretna aproksimacija zvezne funkcije $u(mh, t)$. Imamo

$$y_m(t) = u(mh, t). \quad (10.121)$$

Problem začetnih in robnih vrednosti za zvezno funkcijo $u(x, t)$ lahko zapišemo na naslednji način

$$u_{tt} - h^2 u_{xx} = 0, \quad (10.122)$$

Pogoji (10.119) se transformirajo z Whittaker-Kotelnikov-Shannonovo interpolacijsko funkcijo $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ (glej poglavje 10.10)

$$u(x, 0) = \frac{h \sin(\pi x/h)}{\pi x}, \quad u_t(x, 0) = 0. \quad (10.123)$$

Rešitev problema začetnih in robnih vrednosti (10.122), (10.123) lahko izrazimo kot sledi

$$u(x, t) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \cos(qht) \cos(qx) dq = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(\pi(t-x/h))}{t-x/h} + \frac{\sin(\pi(t+x/h))}{t+x/h} \right]. \quad (10.124)$$

Zvezna aproksimacija kvalitativno pravilno opisuje obnašanje diskretne mreže daleč od valovne fronte. Konstrukcija zveznega modela, ki bi povsem ustrezal diskretnemu primeru, zahteva dodatne raziskave.

10.13. GREENOVA FUNKCIJA

Dinamične Greenove funkcije za nelokalne (10.3), lokalne (10.18) in izboljšane lokalne (10.50) modele so

$$G(x) = -\frac{1}{2\sqrt{mch\omega}} \sin \left[2 \left(\arcsin \left(\frac{\omega}{2h} \sqrt{\frac{m}{c}} \right) \right) |x| \right] = -\frac{1}{ch} \cos \left[\left(\arcsin \left(\frac{\omega}{2h} \sqrt{\frac{m}{c}} \right) \right) |x| \right], \quad (10.125)$$

$$G(x) = -\frac{1}{2\sqrt{mch\omega}} \sin \left(\omega \sqrt{\frac{m}{c}} \frac{|x|}{h} \right), \quad (10.126)$$

$$G(x) = -\frac{1}{2\sqrt{mch\omega}} \sin \left(\frac{\omega}{h\sqrt{1 - \alpha^2 m \omega^2 h^2 / c}} \sqrt{\frac{m}{c}} |x| \right) \quad (10.127)$$

Kunin [258, 259] predlaga konstruiranje zvezne aproksimacije Greenovih funkcij diskretne verige z uporabo prvih korenov karakteristične enačbe. Omembe vredno je, da tudi aproksimacija (10.127) daje zadovoljive rezultate.

Zelo podrobno analizo Greenove funkcije za zvezne aproksimacije je mogoče najti v [116, 117].

10.14. DVOJNE IN TROJNE DISPERZIVNE ENAČBE

Oglejmo si neskončno mrežo, sestavljeno iz enakih delcev z maso m , povezanih z brezmasnimi vzmetmi s togostmi c . Enačba gibanja se glasi

$$m \frac{d^2 u_n}{dT^2} + c(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) = 0, \quad (10.128)$$

kjer je u pomik, n je številčni indeks delca, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, T je časovna spremenljivka.

Časovno harmonično valovanje predstavlja izraz

$$u = A \exp(-ikn) \exp(i\Omega T), \quad (10.129)$$

kjer je A amplituda, k je brezdimenzijsko valovno število in Ω je frekvenca.

Če vstavimo (10.129) v (10.128), dobimo disperzijsko enačbo

$$\omega^2 = 4 \sin^2(k/2), \quad (10.130)$$

kjer je ω brezdimenzijska frekvenca, $\omega^2 = \Omega^2 m/c$.

Preprosta analiza formule (10.130) pokaže, da je širjenje valovanja dovoljeno v frekvenčnem območju $0 < \omega < 2$. Pri dolgovalovni limiti, ko je $k \rightarrow 0$, frekvenca izgine, tj. $\omega \rightarrow 0$, tako da se nihanje ne pojavi in je gibanje preprosto prenašanje togega telesa. Nasprotni mejni primer, $k \rightarrow \pi$, opisuje stojno valovanje z ničelno skupinsko hitrostjo in od nič različno frekvenco, $\omega \rightarrow 2$. Ta režim lahko obravnavamo kot "skrit" ali "ujet" način, v smislu, da se energija na makro lestvici ne prenaša, vendar pa mreža na mikro lestvici izvaja antifazna nihanja. Ko je $\omega > 2$, postane valovno število k kompleksno. V tem območju spekter mreže kaže pasovno vrzel in signal eksponentno upada s koeficientom oslabitve, ki je enak imaginarnemu delu valovnega števila.

V zgoraj obravnavanih mejnih primerih je disperzijsko enačbo (10.130) mogoče izraziti z asimptotičnimi enačbami

$$\omega^2 \sim k^2 \quad \text{pri} \quad k \rightarrow 0, \quad (10.131)$$

$$\omega^2 \sim 4 - (\pi - k)^2 \quad \text{pri} \quad k \rightarrow \pi. \quad (10.132)$$

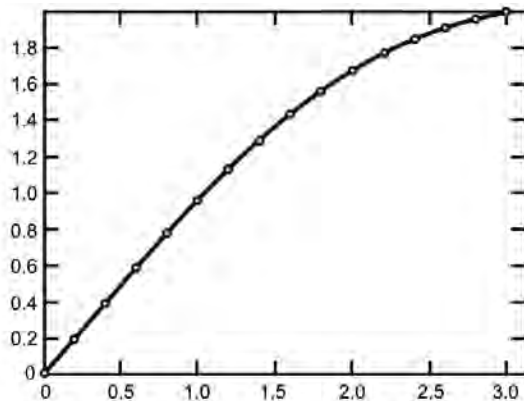
Z usklajevanjem izrazov (10.131) in (10.132) s pomočjo dvotočkovne PA (glej poglavje 10.7) dobimo

$$\omega^2 \approx \frac{a_1 k^2 + a_2 k^4}{1 + a_3 k^2 + a_4 k^4}. \quad (10.133)$$

Tukaj so koeficienti a_1, \dots, a_4 določeni tako, da morajo vodilni členi razvoja potenčnih vrst PA (10.133) pri $k \rightarrow 0$ in $k \rightarrow \pi$ ustrezno sovpadati s formulama (10.131) in (10.132) do reda $O(k^2)$ in $O[(\pi - k)^2]$. Z uporabo tega pogoja izpeljemo

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{64 - \pi^4}{\pi^6}, \quad a_3 = \frac{\pi^2 - 8}{4\pi^2}, \quad a_4 = \frac{64 + 4\pi^2 - \pi^4}{4\pi^6}. \quad (10.134)$$

Na sliki 10.6 je formula (10.133) primerjana s točno disperzijsko enačbo (10.130). Ugotavljamo, da se numerični rezultati v bistvu ne razlikujejo.



Slika 10.6. Disperzijska enačba mreže. Polne krivulje - natančna rešitev (10.130), krogi - PA (10.133).

Imenovalc izpeljane PA pri nobenem realnem k ni enak nič. Zato lahko izraz (10.133) prepíšemo na naslednji način

$$\omega^2 - a_1 k^2 - a_2 k^4 + a_3 \omega^2 k^2 + a_4 \omega^2 k^4 = 0. \quad (10.135)$$

Uvedimo zvezno koordinato X , skalirano tako, da je $X = nl$ v vozliščih mreže, kjer je l razdalja med delci.

Z uporabo brezdimenzijskih spremenljivk se časovno-harmonična rešitev (10.129) zapiše

$$u = A \exp(-ikx) \exp(i\omega t), \quad (10.136)$$

kjer je $x = X/l$, $t = T\sqrt{c/m}$, $k = 2\pi l/L$, L je valovna dolžina.

Potem zlahka pokažemo, da velja

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -k^2 u, & \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= k^4 u, & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\omega^2 u, \\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} &= \omega^2 k^2 u, & \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial t^2} &= -\omega^2 k^4 u. \end{aligned} \quad (10.137)$$

Disperzijska enačba (10.135) nam omogoča, da dobimo PDE, ki opisuje širjenje valovanja za vsa valovna števila $0 \leq k \leq \pi$:

$$a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + a_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - a_4 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial t^2} = 0. \quad (10.138)$$

Enačba (10.138) vključuje tri disperzijske člene in jo je mogoče obravnavati kot posplošitev dvojno disperzijskih enačb, ki so jih uporabljali številni avtorji za simulacijo elastičnega valovanja v valovodih z neobremenjeno zunanjo površino (glej na primer [369] in ustrezne reference). V teoriji valovanja v strukturiranih trdnih telesih je mogoče dobiti dvojne in trojne disperzijske enačbe z uvedbo nekaterih dodatnih notranjih prostostnih stopenj v sistemu (glej na primer pregled [74]). Opozoriti je treba, da takšni gradientni modeli vključujejo številne fenomenološke parametre, ki za realne materiale običajno ostajajo neznani. Nasprotno, pristop, predlagan v tem razdelku, nam omogoča, da ocenimo vse koeficiente enačbe (10.138), ki teoretično temelji na informacijah o notranji strukturi medija in njegovih lastnostih. Razviti makroskopski model je sposoben opisati dolgovalovni primer in je hkrati veljaven v visokofrekvenčni domeni v bližini praga zaustavitvenega pasu.

10.15. TODINA MREŽA

Naj imajo nelinearne vzmeti v 1D problemu potencialno energijo $U(r_n)$. Dinamiko verige ureja naslednji neskončni sistem PDE [401]:

$$\frac{\partial^2 r_n}{\partial t^2} = \frac{\partial U(r_{n+1})}{\partial r_{n+1}} - 2 \frac{\partial U(r_n)}{\partial r_n} + \frac{\partial U(r_{n-1})}{\partial r_{n-1}}, \quad (10.139)$$

kjer je $r_n = y_{n+1} - y_n$.

Predpostavimo, da je rešitev (10.139) potujoči val, $r_n = R(z)$, $z = n - vt$. Nato enačbo (10.139) prepišemo v naslednjo obliko:

$$v^2 R''(z) = U'(R(z-1)) - 2U'(R(z)) + U'(R(z+1)), \quad (10.140)$$

kjer je $(\dots)' = \frac{d(\dots)}{dz}$.

Uvedba zapisa $\Phi(z) = U'(R(z))$ in uporaba Fourierjeve transformacije za enačbo (10.140) daje

$$\bar{R}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} R(z) \exp(-iqz) dz; \quad \bar{\Phi}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z) \exp(-iqz) dz. \quad (10.141)$$

Iz (10.140) dobimo

$$v^2 \bar{R}(q) = f(q) \bar{\Phi}(q), \quad (10.142)$$

kjer je $f(q) = 4 \frac{\sin^2(q/2)}{q^2}$.

Izraz $f(q)$ lahko aproksimiramo s PA ali dvotočkovno PA na naslednji način

$$f(q) = \frac{1}{1+q^2/12} \quad \text{ali} \quad f(q) = \frac{1}{1+\alpha^2 q^2}, \quad (10.143)$$

kjer je $\alpha^2 = 0,25 - \pi^{-2}$

Kot rezultat dobimo enačbo zvezne aproksimacije

$$v^2 \left(1 - \frac{1}{12} \frac{d^2}{dz^2}\right) R(z) = U'(R(z)) \quad (10.144)$$

ali

$$v^2 \left(1 - a^2 \frac{d^2}{dz^2}\right) R(z) = U'(R(z)). \quad (10.145)$$

Na primeru Todine mreže [401] prikažemo tudi hkratno uporabo PA s postopkom perturbacije:

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = a [\exp(b(y_{n-1} - y_n)) - \exp(b(y_n - y_{n+1}))]. \quad (10.146)$$

Sistem ODE (10.146) je mogoče prevesti na psevdodiferencialno enačbo:

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4a \left[\sinh \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right]^2 \exp(-by) = 0. \quad (10.147)$$

Enačbo (10.147) lahko približno faktoriziramo [258]

$$\left[\sqrt{\frac{m}{ab}} \frac{\partial}{\partial t} - 2 \sinh \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{b}{2} y \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[\sqrt{\frac{m}{ab}} \frac{\partial}{\partial t} + 2 \sinh \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{b}{2} y \frac{\partial}{\partial x} \right] y = 0. \quad (10.148)$$

Za širjenje valovanja v desno smer dobimo

$$\left[\sqrt{\frac{m}{ah}} \frac{\partial}{\partial t} + 2 \sinh \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{h}{2} y \frac{\partial}{\partial x} \right] y = 0. \quad (10.149)$$

Z razvojem funkcije $\sinh \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right)$ v Maclaurinovo vrsto in obdržanjem členov do tretjega reda dobimo iz (10.149) naslednjo enačbo

$$\sqrt{\frac{m}{ab}} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{b}{2} y \frac{\partial y}{\partial x} = 0. \quad (10.150)$$

Z uporabo spremenljivk $t_1 = \sqrt{abt/m}$, $y_1 = 0,5yb$, se Korteweg de Vriesova enačba [258, 401] zapiše v naslednji obliki:

$$\frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} - y_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0, \quad (10.151)$$

Sestavimo regularizirano dolgovalovno enačbo, opisano v referencah [1, 72, 357]. Z uporabo PA se dobi

$$1 + \frac{1}{24} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sim \left(1 - \frac{1}{24} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1}. \quad (10.152)$$

Nato dobimo z uporabo (10.152) iz enačbe (10.151) (do najvišjih členov) naslednjo regularizirano dolgovalovno enačbo:

$$\left(1 - \frac{1}{24} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x} - y_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0. \quad (10.153)$$

Po drugi strani obstajajo nelinearne mreže s posebnim tipom nelinearnosti, ki omogočajo pridobivanje točnih rešitev (Toda, Ablowitzadik, Langmuir, Calogero itd. [72, 135, 139, 184, 305, 357]) v primeru neskončnih mreži ali v primeru robnih pogojev. V mnogih primerih imajo neintegabilni sistemi, kot je diskretna različica sinus-Gordonove enačbe, solitonu podobno rešitev.

Pojav točnih rešitev diskretnega sistema omogoča uporabo naslednjega pristopa: hitro spremenljivi del rešitve je zgrajen z uporabo diskretnega modela, medtem ko se za počasne komponente uporablja zvezna aproksimacija. Slednji pristop uporabljata Maslov in Omel'yanov [305], ki sta analizirala Todino mrežo s spremenljivimi koeficienti

$$m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} = -a_k [\exp b_k (y_k - y_{k-1}) - 1] + a_{k+1} [\exp(b_{k+1} (y_{k+1} - y_k) - 1)], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.154)$$

Solitonske rešitve konstruirajo na naslednji način: hitro spreminjajoči se del solitona konstruirajo s pomočjo Todine mreže s konstantnimi koeficienti, za počasni del rešitve pa uporabijo zvezno aproksimacijo. Nato se te rešitve ujemajo.

10.16. DISKRETNi PREGIBI

Obravnavamo nelinearno Klein-Gordonovo enačbo

$$C_1 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial V(z)}{\partial z} = 0, \quad (10.155)$$

Tukaj je $V(z)$ potencial, ki ima vsaj dva degenerirana minimuma.

Rešitev enačbe (10.155) opisuje naslednja enačba:

$$C \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial V(z)}{\partial z} = 0, \quad (10.156)$$

kjer je $x = y - ct$, $z(x) \equiv z(y - ct)$, $C = C_1 - c^2$.

Razlog za prehod iz PDE (10.155) na ODE (10.156) je invariantnost enačb glede na Lorentzovo transformacijo. Diskretna različica enačbe (10.156) ima obliko

$$-C(z_{n-1} - 2z_n + z_{n+1}) + \left. \frac{\partial V(z)}{\partial z} \right|_{z=z_n} = 0, \quad (10.157)$$

kjer je $z_n = z(n)$, pri čemer vzamemo brez izgube splošnosti širino mreže enako 1.

Ocena vrednosti Peierls-Nabarrove pregrade za pregibe v enačbi (10.157) predstavlja problem velikega pomena. Naslednji pristop je predlagan v [173,208]. Energija je ocenjena na podlagi diskretnega modela, diskretne vrednosti spremenljivk pa so nadomeščene z vrednostmi, izračunanimi v okviru zveznega modela. Ker je natančnost aproksimacije majhna, je bil v [172] predlagan perturbacijski pristop, ki temelji na povprečenju. Kot rezultat za model Φ^4 s potencialom $V(z) = \frac{1}{4}(z^2 - 1)^2$ izpeljemo naslednjo enačbo

$$C \frac{d^2 z}{dx^2} - z(z^2 - 1) \left(1 + \frac{1}{12C} - \frac{1}{4C} z^2 \right) = 0, \quad (10.158)$$

in za sinus-Gordonovo enačbo s potencialom $V(z) = 1 - \cos(z)$ ima izboljšana enačba obliko dvojne sinus-Gordonove enačbe

$$C \frac{d^2 z}{dx^2} - \sin(z) + \frac{1}{24C} \sin(2z) = 0. \quad (10.159)$$

Rešitev enačbe (10.158) je podana z [172]

$$z(x) = \frac{\tanh \left(\sqrt{1 - \frac{1}{6C}} \frac{x}{\sqrt{2C}} \right)}{1 - \frac{1}{6C} \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{1 - \frac{1}{6C}} \frac{x}{\sqrt{2C}} \right)}, \quad (10.160)$$

za enačbo (10.159) pa je:

$$z(x) = 2\pi - 2 \arctan \left[\sqrt{1 - \frac{1}{12C}} \operatorname{cosech} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{12C}} \frac{x}{\sqrt{C}} \right) \right], \quad x \geq 0, \quad (10.161)$$

$$z(x) = -2 \arctan \left[\sqrt{1 - \frac{1}{12C}} \operatorname{cosech} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{12C}} \frac{x}{\sqrt{C}} \right) \right], \quad x < 0. \quad (10.162)$$

Zvezna aproksimacija za diskretni model (10.157) daje

$$C \frac{d^2 z}{dx^2} - \left(1 - \frac{1}{12} \frac{d^2}{dx^2} \right) \frac{\partial V(z)}{\partial z} = 0. \quad (10.163)$$

Za model Φ^4 se dobi

$$C \frac{d^2 z}{dx^2} \left(1 - \frac{1}{12C} + \frac{1}{4C} z^2 \right) - z(z^2 - 1) + \frac{1}{2} z \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = 0. \quad (10.164)$$

Če je $C \gg 1$, lahko koeficient $1 - \frac{1}{12C} + \frac{1}{4C} z^2$ pretvorimo z uporabo PA:

$$1 - \frac{1}{12C} + \frac{1}{4C} z^2 \sim \left(1 + \frac{1}{12C} - \frac{1}{4C} z^2 \right)^{-1}. \quad (10.165)$$

Z uporabo enačbe (10.165) in izpustitvijo členov višjega reda, se enačba (10.164) zapiše v naslednji obliki

$$C \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - z(z^2 - 1) \left(1 + \frac{1}{12C} - \frac{1}{4C} z^2 \right) + \left\{ \frac{1}{2} z \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right\} = 0. \quad (10.166)$$

Ocenimo vpliv izrazov v oklepajih. V okolici ničle imajo linearni členi prevladujočo vlogo. Z rešitvijo (10.160) najdemo

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \sim \frac{1}{2C \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{\sqrt{2C}}\right)}. \quad (10.167)$$

Zato lahko izraz v oklepaju zanemarimo in enačba (10.166) je enaka enačbi (10.163), ki je bila dobljena v [355] na popolnoma drugačen način. Na podoben način lahko zvezni približek za sinus-Gordonovo enačbo zreduciramo na enačbo (10.164).

Enačbe, dobljene na podlagi zvezne aproksimacije, so:

$$C \frac{d^2 z}{dx^2} - z(z^2 - 1) \left(1 + \frac{\alpha^2}{C} - \frac{3\alpha^2}{C} z^2\right) = 0, \quad (10.168)$$

$$C \frac{d^2 z}{dx^2} - \sin(z) + \frac{\alpha^2}{2C} \sin(2z) = 0. \quad (10.169)$$

Rešitev enačbe (10.168) je

$$z(x) = \frac{\tanh\left(\sqrt{1 - \frac{2\alpha^2}{C}} \frac{x}{\sqrt{2C}}\right)}{1 - \frac{2\alpha^2}{C} \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{1 - \frac{2\alpha^2}{C}} \frac{x}{\sqrt{2C}}\right)}, \quad (10.170)$$

medtem ko imamo za enačbo (10.169) rešitve

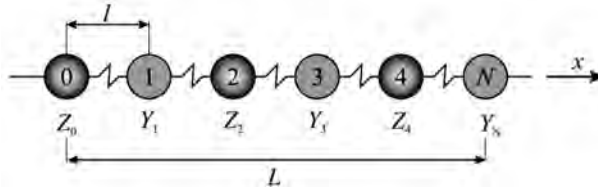
$$z(x) = 2\pi - 2 \arctan \left[\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{C}} \operatorname{cosech} \left(\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{C}} \frac{x}{\sqrt{C}} \right) \right], \quad x \geq 0, \quad (10.171)$$

$$z(x) = -2 \arctan \left[\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{C}} \operatorname{cosech} \left(\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{C}} \frac{x}{\sqrt{C}} \right) \right], \quad x \leq 0, \quad (10.172)$$

Rešitve (10.170), (10.172) omogočajo pridobitev vrednosti za Peierls-Nabarrovo pregrado z natančnostjo, ki je boljša od natančnosti, dobljene pri uporabi rešitev (10.160) - (10.162).

10.17. KONTINUALIZACIJA MREŽE β -FPU

Preučujemo nihanja enoatomske mreže, sestavljene iz enakih delcev, povezanih z elastičnimi vzmetmi s kubično nelinearnostjo (glej sliko 10.7). Sosednji delci so prikazani z različnimi barvami, s čemer ponazarjamo, da se lahko gibljejo z različnimi amplitudami, čeprav so mase delcev enake. Dolžina mreže je L , razdalja med delci pa l . Vsak delec je označen z indeksom n , $n = 0, 1, 2, \dots, N$, kjer je $N = L/l$. Skupno število delcev je $N + 1$.



Slika 10.7. Obravnavana mreža.

Iščemo zvezni model, ki je sposoben opisati tako akustične kot optične oblike gibanja. V skladu s tem uporabimo različne oznake Y in Z za pomike črnih in belih delcev. Vasiliev s soavtorji [447] je ta pristop imenoval model dveh polj (glej tudi [371]). Prav tako je skladen s postopki kontinualizacije, ki sta jih predlagala Zabusky in Deem [467]. V nadaljevanju sledimo prispevku [27].

Vodilne gibalne enačbe so

$$\begin{aligned}
 & m \frac{d^2 Y_n}{dT^2} + c_1 (2Y_n - Z_{n-1} - Z_{n+1}) + \\
 & c_3 (Y_n - Z_{n-1})^3 + c_3 (Y_n - Z_{n+1})^3 = 0, \\
 & m \frac{d^2 Z_{n+1}}{dT^2} + c_1 (2Z_{n+1} - Y_n - Y_{n+2}) + \\
 & c_3 (Z_{n+1} - Y_n)^3 + c_3 (Z_{n+1} - Y_{n+2})^3 = 0.
 \end{aligned} \tag{10.173}$$

Tukaj je T čas, m je masa delca, c_1 in c_3 sta elastična koeficienta vzmeti.

Taki sistemi se imenujejo β -Fermi-Pasta-Ulam (β -FPU) mreže [456]. V brezdimenzijski obliki lahko enačbe (10.173) zapišemo kot

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 y_n}{dt^2} + (2y_n - z_{n-1} - z_{n+1}) + \varepsilon (y_n - z_{n-1})^3 + \varepsilon (y_n - z_{n+1})^3 = 0, \\
 & \frac{d^2 z_{n+1}}{dt^2} + (2z_{n+1} - y_n - y_{n+2}) + \varepsilon (z_{n+1} - y_n)^3 + \varepsilon (z_{n+1} - y_{n+2})^3 = 0,
 \end{aligned} \tag{10.174}$$

kjer so $t = T\sqrt{c_1/m}$, $y_n = Y_n/A$, $z_n = Z_n/A$; A je amplituda nihanj, $\varepsilon = A^2 c_3/c_1$. Predpostavimo, da sosednji delci med seboj ne trčijo, zato je $|A| < l/2$.

Da bi ločili nizko- in visokofrekvenčna gibanja mreže, uvedimo akustično polje u_n in optično v_n polje, kot sledi

$$\begin{aligned}
 u_{n-1} &= \frac{y_n + z_{n-1}}{2}, & u_n &= \frac{y_n + z_{n+1}}{2}, & u_{n+1} &= \frac{y_{n+2} + z_{n+1}}{2}, \\
 v_{n-1} &= \frac{y_n - z_{n-1}}{2}, & v_n &= \frac{y_n - z_{n+1}}{2}, & v_{n+1} &= \frac{y_{n+2} - z_{n+1}}{2}.
 \end{aligned} \tag{10.175}$$

Tukaj u_n predstavlja način neprekinjenega nihanja (ko se sosednji delci gibljejo v fazi), v_n pa je ovojnica π nihajnega načina (ko se delci gibljejo protifazno, (glej poglavje 10.5).

Uvedimo zvezno koordinato X , skalirano tako, da je $X = nl$ v vozliščih mreže, kjer je l razdalja med delci. Uvedimo še brezdimenzijsko koordinato $x = X\pi/L$, $0 \leq x \leq \pi$, in

predpostavimo, da sta $u_n(t)$, $v_n(t)$ diskretni aproksimaciji para zveznih funkcij $u_n(x, t)$, $v_n(x, t)$, tj.

$$\overline{u_n}(t) = u(x, t)|_{x=n\eta}, \quad \overline{v_n}(t) = v(x, t)|_{x=n\eta}, \quad (10.176)$$

kjer je $\eta = \pi l/L = \pi/N$.

Iščemo dolgovalovno rešitev, katere prostorska perioda (ali perioda ovojnice) je veliko večja od razdalje med delci in je $\eta \ll 1$. Z uporabo Taylorjeve vrste lahko zapišemo

$$\begin{aligned} u_{n\pm 1}(t) &= u(x \pm \eta, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\pm\eta)^i}{i!} \frac{\partial^i u(x, t)}{\partial x^i}, \\ v_{n\pm 1}(t) &= v(x \pm \eta, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\pm\eta)^i}{i!} \frac{\partial^i v(x, t)}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (10.177)$$

Če enačbe (10.174) seštejemo in odštejemo eno od druge ter upoštevamo izraze (10.175) – (10.177), dobimo makroskopske dinamične enačbe za u in v . V okviru napake $O(\eta^6)$ dobimo

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \eta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 12\varepsilon\eta^2 v \left(v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{12} \eta^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \\ &\varepsilon\eta^4 \left\{ v^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + 4v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \\ &\left. 6v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (10.178)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 4v + 16\varepsilon v^3 + \eta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 12\varepsilon\eta^2 v \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + \\ &\frac{1}{12} \eta^4 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \varepsilon\eta^4 \left\{ v^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\ &\left. 3v \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \right] + 4v \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right] + 6 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (10.179)$$

Upoštevati je treba, da so zvočna in optična gibanja povezana z nelinearnimi členi v (10.178), (10.179). Spremenljivki η in ε sta majhna naravna parametra, ki ustrezno označujeta stopnjo heterogenosti in stopnjo nelinearnosti, $\eta \ll 1$, $|\varepsilon| \ll 1$.

V splošnem primeru je lahko asimptotično obnašanje modela (10.178), (10.179) odvisno od relacije skaliranja med majhnima parametroma η in ε . Če predpostavimo, da je $\varepsilon \sim \eta^\alpha$ lahko dobimo različne asimptotične rešitve za različne α .

Enačbe (10.178), (10.179) se pogosto uporabljajo za neskončne mreže [371,467]. Njihova uporaba za opisovanje dinamike končne verige zahteva nadaljnje raziskave, saj je sistem potrebno tako ali drugače diskretizirati. Morda bi bilo primerneje od samega začetka uporabiti normalne načine linearnih nihanj diskretnega sistema, ne da bi prešli na zvezno predstavitev.

10.18. AKUSTIČNA VEJA MREŽE α -FPU

Klasična kontinualizacija mreže α -FPU [456] ali homogenizacija periodično heterogene palice [26] vodi do iste PDE

$$E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (10.180)$$

Koeficienti enačbe (10.180) imajo različne vrednosti za palico oziroma mrežo, vendar v obeh primerih upoštevajo učinke nelinearnosti, disperzije in disipacije. Opozoriti je treba, da disipacija omejuje prenose energije med nihajnimi načini in na veliki časovni skali sklopitven načinov izgine. V tem smislu lahko disperzija in disipacija, ki delujeta v nelinearnem sistemu, povzročita kvalitativno podobne fizikalne posledice (Zabusky in Kruskal sta naletela na to analogijo pri analizi problema FPU, glej [456]).

Zato lahko poglobitvene sklepe iz [21] za problem nelinearnih nihanj kompozitne palice končne dolžine prenesemo na primer akustične veje mreže FPU.

Če je razdalja med delci relativno majhna v primerjavi z amplitudo nihanja, prihaja do učinka notranje resonance. Rezultata sta periodični prenos energije med različnimi nihajnimi načini in modulacija njihovih amplitud. Resonančni načini so sklopljeni v glavnem približku, tako da okrnitev na načine z nen ničelno začetno energijo ni mogoča.

Če se razdalja med delci poveča, disperzija zaduši vpliv nelinearnosti. Prenosi energije v načine višjega reda so omejeni, zato lahko okrnitev na le nekaj vodilnih načinov zagotovi razumen pristop. Nadaljnje povečanje disperzije odpravi izmenjavo energije med nihajnimi načini in notranje resonance postanejo zanemarljive.

10.19. ANTIKONTINUUMSKA MEJA

Oglejmo si diskretno nelinearno Schrodingerjevo enačbo v obliki

$$i\sigma_{jt}(t) = \varepsilon(\sigma_{j+1} - 2\sigma_j + \sigma_{j-1}) + |\sigma_j|^{2p}\sigma_j, \quad (10.181)$$

$p \in \mathbb{N}$ in ε določata sklopitveno konstanto.

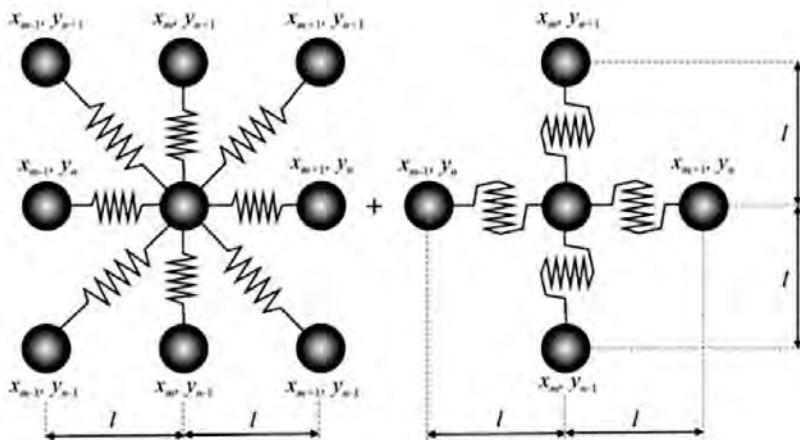
Meja antikontinuum [44] ustreza $\varepsilon = 0$, v tem primeru enačba (10.181) postane neskončen sistem nesklapljenih ODE.

10.20. 2D MREŽA

Za analizo 2D primera uporabimo 9-celično kvadratno mrežo (glej sliko 10.8) [316, 361]. Osrednji delcec je lahko v interakciji z osmimi sosednjimi delci v mreži. Masna središča štirih delcev so na vodoravni in navpični premici, medtem ko ležijo masna središča ostalih štirih sosednjih delcev vzdolž diagonal. Interakcije med sosednjimi delci modelirajo elastične vzmeti treh tipov. Horizontalne in vertikalne vzmeti s togostjo c_1 določajo interakcijske sile pri raztezanju/stiskanju materiala. Vodilne gibalne enačbe so [361]:

$$\begin{aligned}
m\ddot{u}_{m,n} &= c_1(u_{m,n-1} - 2u_{m,n} + u_{m,n+1}) + c_2(u_{m-1,n} - 2u_{m,n} + u_{m+1,n}) + \\
& 0.5c_0(u_{m-1,n-1} + u_{m+1,n-1} + u_{m-1,n+1} + u_{m+1,n+1} + \\
& v_{m-1,n-1} - v_{m+1,n-1} - v_{m-1,n+1} + v_{m+1,n+1} - 4u_{m,n}), \\
m\ddot{v}_{m,n} &= c_1(v_{m,n-1} - 2v_{m,n} + v_{m,n+1}) + c_2(v_{m-1,n} - 2v_{m,n} + v_{m+1,n}) + \\
& 0.5c_0(v_{m-1,n-1} + v_{m+1,n-1} + v_{m-1,n+1} + v_{m+1,n+1} + \\
& u_{m-1,n-1} - u_{m+1,n-1} - u_{m-1,n+1} + u_{m+1,n+1} - 4v_{m,n}).
\end{aligned} \tag{10.182}$$

Tukaj je $u_{i,j}$, $v_{i,j}$ diskretni vektor pomika za delec, ki se nahaja v točki (x_i, y_j) , $x_i = ih$, $y_i = jh$, c_0, c_1, c_2 so togosti diagonalnih, aksialnih vzdolžnih oziroma aksialnih strižnih vzmeti.



Slika 10.8. 2D mreža.

Standardni postopek kontinualizacije za enačbo (10.182) vključuje uvedbo zveznega polja pomikov $u(x, y)$, $v(x, y)$, tako da je $u(x_m, y_n) = u_{m,n}$, $v(x_m, y_n) = v_{m,n}$ in razvoj $u_{m\pm 1, n\pm 1}$, $v_{m\pm 1, n\pm 1}$ v Maclaurinovo vrsto v okolici $u_{m,n}$, $v_{m,n}$. Zvezna teorija drugega reda glede na mali parameter h je [361]:

$$\begin{aligned}
m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c_1 h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2c_0 h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \\
m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c_1 h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_2 h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2c_0 h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{10.183}$$

Seveda je mogoče sestaviti enačbe višjega reda, vendar, kot je prikazano v [361], to vodi do izjemnih težav.

Konstruirajmo poldiskretno aproksimacijo. Z uporabo zamaknjenih transformacij

$$u_k = (-1)^k u, v_k = (-1)^k v, \tag{10.184}$$

se dobi:

$$\begin{aligned}
 m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 4 \left(c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\
 m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 4 \left(c_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right).
 \end{aligned}
 \tag{10.185}$$

Kot v primeru 1D (glej enačbo (10.32)), enačbi (10.185) ne vsebujeta parametra h^2 . Obstoj zveznih aproksimacij (10.183) in (10.185) daje možnost konstruiranja sestavljenih enačb, ki so ustrezne na celotnem območju frekvenc in nihajnih oblik 2D mreže masnih delcev. Poudarimo, da lahko kompozitne enačbe po Van Dyku [443] dobimo kot rezultat sinteze mejnih primerov. Glavno idejo metode sestavljenih enačb lahko formuliramo na naslednji način [443]:

- (i) Identificirajmo člene v diferencialnih enačbah, katerih zanemaritev v neposrednem približku je odgovorna za neenakomernost.
- (ii) Aproksimirajmo te izraze, kolikor je mogoče, hkrati pa ohranimo njihov bistveni značaj v območju neenakomernosti.

V našem primeru bodo sestavljene enačbe skonstruirane tako, da se (približno) prekrivajo z enačbami (10.183) za dolgovalovno rešitev in z enačbami (10.185) za kratkovalovno rešitev. Kot rezultat opisanega postopka dobimo

$$\begin{aligned}
 m \left(1 - a^2 h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - a^2 h^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c_1 h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \\
 &\quad (c_1 + c_2) h^4 \gamma^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 2c_0 h^2 \left[1 + \frac{1}{4(c_1 + c_2)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \\
 m \left(1 - a^2 h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - a^2 h^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c_1 h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_2 h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \\
 &\quad (c_1 + c_2) h^4 \gamma^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + 2c_0 h^2 \left[1 + \frac{1}{4(c_1 + c_2)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned}
 \tag{10.186}$$

Tukaj sta $a^2 = 0,25 - \pi^{-2}$, $\gamma^2 = (4 - \pi^2 + 8\pi^2 a^2)/(4\pi^2)$.

Za 1D primer dobimo iz enačbe (10.186) enačbo (10.50) za u in enako enačbo za v . Pri majhni variabilnosti prostorskih in časovnih spremenljivk se enačba (10.186) lahko približa enačbi (10.183), za veliko variabilnost prostorskih in časovnih spremenljivk pa se enačba (10.186) lahko približa enačbi (10.185). Za nadaljnje rezultate glej [18, 25, 32].

10.21. SIMULACIJE MOLEKULARNE DINAMIKE IN KONTINUALIZACIJA: ROKOVANJE

Simulacije molekularne dinamike (MD) so se uveljavile kot orodje za pojasnjevanje kompleksnih fizikalnih pojavov, kot sta lom in plastičnost trdnih snovi. Vendar so dolžine in časovne skale, preizkušene z uporabo MD, še vedno precej omejene. Da bi premagali to težavo, je možno uporabiti MD le v lokaliziranih območjih, kjer je pomembna dinamika na atomski skali, povsod drugje pa makroskopsko simulacijsko metodo (na primer MKE) [452]. Nato se pojavi problem povezovanja MD in simulacij mehanike kontinuuma. Na to temo je bilo objavljeno veliko prispevkov, glej npr. [65, 66] in tam navedene reference za majhen reprezentativni primer. S fizikalnega vidika je problem povezan s spojitvijo bodisi nelokalne in

lokalne mehanike kontinuuma [287] ali diskretnih in kontinuamskih modelov (spojitev atomističnega modela s kontinuumom) [58,346,360,463] ali, po možnosti, lokalnih in globalnih modelov [64]. Predlagani pristop praviloma temelji na tako imenovanih premostitvenih (prekrivajočih) domenah (»območjih lepljenja«, »regiji rokovanja«), glej npr. [212]. Kot je navedeno v [66], so te metode tesno povezane s prekrivajočimi se Schwarzovimi metodami [422], ki izhajajo iz klasičnega izmeničnega Schwarzovega algoritma. Glavno idejo teh metod lahko opišemo na naslednji način: del sistema v bližini defekta ali meje obravnavamo v okviru diskretnih medijev, preostali del pa naj bi bil homogeniziran.

Znotraj domene prekrivanja bi se morale diskretne in homogenizirane rešitve v nekem smislu ujemati. Na primer, diskretne rešitve se lahko interpolirajo (zvezne rešitve pa se nasprotno lahko diskretizirajo). »V tem prehodnem območju tvorimo približke, tako da obravnavamo vozlišča končnih elementov kot atome ali obratno, da prilagodimo nezdružljivosti med nelokalnim atomističnim opisom in lokalnim opisom končnih elementov« [346]. Za obravnavo tega problema je bila v [58] uporabljena linearna interpolacija, vendar pa je mogoče uporabiti tudi druge vrste interpolacije. Lepljenje lokalnih in globalnih rešitev lahko temelji tudi na energetski metodi [66]; druga možnost je metoda Lagrangeovih multiplikatorjev ali razširjena Lagrangeova metoda [463].

Alternativni pristop vključuje oblikovanje določenih umetnih robnih prestopnih pogojev na vmesniku med diskretnimi in zveznimi domenami. Kot je omenjeno v [151], so numerične simulacije kristalnih defektov nujno omejene na končne računalniške domene, ki zagotavljajo umetne robne pogoje, ki posnemajo učinek vdelaive defekta v dejansko neskončno kristalno okolje.

Na koncu se sklenimo razpravo o problemih, ki so tesno povezani s krhkim lomom elastičnih trdnih teles [416–421]. Upoštevajmo, da zvezni model, ki ne vključuje strukture materiala, ni primeren, saj se morebitna razpoka materiala pojavi na ravni strukture materiala. To je razlog, zakaj nekaterih bistvenih lastnosti poškodb klasična teorija zveznega modela ne prikazuje. Na primer, v diskretnem mediju širjenje valovanja prenese del energije iz elastičnega telesa v robove razpoke. Zato je uporaba nelokalnih teorij med modeliranjem eksplozijskega procesa (na primer za kompozitne materiale) zelo obetavna. Kot je omenjeno v [256], »stalni razvoj naprednih materialov terja, da koncept »ena velikost za vse« ne bo več edini inženirski pristop v smislu napovedovanja in preprečevanja okvar zaradi utrujenosti ter zmanjševanja z njimi povezanih stroškov«.

10.22. KONTINUALIZACIJA IN DISKRETIZACIJA

Povezava med temi operacijami je globoko netrivialna, kar je podrobno prikazano v poglavju 11. Tu se osredotočamo na več vprašanj, ki so neposredno povezana z zgoraj opisanimi pristopi. V teoriji končnih razlik se pogosto uporablja metoda diferencialne aproksimacije [407]. Lahko se opiše na naslednji način. Primerjajmo lokalni operator

$$-h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (10.187)$$

z nelokalnim operatorjem

$$\sin^2 \left(-\frac{ih}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (10.188)$$

V prejšnjih poglavjih smo nelokalni operator aproksimirali z neskončnim številom lokalnih operatorjev:

$$4\sin^2\left(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right) = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hbar^4}{12}\frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\hbar^6}{360}\frac{\partial^6}{\partial x^6} + \dots \quad (10.189)$$

Z uporabo (10.189) dobimo

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 4\sin^2\left(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\hbar^4}{12}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\hbar^6}{360}\frac{\partial^6}{\partial x^6} - \dots \quad (10.190)$$

Z uporabo istega postopka za lokalne operatorje $\frac{\partial^4}{\partial x^4}, \frac{\partial^6}{\partial x^6}, \dots$, dobimo nelokalno diferenčno shemo [302]. Kot rezultat lahko lokalni operator (10.187) natančno aproksimiramo z neskončnim številom nelokalnih operatorjev [429]

$$-\hbar^2\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} y_{n-k}(t) + \frac{\pi^2}{3} y_n(t). \quad (10.191)$$

10.23. MOŽNE POSPLOŠITVE IN APLIKACIJE TER ODPRTI PROBLEMI

Reševanje problemov inženiringa in biologije [134] zahteva nadaljnje študije mrež s kompleksno strukturo: heksagonalne, cikcakaste, kiralne itd. [110, 126, 250, 294, 296, 297, 373], kot tudi mrež z interakcijo ne le med najbližjimi, temveč tudi bolj oddaljenimi sosedi [249].

Ustvarjanje novih metamaterialov zahteva preučevanje sistemov »masa v masi« in mrež z notranjimi resonatorji [213, 478]. Morda bodo za ta namen koristne tritočkovne ali večtočkovne Padéjeve aproksimacije.

Zanimiv objekt za preučevanje so mreže z velikimi deformacijami [95,335,341, 342]. Primer kompleksne negladke nelinearnosti so Hertzovi kontakti, ki opisujejo elastične interakcije med zrni enoatomske mreže v odsotnosti predkompresije (tj. v tako imenovanem režimu zvočnega vakuumu) [335]. Omenimo lahko tudi raziskavo diskretnih zračnikov in nelinearnih normalnih načinov [119].

Površinska napetost [154] in mikrostrukturne nestabilnosti [244] so prav tako lahko predmet nadaljnjih študij. Upoštevajmo, da lahko diskretne sisteme opišemo z enačbami z mikronehomogenimi koeficienti. Homogenizacijo tega sistema [253] lahko uporabimo za kontinualizacijo.

Končno lahko ugotovimo, da je najzahtevnejši problem študija resnične interakcije atomov v verigi na podlagi Mie, Lennard - Johnesovega ali bolj realističnih potencialov. Najbolj obetavna je kombinacija pristopov MD s kvantno mehaniko.

11 Regularna in kaotična dinamika, temelječa na kontinualizaciji in diskretizaciji

V tem poglavju so predlagani in analizirani algoritmi kontinualizacije in diskretizacije, ki ohranjajo različne lastnosti izvornih diferencialno-diferenčnih enačb (DDE) in navadnih diferencialnih enačb (NDE). Logistična NDE služi kot primer determinističnega sistema, logistična DDE pa je klasičen primer preprostega sistema z zelo zapletenim (kaotičnim) obnašanjem. Tukaj predstavljamo primere deterministične diskretizacije in kaotične kontinualizacije. Postopek kontinualizacije temelji na Padéjevimi aproksimacijami. Da bi pravilno opisali dinamiko dobljene NDE, smo izmerili značilne parametre kaotičnih dinamičnih sistemov, kot so eksponenti po Lyapunovu in dimenzije po Lyapunovu.

11.1. UVOD

Diferencialne in diferenčne enačbe so glavno orodje za matematično modeliranje fizikalnih, ekonomskih, okoljskih in družbenih procesov [309, 397, 405]. Za preučevanje diferencialnih enačb se uporablja celoten arzenal diferencialne in funkcionalne analize. Diferenčne enačbe so standardni objekti za numerično analizo. Povezave med diferencialnimi in diferenčnimi enačbami so netrivialne, poleg tega pa lahko algoritmi diskretizacije ali kontinualizacije pogosto bistveno spremenijo naravo njihovih rešitev. Zato je preučevanje pristopov, ki omogočajo, da te operacije ohranijo osnovne lastnosti izvornih sistemov, pomembna tema raziskav. Za boljšo osvetlitev obravnavanega problema izberemo in analiziramo najenostavnejše možne primere, to so logistične diferencialne in diferenčne enačbe.

Verhulst spada med prve, ki so preučevali naslednjo NDE

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (11.1)$$

in jo poimenoval logistična enačba [449, 450].

Pozneje so raziskovalci predlagali različice Verhulstove enačbe in obravnavali diferenčno logistično enačbo, dobljeno iz logističnih modelov. Prva uporaba NDE (11.1) je bila povezana s populacijskimi problemi, na splošno pa s problemi, ki so nastali v ekologiji. Če se Verhulstov model uporablja za opis spremembe velikosti populacije N v času t , potem je v enačbi (11.1) r tako imenovani Malthusov parameter (hitrost največje rasti populacije), K pa parameter, odgovoren za nosilno zmogljivost (tj. največja trajnostna populacija). Enačba (11.1) se pogosto uporablja pri problemih ekologije, ekonomije, kemije, medicine, farmakologije in epidemiologije [211, 309, 321, 397, 405, 424]. Ta model je praviloma preveč poenostavljen za kvantitativne ocene, vendar odraža ključne kvalitativne značilnosti obravnavanih procesov.

Enačbo (11.1) lahko reduciramo v obliko

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-x), \quad (11.2)$$

kjer je $x = N/K$.

Uvedemo naslednji začetni pogoj

$$x(0) = a. \quad (11.3)$$

Cauchyjev problem (11.2), (11.3) ima eksaktno rešitev

$$x = \frac{a}{a + (1-a)e^{-rt}}. \quad (11.4)$$

Diskretno logistično enačbo lahko zapišemo na naslednji način

$$x_{n+1} = Rx_n(1-x_n), \quad (11.5)$$

kjer parameter R označuje stopnjo reprodukcije (rast) prebivalstva. Pri tem je $R = rh$, parameter h pa določa čas med zaporednimi meritvami.

Omeniti je treba, da nelinearna diferenčna enačba (11.5) kaže vilasto bifurkacijo (podvajanje period), ki vodi v kaos [211, 321].

V nadaljevanju bomo analizirali nekoliko drugačno diskretno logistično enačbo

$$x_{n+1} - x_n = Rx_n(1-x_n). \quad (11.6)$$

Ta enačba ima dva ravnotežna položaja

$$x_n = 0, \quad (11.7)$$

$$x_n = 1. \quad (11.8)$$

Diferencialno enačbo (11.6) dobimo iz NDE (11.2) z uporabo diferenčne sheme za odvod s korakom diskretizacije h .

Navadna diferenčna enačba (NΔE) (11.6) je dovolj podobna rešitvam naslednje enačbe [309, 321]

$$x_{n+1} = x_n \exp[R(1-x_n)]. \quad (11.9)$$

Po drugi strani pa je NΔE (11.9) po obnašanju dovolj podobna rešitvam enačbe (11.6) za $x_n \approx 1$. Začetni pogoj za NΔE (11.5), (11.6) ali (11.9) se zapiše kot

$$x_0 = a. \quad (11.10)$$

Diskretni Cauchyjevi problemi (11.5) in (11.10), (11.6) in (11.10) ali (11.9) in (11.10) za dovolj velike vrednosti parametra R kažejo zapleteno kaotično obnašanje sistema [211, 309, 321, 397, 405, 424]. Za NΔE (11.6), kot je prikazano v [405] za $R = 2,3$, začne rešitev periodično nihati okoli vrednosti $x = 1$. Ta rešitev je stabilna, dokler je $R < \sqrt{6} \approx 2449$. Za $R = 2,500$ proces preide v ustaljena periodična nihanja s periodo štiri. Omenimo lahko, da ima kaotični prag za NΔE (11.9) vrednost 2,6824 [309, 321].

Po opisu predmetov naše raziskave nadaljujemo s postavitvijo njenih ciljev. Tako zvezne kot diskretne logistične enačbe so bile obsežno raziskane. Rezultati teh študij so opisani v številnih delih, vključno s knjigami in preglednimi članki [113, 211, 309, 321, 397, 424]. Naša študija se osredotoča na primerjavo rezultatov, dobljenih z diskretizacijo in kontinualizacijo nelinearnih NDE in NΔE. Uporabili smo logistične enačbe kot priročne in enostavne primere za proučevanje omenjenega problema.

Ob raziskovanju omenjenih problemov se porajajo naslednja vprašanja.

Prvi problem: ali je možno NDE (11.2) diskretizirati tako, da ima nastala NΔE samo regularne rešitve? To praktično pomembno vprašanje je bilo precej dobro raziskano [68, 205, 234, 359], zato ga obravnavamo na kratko.

Po drugi strani mnogi raziskovalci poudarjajo, da so diskretni logistični modeli primernejši za opis bistva fizikalnih, ekonomskih ali bioloških procesov, ker vključujejo kaotične režime [405]. V zvezi s tem je naš drugi problem naslednji: ali obstaja kontinualizacija prvotne NΔE, da ima nastala NDE kaotično rešitev?

Težko je pričakovati, da bo standardna kontinualizacija, ki temelji na Taylorjevi vrsti, dala želeni rezultat. Lahko pa ga dosežemo z uporabo Padéjevih aproksimacij (glej 10. poglavje).

11.2. INTEGRABILNE NAVADNE DIFERENČNE ENAČBE (NΔE)

Kot je omenjeno v [113], lahko neobrnjive preslikave, kot je logistična preslikava, prikazujejo kaos. Zato je zanimivo poiskati transformacijo izvorne diskretne logistične enačbe v obliko, ki vodi do determinističnih rešitev.

V skladu s predlaganim v [205] prepišemo NΔE (11.6) v naslednjo obliko

$$x_{n+1} - x_n = Rx_n - Rx_{n+1}x_n. \quad (11.11)$$

Ta predstavitev omogoča izraziti x_{n+1} ne kot polinom, ampak kot racionalno funkcijo v odvisnosti od x_n . Enačba (11.11) z začetnim pogojem (11.10) ima natančno rešitev oblike

$$x_n = \frac{a}{a + (1-a)(1+R)^{-n}}. \quad (11.12)$$

Tako predstavitev (11.11) omogoča pridobitev diferencne sheme brez kaotičnega obnašanja.

11.3. KONTINUALIZACIJA S PADÉJEVIMI APROKSIMACIJAMI

Poskusimo zgraditi zvezni model, ki opisuje kaotično vedenje, kot ga kaže prvotna NΔE. Kot je omenjeno v [113], mora imeti nelinearna NDE red $x \geq 3$ za generiranje kaotičnega obnašanja.

Za konstruiranje logistični sorodne NDE s kaotičnim vedenjem, so bile vključene dodatne modifikacije z uvedbo odsekoma konstantnega argumenta, zakasnitve in frakcijskega odvoda [9, 221, 327, 403, 430]. Tukaj uporabljamo samo kontinualizacijo, ki temelji na Maclaurinovem razvoju in Padéjevih aproksimacijah.

Da bi izvedli kontinualizacijo NΔE (11.6), uvedemo zvezno koordinato x , skalirano tako, da je $x_n = x(nh)$. Ob predpostavki, da je $x(t)$ rahlo spreminjajoča se funkcija, uporabimo Maclaurinov razvoj v območju ravnotežnega položaja (11.7)

$$x_{n+1} - x_n = hx_t + \frac{h^2}{2}x_{tt} + \frac{h^3}{6}x_{ttt} + \dots \quad (11.13)$$

Enačba tretjega reda, dobljena z uporabo zgoraj opisanega postopka, ima naslednjo obliko

$$h^3x_{ttt} + 3h^2x_{tt} + 6hx_t - 6Rx + 6Rx^2 = 0; \quad (11.14)$$

in opisuje popolnoma regularne deterministične trajektorije.

Upoštevajmo nihanja okoli drugega ravnotežnega položaja enačbe (11.6), $x_n = 1$. Z zamenjavo spremenljivk

$$\bar{x}_n = 1 + y_n, \quad |y_n| \ll 1, \quad (11.15)$$

dobimo

$$y_{n+1} - y_n = -Ry_n(1 + y_n), \quad (11.16)$$

Začetni pogoj za to diferenčno enačbo je

$$y_0 = \alpha, \quad 0 < \alpha \ll 1, \quad (11.17)$$

Predpostavimo, da je $y(t)$ rahlo spreminjajoča se funkcija, potem Maclaurinov razvoj daje rezultat

$$y_{n+1} - y_n = hy_t + \frac{h^2}{2}y_{tt} + \frac{h^3}{6}y_{ttt} + \dots \quad (11.18)$$

NDE petega reda, ki temelji na tem razvoju, lahko zapišemo na naslednji način

$$h \frac{d}{dt} \left[1 + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} + \frac{h^2}{6} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{h^3}{24} \frac{d^3}{dt^3} + \frac{h^4}{120} \frac{d^4}{dt^4} \right] y = -Ry(1 + y). \quad (11.19)$$

Diferencialni operator v oglatem oklepaju pretvorimo v diagonalni Padéjevo aproksimacijo:

$$1 + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} + \frac{h^2}{6} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{h^3}{24} \frac{d^3}{dt^3} + \frac{h^4}{120} \frac{d^4}{dt^4} \approx \frac{1}{3} \frac{h^2 \frac{d^2}{dt^2} + 6h \frac{d}{dt} + 60}{h^2 \frac{d^2}{dt^2} - 8h \frac{d}{dt} + 20}. \quad (11.20)$$

Potem

$$\left(h^3 \frac{d^3}{dt^3} + 6h^2 \frac{d^2}{dt^2} + 60h \frac{d}{dt} \right) y = -3R \left(h^2 \frac{d^2}{dt^2} - 8h \frac{d}{dt} + 20 \right) y(1 + y), \quad (11.21)$$

in po rutinskih transformacijah dobimo

$$\begin{aligned} & h^3 \frac{d^3 y}{dt^3} + 3h^2(2 + R(1 + 2y)) \frac{d^2 y}{dt^2} + 12h(5 - 2R) \frac{dy}{dt} - \\ & 48hRy \frac{dy}{dt} + 6Rh^2 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + 60Ry(y + 1) = 0. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Formulirajmo začetne pogoje za NDE tretjega reda (11.22). Na podlagi začetnega pogoja prvotne diferenčne enačbe (11.17) dobimo

$$y(0) = \alpha. \quad (11.23)$$

Izberemo dodatne začetne pogoje za enačbo (11.22) v naslednji obliki

$$\begin{aligned} \text{at } t=0: \quad y &= \alpha, \quad \frac{dy}{dt} \approx \frac{y_1 - y_0}{h} = -\frac{R\alpha(1+\alpha)}{h}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &\approx \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} = \frac{R^2\alpha(1+\alpha)(\alpha + (1+\alpha)(1-R\alpha))}{h^2}. \end{aligned} \quad (11.24)$$

Problem začetne vrednosti (11.22), (11.24) je mogoče transformirati z uporabo brezdimenzijskega časa $T = t/h$ v naslednjo obliko

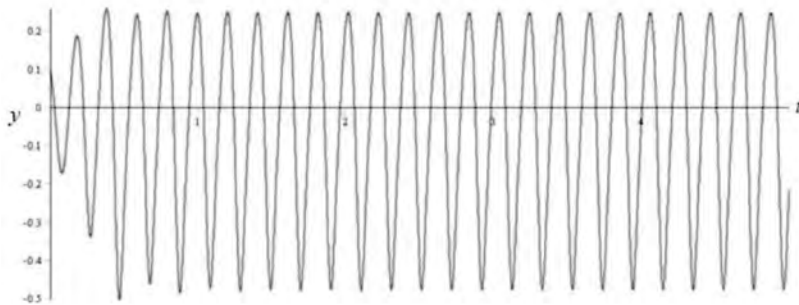
$$\begin{aligned} \frac{d^3y}{dT^3} + 3(2+R(1+2y))\frac{d^2y}{dT^2} + 12(5-2R)\frac{dy}{dT} - \\ 48Ry\frac{dy}{dT} + 6R\left(\frac{dy}{dT}\right)^2 + 60Ry(y+1) = 0, \end{aligned} \quad (11.25)$$

$$\begin{aligned} \text{at } T=0: \quad y &= \alpha, \quad \frac{dy}{dT} = -R\alpha(1+\alpha), \\ \frac{d^2y}{dT^2} &= R^2\alpha(1+\alpha)(\alpha + (1+\alpha)(1-R\alpha)). \end{aligned} \quad (11.26)$$

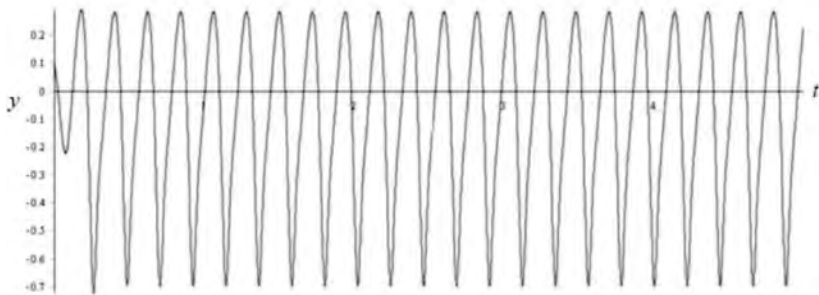
11.4. NUMERIČNI IZRAČUNI

Numerično integracijo Cauchyjevega problema (11.25), (11.26) izvedemo z metodo Adams-Bashforth-Moulton (metoda napovedovalca-korektorja).

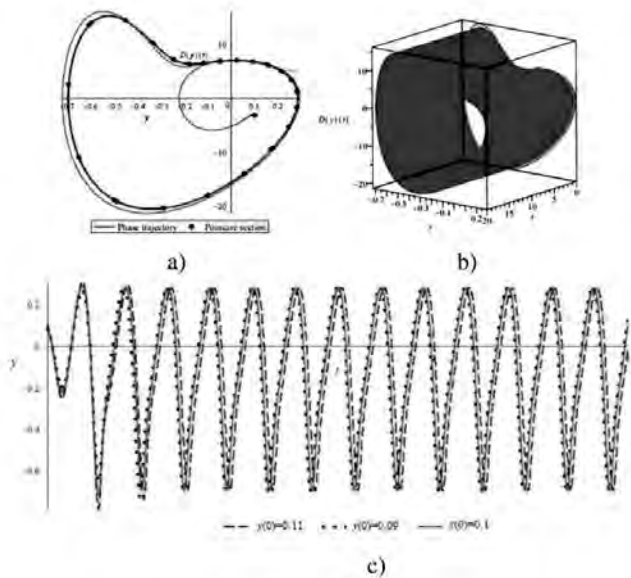
Prikazane numerične rezultate lahko razdelimo v tri razrede: periodična nihanja, periodična nihanja s subharmoniki in kaotična nihanja. Za $2,5 \leq R \leq 2,88$ dobimo periodična nihanja (glej slike 11.1 - 11.3).



Slika 11.1. Numerična rešitev Cauchyjevega problema (11.25), (11.26) za $R = 2,5$ prikazuje periodično gibanje.



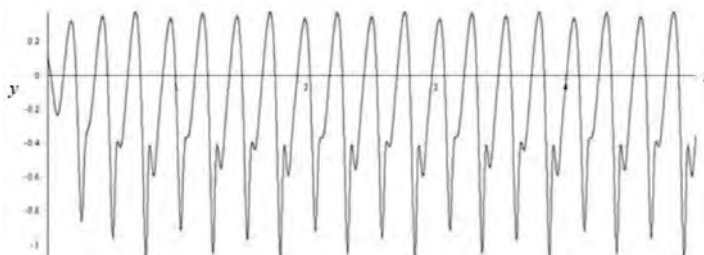
Slika 11.2. Z naraščanjem parametra R ($R = 2,86$ za to sliko) numerična rešitev Cauchyjevega problema (11.25), (11.26) kaže periodično gibanje, ki se nekoliko razlikuje od tistega, prikazanega na sliki 11.1.



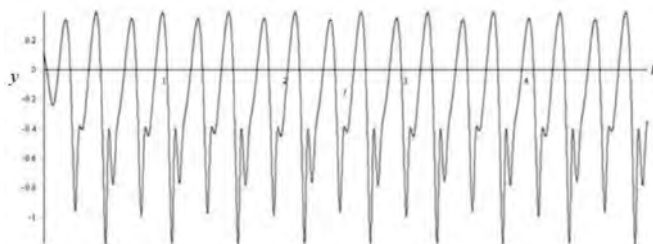
Slika 11.3. Numerična rešitev Cauchyjevega problema (11.25), (11.26) za $R = 2,86$.

Slika 11.3 prikazuje fazno trajektorijo, Poincaréjev odsek (glej sliko 11.3a) in trajektorije v 3D prostoru (glej sliko 11.3b). Majhna sprememba začetnih pogojev za funkcijo y vodi do majhne spremembe rešitve (glej sliko 11.3c).

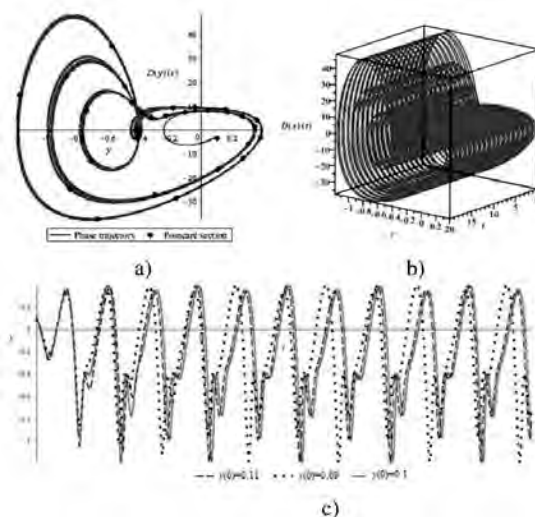
Za vrednosti $2,5 \leq R \leq 2,88$ majhna sprememba začetnih pogojev ne povzroči radikalne spremembe v obnašanju sistema. Za $2,89 \leq R \leq 3,0$ se pojavijo subharmonične komponente, ki jih lahko opazimo v periodični rešitvi (glej slike 11.4 - 11.6).



Slika 11.4. Numerična rešitev Cauchyjevega problema (11.25), (11.26) za $R = 2,95$ prikazuje pojav subharmoničnih komponent v periodičnih nihanjih.



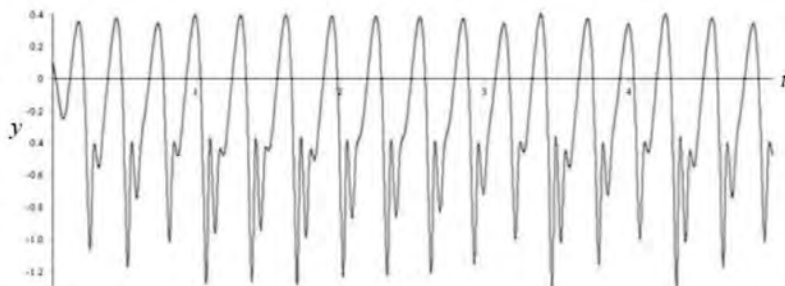
Slika 11.5. Pojav subharmonikov v periodičnih nihanjih za $R = 3,0$.



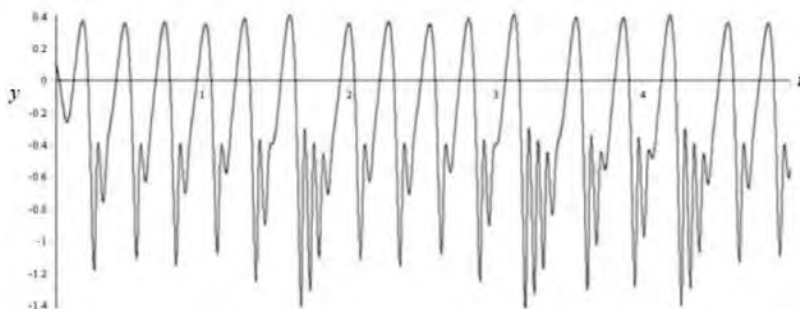
Slika 11.6. Numerična rešitev Cauchyjevega problema (11.25), (11.26) za $R = 3,0$. Fazna trajektorija in Poincar'ev osek (a) ter trajektorije v 3D prostoru (b). Odvisnost od začetnih pogojev je majhna (glej (c)).

V tem primeru se pri majhnih spremembah začetnih pogojev narava nihanj sistema bistveno spremeni (glej sliko 11.6c).

Pri $R > 3,0$ obnašanje sistema postane kaotično (glej slike 11.7 - 11.9).



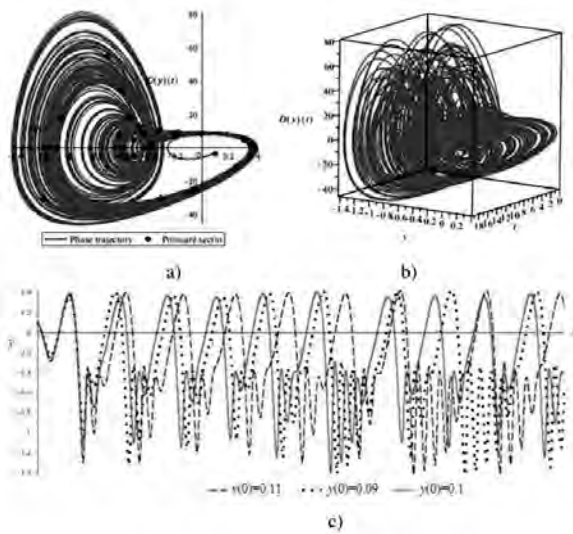
Slika 11.7. Kaotična nihanja za $R = 3,05$.



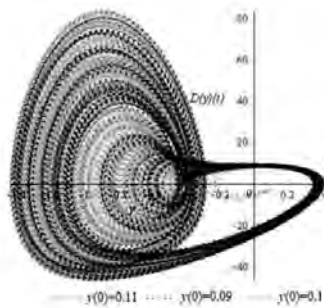
Slika 11.8. Kaotična nihanja za $R = 3,1$.

Pri kaotičnem obnašanju sistema majhne spremembe začetnih pogojev povzročijo pomembne spremembe v izhodnih nihanjih (glej sliko 11.9c).

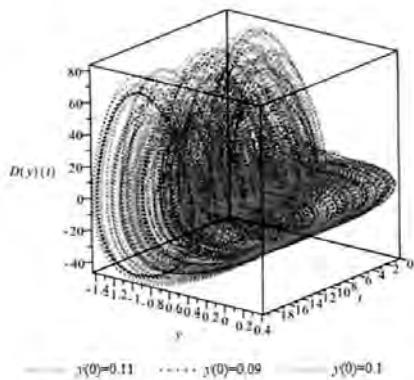
Hkrati struktura faznih trajektorij ni odvisna od začetnih pogojev (slike 11.10 in 11.11). Da bi dosegli pravilno karakterizacijo dinamike in potrditve kaotičnega obnašanja sistema, se izračunajo eksponenti po Lyapunovu in dimenzije po Lyapunovu za različne vrednosti R . Če ima sistem vsaj en pozitiven Lyapunov eksponent, potem je kaotičen [113, 321, 424]. Slike 11.12 in 11.13 prikazujeta časovni razvoj eksponentov Lyapunova za $R = 2,5$ oziroma $R = 3,0$. Ker so vsi eksponenti po Lyapunovu negativni, sistem ni kaotičen.



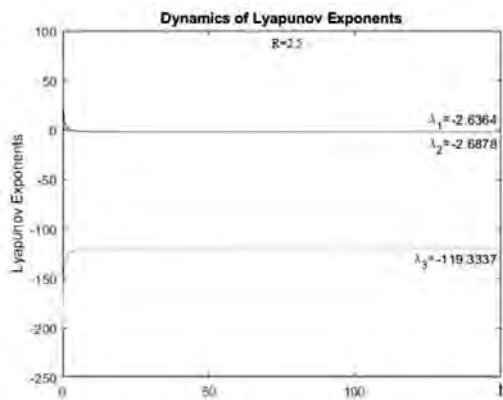
Slika 11.9. Numerična rešitev Cauchyjevga problema (enačbi (11.25) in (11.26)) za $R = 3,1$. Fazna trajektorija in Poincaréjev odsek (a) ter trajektorije v 3D prostoru (b). Zelo majhna sprememba začetnih pogojev je povzročila bistveno drugačen rezultat (glej (c)).



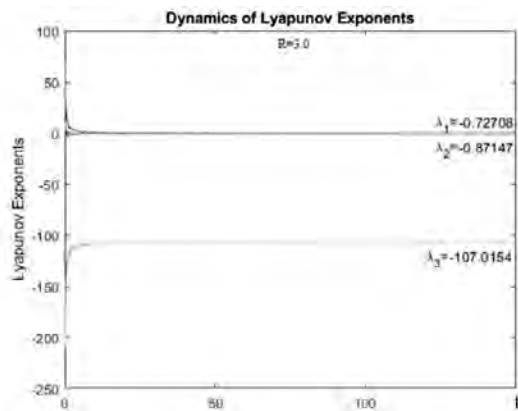
Slika 11.10. Ravnski fazni portret za $R = 3,1$.



Slika 11.11. 3D fazni portret za $R = 3,1$.

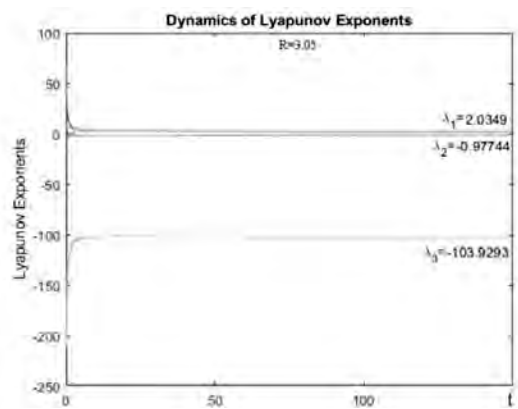


Slika 11.12. Dinamika eksponentov Lyapunova za $R = 2,5$.

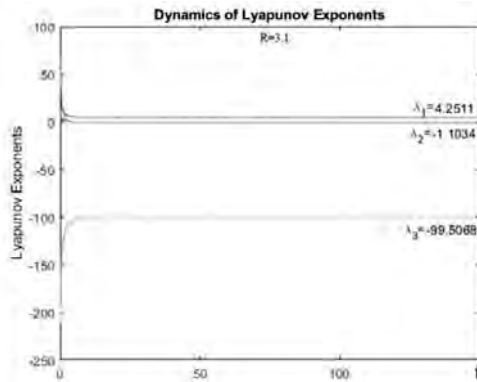


Slika 11.13. Dinamika eksponentov Lyapunova za $R = 3,0$.

Pri $R > 3,0$ postane največji eksponent Lyapunova pozitiven, kar kaže na pojav kaosa v sistemu (sliki 11.14 in 11.15).



Slika 11.14. Dinamika eksponentov Lyapunova za $R = 3,05$.



Slika 11.15. Dinamika eksponentov Lyapunova za $R = 3,1$.

Dobljene vrednosti eksponentov Lyapunova potrjujejo prejšnje ugotovitve o odsotnosti ali prisotnosti kaosa v sistemu.

Dimenzijo po Lyapunovu D_L je mogoče izračunati po formuli:

$$D_L = j + \sum_{i=1}^j \frac{\lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}, \quad (11.27)$$

kjer je j definiran z naslednjimi pogoji

$$\sum_{i=1}^j \lambda_i > 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0, \quad (11.28)$$

Za $R = 3,05$ in $R = 3,10$ dobimo $D_L(3,05) = 2,0102$ in $D_L(3,10) = 2,0316$, ki sta skladna s tistim za kaotični sistem tretjega reda [179].

V tem razdelku smo si ogledali nekaj poskusnih problemov, katerih rešitve vodijo do zanimivih zaključkov. Logistična NDE služi kot primer determinističnega sistema, diskretna logistična enačba pa je klasičen primer preprostega sistema s kaotičnim obnašanjem. Standardna diskretizacija logističnega NDE vodi do diferenčne enačbe s kaotičnim obnašanjem. Klasična kontinualizacija pretvori diskretno logistično enačbo v deterministično NDE. Vendar pa je z uporabo dokaj preprostih tehnik nestandardne diskretizacije in izboljšane posplošene kontinualizacije (glej poglavje 10) možno konstruirati deterministične NAE in NDE s kaotičnim obnašanjem. S tem se razširijo možnosti matematičnega modeliranja realnih procesov.

Literatura

1. Ablowitz, M.J. and Segur, H. 1981. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. Philadelphia: SIAM.
2. Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (eds.) 1965. *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications.
3. Abramyan, A.K., Bessonov, N.M., Indeitsev, D.A., Mochalova, Yu. A. and Semenov, B.N. 2011. Influence of oscillation localization on film detachment from a substrate. *Vestnik St. Petersburg Univ.: Math.* 44(1):5–12 .
4. Achenbach, J.D. and Herrmann, G. 1968. Dispersion of free harmonic waves in fibre reinforced composites. *AIAA J.* 6:1832–1836.
5. Achenbach, J.D. and Zhu, H. 1989. Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fibre-reinforced composites. *J. Mech. Phys. Sol.* 7:381–393.
6. Aero, E., Fradkov, A., Andrievsky, B. and Vakulenko, S. 2006. Dynamics and control of oscillations in a complex crystalline lattice. *Phys. Lett. A* 353(1):24–29.
7. Ahsani, S., Boukadia, R., Droz, C., Claeys, C., Deckers, E. and Desmet, W. 2020. Diffusion based homogenization method for 1D wave propagation. *Mech. Sys. Sig. Proc.*, 136:106515.
8. Aifantis, E.C. 1999. Gradient deformation models at nano, micro, and macroscales. *ASME J. Eng. Mater. Techn.* 121:189–202.
9. Akhmet, M., Altintan, D. and Ergenc, T. 2010. Chaos of the logistic equation with piecewise constant argument. *arXiv:1006.4753*.
10. Allaire, G., Lamacz, A. and Rauch, J. 2018. Crime pays: homogenized wave equations for longtimes. *Mathematics arXiv:1803.09455 [math.AP]*.
11. Andrianov, I.V. 1991. Continuous approximation of higher-frequency oscillation of a chain. *Doklady AN Ukr. SSR Ser. A* 2:13–15 (in Russian).
12. Andrianov, I.V. 2002. The special feature of limiting transition from a discrete elastic media to a continuous one. *J. Appl. Math. Mech.* 66(2):261–265.
13. Andrianov, I.V. 2021. Mathematical models in pure and applied mathematics. In: *Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems*, 15–29. *Advanced Structured Materials* 139. Abramian A.K., Andrianov I.V., Gaiko V.A. (eds.). Cham: Springer Nature.
14. Andrianov, I.V. and Awrejcewicz, J. 2000. Numbers or understanding: analytical and numerical methods in the theory of plates and shells. *Facta Univ., series Mech., Aut. Contr. Robot., University of Nis* 2(10):1319–1327.
15. Andrianov, I.V. and Awrejcewicz, J. 2003. Homoanalyticus or homocomputicus? *Facta Univ., series Mech., Aut. Contr. Robot., University of Nis* 3(13):765–770.
16. Andrianov, I.V. and Awrejcewicz, J. 2001. New trends in asymptotic approaches: summation and interpolation methods. *Appl. Mech. Rev.* 54(1):69–92.
17. Andrianov, I.V. and Awrejcewicz, J. 2005. Continuous models for chain of inertially linked masses. *Eur. J. Mech. A/Sol.* 24(3):532–536.
18. Andrianov, I.V. and Awrejcewicz, J. 2008. Continuous models for 2D discrete media valid for higher-frequency domain. *Comp. & Struct.* 86:140–144.
19. Andrianov, I.V., Awrejcewicz, J. and Danishevskyy, V.V. 2018. *Asymptotical Mechanics of Composites. Modelling Composites without FEM*. Berlin: Springer Nature.

20. Andrianov, I.V., Awrejcewicz, J. and Weichert, D. 2010. Improved continuous models for discrete media. *Math. Probl. Eng.* ID 986242.
21. Andrianov, I.V., Awrejcewicz, J., Danishevskyy, V.V. and Markert, B. 2017. Influence of geometric and physical nonlinearities on the internal resonances of a finite continuous rod with a microstructure. *J. Sound Vib.* 386:359–371.
22. Andrianov, I.V., Bolshakov, V.I., Danishevskyy, V.V. and Weichert, D. 2008. Higher-order asymptotic homogenization and wave propagation in periodic composite materials. *Proc. R. Soc. A* 464:1181–1201.
23. Andrianov, I.V., Danishevskyy, V.V. and Kalamkarov, A.L. 2013. Vibration localization in one-dimensional linear and nonlinear lattice: discrete and continuum models. *Nonl. Dyn.* 72:37–48.
24. Andrianov, I.V., Danishevskyy, V.V., and Markert, B. 2015. Nonlinear vibrations and mode interactions for a continuous rod with microstructure. *J. Sound Vib.* 351:268–281.
25. Andrianov, I.V., Danishevskyy, V.V. and Rogerson, G. 2018. Elastic waves in periodically heterogeneous two-dimensional media: locally periodic and anti-periodic modes. *Proc. Roy. Soc. A* 474:2215.
26. Andrianov, I.V., Danishevskyy, V.V. and Rogerson, G. 2018. Internal resonances and modes interactions in non-linear vibrations of viscoelastic heterogeneous solids. *J. Sound Vib.* 433:55–64.
27. Andrianov, I.V., Danishevskyy, V.V. and Rogerson, G. 2020. Vibrations of nonlinear elastic lattices: low- and high-frequency dynamic models, internal resonances and modes coupling. *Proc. R. Soc. A* 476:20190532.
28. Andrianov, I.V., Danishevskyy, V.V., Kaplunov, J. and Markert, B. 2019. Wide frequency higher-order dynamic model for transient waves in a lattice. In: *Problems of Nonlinear Mechanics and Physics of Materials, Advanced Structured Materials 94*, Andrianov, I.V., Manevich, A.I., Mikhlin, Yu.V., Gendelman, O.V. (eds.) Springer Nature, pp. 3–12.
29. Andrianov, I.V., Danishevskyy, V.V., Ryzhkov, O.I. and Weichert, D. 2013. Dynamic homogenization and wave propagation in a nonlinear 1D composite material. *Wave Motion* 50:271–281.
30. Andrianov, I.V., Danishevskyy, V.V., Topol, H. and Luyt, A.S. 2018. Shear wave propagation in layered composites with degraded matrices at locations of imperfect bonding. *Wave Motion* 78:9–31.
31. Andrianov, I.V., Danishevskyy, V.V., Topol, H. and Rogerson, G. 2016. Propagation of Floquet-Bloch shear waves in viscoelastic composites: analysis and comparison of interface/interphase models for imperfect bonding. *Acta Mech.* 228:1177–1196.
32. Andrianov, I.V., Danishevskyy, V.V. and Weichert, D. 2010. Continuous model of 2D discrete media based on composite equations. *Acoust. Phys.* 56(6):807–810.
33. Andrianov, I.V., Danishevskyy, V.V. and Weichert, D. 2008. Simple estimations on effective transport properties of a random composite material with cylindrical fibres. *ZAMP* 59(5):889–903.
34. Andrianov, I.V., Lesnichaya, V.A. and Manevitch, L.I. 1985. *Homogenization Methods in Statics and Dynamics of Ribbed Shells*. Moscow: Nauka (in Russian).
35. Andrianov, I.V. and Manevitch, L.I. 2002. *Asymptotology: Ideas, Methods, and Applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

36. Andrianov, I. and Mityushev, V. 2018. Exact and “exact” formulae in the theory of composites. In: *Modern Problems in Applied Analysis*. Dryga’s, P., Rogosin, S. (eds.). Birkhäuser, pp. 15–34.
37. Andrianov, I., Starushenko, G., Kvitka, S. and Khajiyeva, L. 2019. The Verhulst-Like equations: Integrable ODE and ODE with chaotic behavior. *Symmetry* 11:1446.
38. Arvin, H. and Bakhtiari-Nejad, F. 2013. Nonlinear modal interaction in rotating composite Timoshenko beams. *Compos. Struct.* 96:121–134.
39. Askar, A. 1985. *Lattice Dynamical Foundations of Continuum Theories. Elasticity, Piezoelectricity, Viscoelasticity, Plasticity*. Singapore: World Scientific.
40. Askes, H. and Aifantis, E.C. 2011. Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. *Int. J. Solids Struct.* 48(13):1962–1990.
41. Askes, H. and Sluys, L.J. 2002. Explicit and implicit gradient series in damage mechanics. *Eur. J. Mech. A/Sol.* 21:379–390.
42. Askes, H. and Metrikine, A.V. 2002. One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 2: Static and dynamic response. *Eur. J. Mech. A/Sol.* 21:573–588.
43. Askes, H., Metrikine, A.V., Pichugin, A.V. and Bennett, T. 2008. Four simplified gradient elasticity models for the simulation of dispersive wave propagation. *Phil. Mag.* 88(28-29):3415–3443.
44. Aubry, S. 1995. Anti-integrability in dynamical and variational problems. *Physica D.* 86:284–296.
45. Auffray, N., Le Quang, H. and He Q.C. 2013. Matrix representations for 3D strain-gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Sol.* 61(5):1202–1223.
46. Bacca, M., Bigoni, D., Dal Corso, F. and Veber, D. 2013. Mindlin second-gradient elastic properties from dilute two-phase Cauchy-elastic composites. Part II: Higher-order constitutive properties. *Int. J. Solids Struct.* 50:4020–4029.
47. Baker, G.A. jr. and Graves-Morris, P. 1996. *Padé Approximants* (2nd ed.). Cambridge, NY: Cambridge University Press.
48. Bakhvalov, N.S. and Eglit, M.E. 1992. Variational properties of averaged equations for periodic media. *Proc. Steklov Inst. Math.* 192:3–18.
49. Bakhvalov, N.S. and Eglit, M.E. 1993. Averaging of the equations of the dynamics of composites of slightly compressible elastic components. *Comput. Math. Math. Phys.* 33(7):939–952.
50. Bakhvalov, N.S. and Eglit, M.E. 1993. Homogenization of dynamic problems singularly depending on small parameters. *Proc. Second Workshop on Composite Media and Homogenization Theory, Trieste*, pp.17–35.
51. Bakhvalov, N.S. and Eglit, M.E. 1994. An estimate of the error of averaging the dynamics of small perturbations of very inhomogeneous mixtures. *Comput. Math. Math. Phys.* 34(3):333–349.
52. Bakhvalov, N.S. and Eglit, M.E. 1995. The limiting behaviour of periodic media with soft-modular inclusions. *Comput. Math. Math. Phys.* 35(6):719–729.

53. Bakhvalov, N.S. and Eglit, M.E. 2000. Long-wave asymptotics with dispersion for wave propagation in stratified media. I. Waves orthogonal to the layers. *Russ. J. Num. Anal. Math. Modell.* 15(1):3–18.
54. Bakhvalov, N.S. and M.E. Eglit. 2000. Long-wave asymptotics with dispersion for wave propagation in stratified media. II. Waves in arbitrary directions. *Russ. J. Num. Anal. And Math. Modell.* 15(3-4):225–236.
55. Bakhvalov, N. and Panasenko, G. 1989. *Averaging Processes in Periodic Media. Mathematical Problems in Mechanics of Composite Materials.* Dordrecht: Kluwer.
56. Bakhvalov, N.S., Sandrakov, G.V. and Eglit, M.E. 1996. Mathematical study of sound waves propagation progress in mixtures. *Moscow Univ. Math. Bull.* 51(6):5–7.
57. Bardzokas, D.I., Filshinsky, M.L. and Filshinsky, L.A. 2007. *Mathematical Methods in Electro-Magneto-Elasticity.* Springer, Berlin.
58. Bauman, T., Ben Dhia, H., Elkhodja, N., Oden, J.T. and Prudhomme, S. 2008. On the application of the Arlequin method to the coupling of particle and continuum models. *Comp. Mech.* 42:511–530.
59. Bedford, A. and Drumheller, D.S. 1983. Theories of immiscible and structured mixtures. *Int. J. Eng. Sci.* 21:863–960.
60. Bedford, A. and Drumheller, D.S. 1994. *Introduction to Elastic Wave Propagation.* New York: Wiley.
61. Bedford, A. and Stern, M. 1971. Toward a diffusing continuum theory of composite materials. *J. Appl. Mech.* 38:8–14.
62. Belashov, Yu.V. and Vladimirov, S.V. 2005. *Solitary Waves in Dispersive Complex Media.* Berlin: Springer.
63. Belyaev, A. 2011. On implicit image derivatives and their applications. In: *Proceedings of the British Machine Vision Conference.* Hoey, J., McKenna, St., Trucco, E. (eds.). BMVA Press, pp. 72.1–72.12.
64. BenDhia, H. 2006. Global-local approaches: the Arlequin framework. *Europ. J. Comp. Mech.* 15:67–80.
65. Ben Dhia, H. 2008. Further insights by theoretical investigations of the multiscale Arlequin method. *Int. J. Multisc. Comp. Eng.* 6:215–232.
66. Ben Dhia, H. and Rateau, G. 2005. The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *Int. J. Numer. Met. Eng.* 62:1442–1462.
67. Benaroya, H. 1997. Waves in periodic structures with imperfections. *Compos. B.* 28:143–152.
68. Bender, C.M. and Tovbis, A. 1997. Continuum limit of lattice approximation schemes. *J. Math. Phys.* 38:3700–3717.
69. Benilov, E.S., Grimshaw, R. and Kuznetsova, E.P. 1993. The generation of radiating waves in a singularly-perturbed KdV equation. *Phys. D.* 69:270–278.
70. Bensoussan, A., Lions, J.L. and Papanicolaou, G. 1978. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures.* Amsterdam: North-Holland.
71. Benveniste, Y. 1985. The effective mechanical behavior of composite materials with imperfect contact between constituents. *Mech. Mater.* 4:197–208.
72. Benjamin, T.B., Bona, J.G. and Mahoney, J.J. 1972. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Phil. Trans. Roy. Soc. A.* 272:47–78.

73. Beran, M.J. 1968. *Statistical Continuum Theories*. New York: Wiley Interscience.
74. Berezovski, A., Engelbrecht, J. and Berezovski, M. 2011. Waves in microstructured solids: a unified viewpoint of modeling. *Acta Mech.* 220:349–363.
75. Berlyand, L. and Mityushev, V. 2001. Generalized Clausius-Mossotti formula for random composite with circular fibres. *J. Stat. Phys.* 102:115–145.
76. Berlyand, L. and Mityushev, V. 2005. Increase and decrease of the effective conductivity of two phase composites due to polydispersity. *J. Stat. Phys.* 118:481–509.
77. Bhatnagar, P.I. 1979. *Nonlinear Waves in One-Dimensional Dispersive Systems*. Oxford: Clarendon Press.
78. Bigoni, D. and Drugan, W.J. 2007. Analytical derivation of Cosserat moduli via homogenization of heterogeneous elastic materials. *J. Appl. Mech.* 74:741–753.
79. Bishop, R.E.D. 1952. Longitudinal waves in beams. *Aeronaut. Quart.* 3(4):280–293.
80. Blanc, X., Le Bris, C. and Lions, P.-L. 2002. From molecular models to continuum mechanics. *Arch. Rational Mech. Anal.* 164, 341–381.
81. Blanc, X., Le Bris, C. and Lions, P.L. 2007. Atomistic to continuum limits for computational material science. *ESAIM: Math. Mod. Num. Anal.* 41(2):391–426.
82. Bloch, F. 1928. Über die Quanten mechanik der Elektronen in Kristallgittern. *Z. Phys.* 52:555–600.
83. Bobrovnitskii, Yu.V. 2011. Features of normal wave dispersion in periodic structures. *Acoust. Phys.* 57(4):442–446.
84. Boertjens, G.J. and van Horssen, W.T. 1998. On mode interactions for a weakly nonlinear beam equation. *Nonlin. Dyn.* 17:23–40.
85. Boertjens, G.J. and van Horssen, W.T. 2000. An asymptotic theory for a weakly nonlinear beam equation with a quadratic perturbation. *SIAM J. Appl. Math.* 60:602–632.
86. Born, M. and Huang, K. 1988. *Dynamical Theory of Crystal Lattices*. Oxford: Oxford Univ. Press.
87. Born, M. and Wolf, E. 1964. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Oxford: Pergamon Press.
88. Boussinesq, J.V. 1872. Th´eorie des ondes et des bremous qui se propagent le long d’un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *J. Math. Pures Appl.* 17:55–108.
89. Boutin, C. 1995. Microstructural influence on heat conduction. *Int. J. Heat Mass Transf.* 38:3181–3195.
90. Boutin, C. 1996. Microstructural effects in elastic composites. *Int. J. Sol. Struct.* 33:1023–1051.
91. Boutin, C. 2000. Study of permeability by periodic and self-consistent homogenization. *Eur. J. Mech. A/Sol.* 19:603–632.
92. Boutin, C. and Auriault, J.L. 1993. Rayleigh scattering in elastic composite materials. *Int. J. Eng. Sci.* 31:1669–1689.
93. Bowen, R.M. 1976. Theory of mixtures. In: *Continuum Physics: Mixtures and EM Field Theories*. Eringen, A.C. (ed.) New York: Academic Press, pp.2–129.
94. Braides, A. 2000. Non-local variational limits of discrete systems. *Commun. Contemp. Math.* 2:285–297.

95. Braun, O.M. and Kivshar, Y.S. 2004. *The Frenkel-Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
96. Brezinski, C. 2004. Extrapolation algorithms for filtering series of functions, and treating the Gibbs phenomenon. *Numer. Algor.* 36:309–329.
97. Brillouin, L. 1960. *Wave Propagation and Group Velocity*. New York: Academic Press.
98. Brillouin, L. 2003. *Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices*, 2nd edn. Mineola, New York: Dover Publications.
99. Brocchini, M. 2013. A reasoned overview on Boussinesq-type models: the interplay between physics, mathematics and numerics. *Proc. R. Soc. A.* 469:20130496.
100. Bryant, J.D., David, T., Gaskell, P.H., King, S. and Lond, G. 1989. Rheology of bovine bone marrow. *Proc. Inst. Mech. Eng.* 203:71–75.
101. Bykov, V.G. 2015. Nonlinear waves and solitons in models of fault block geological media. *Russ. Geol. Geophys.* 56(5):793–803.
102. Cai, C.W., Chan, H.C. and Cheung, Y.K. 1997. Localized modes in periodic systems with a nonlinear disorders. *J. Appl. Mech.* 64:940–945.
103. Cai, C.W., Chan, H.C. and Cheung, Y.K. 2000. Localized modes in a two-degree-coupling periodic system with a nonlinear disordered subsystem. *Chaos, Solitons & Fractals.* 11:1481–1492.
104. Cai, C.W., Cheung, Y.K. and Chan, H.C. 1995. Mode localization phenomena in nearly periodic systems. *J. Appl. Mech.* 62:141–149.
105. Cai, G.Q. and Lin, Y.K. 1990. Localization of wave propagation in disordered periodic structures. *AIAA J.* 29:450–456.
106. Cai, C.W., Liu, J.K. and Chan, H.C. 2003. Exact analysis of localized modes in bi-periodic mono-coupled mass-spring systems with a single disorder. *J. Sound Vib.* 262:1133–1152.
107. Cao, W. and Qi, W. 1995. Multisource excitations in a stratified biphase structure. *J. Appl. Phys.* 78:4640–4646.
108. Cao, W. and Qi, W. 1995. Plane wave propagation in finite 2-2 composites. *J. Appl. Phys.* 78:4627–4632.
109. Carta, G. and Brun, M. 2012. A dispersive homogenization model based on lattice approximation for the prediction of wave motion in laminates. *J. Appl. Mech.* 79(2):021019-1–021019-8.
110. Carta, G., Brun, M., Movchan, A.B., Movchan, N.V. and Jones, I.S. 2014. Dispersion properties of vortex-type monatomic lattices. *Int. J. Sol. Struct.* 51:2213–2225.
111. Catheline, S., Gennisson, J.-L. and Fink, M. 2003. Measurement of elastic nonlinearity of soft solid with transient elastography. *JASA* 114:3087–3091.
112. Cattani, C. and Rushchitsky, J., 2007. *Wavelet and Wave Analysis as Applied to Materials with Micro or Nanostructure*. Singapore: WorldScientific.
113. Cencini, M., Cecconi, F. and Vulpiani, A. 2009. *Chaos: From Simple Models to Complex Systems*. Singapore: WorldScientific.
114. Chakraborty, G. and Mallik, A.K. 2001. Dynamics of a weakly non-linear periodic chain. *Int. J. Non-Lin. Mech.* 36:375–389.
115. Chang, C.S., Askes, H. and Sluys, L.J. 2002. Higher-order strain/higher-order stress gradient models derived from a discrete microstructure, with application to fracture. *Engn. Fract. Mech.* 69:1907–1924.

116. Charlotte, M. and Truskinovsky, L. 2008. Towards multi-scale continuum elasticity theory. *Continuum Mech. Thermodyn.* 20:133.
117. Charlotte, M. and Truskinovsky, L. 2012. Lattice dynamics from a continuum viewpoint. *J. Mech. Phys. Sol.* 60(8):1508–1544.
118. Chechin, G.M. and Sakhnenko, V.P. 1998. Interactions between normal modes in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry. *Exactresults. Physica D* 117:43–76.
119. Chechin, G.M. and Dzhelauhova, G.S. 2009. Discrete breathers and nonlinear normal modes in monoatomic chains. *J. Sound Vib.* 322:490–512.
120. Chen, W. and Fish, J. 2001. A dispersive model for wave propagation in periodic heterogeneous media based on homogenization with multiple spatial and temporal scales. *J. Appl. Mech.* 68:153–161.
121. Cherednichenko, K.D. and Smyshlyaev, V.P. 2004. On full two-scale expansion of the solutions of nonlinear periodic rapidly oscillating problems and higher-order homogenised variational problems. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 174:385–442.
122. Cherkaev, E. and Ou, M.-J.Y. 2008. Dehomogenization: reconstruction of moments of the spectral measure of the composite. *Inver. Probl.* 24:065008.
123. Christensen, R.M. 2005. *Mechanics of Composite Materials*, 2nd edn. Mineola, New York: DoverPublications.
124. Claude, Ch., Kivshar, Yu.S., Kluth, O. and Spatschek, K.H. 1993. Moving localized modes in nonlinear lattices. *Phys. Rev. B.* 47(21):14228–14233.
125. Collins, M.A. 1981. A quasi-continuum approximation for solitons in an atomic chain. *Chem. Phys. Lett.* 77(2):342–347.
126. Colquitt, D.J., Danishevskyy, V.V. and Kaplunov, J. 2019. Composite dynamic models for periodically heterogeneous media. *Math. Mech. Sol.* 24(9):2663–2693.
127. Colquitt, D.J., Jones, I.S., Movchan, N.V. and Movchan, A.B. 2011. Dispersion and localization of elastic waves in materials with microstructure. *Proc. R. Soc. A* 467:2874–2895.
128. Conca, C. and Lund, F. 1999. Fourier homogenization method and the propagation of acoustic waves through a periodic vortex array. *SIAM J. Appl. Math.* 59(5):1573–1581.
129. Cosserat, E. and Cosserat, F. 1909. *Théorie des Corps Déformables*. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils.
130. Craster, R.V., Kaplunov, J. and Pichugin, A.V. 2010. High frequency homogenization for periodic media. *Proc. R. Soc. A.* 466:2341–2362.
131. Craster, R.V., Kaplunov, J. and Postnova, J. 2010. High-frequency asymptotics, homogenization and localization for lattices. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 63(4):497–520.
132. DalMaso, G. 1993. *An Introduction to G-Convergence*. Boston: Birkhäuser.
133. Daya, E.M. and Potier-Ferry, M. 2001. Vibrations of long repetitive structures by a double scale asymptotic method. *Struct. Eng. Mech.* 12:215–230.
134. Dauxois, T. 1991. Dynamics of breather modes in a nonlinear “helical” model of DNA. *Phys. Lett. A* 159:390–395.
135. Deift, P. and McLaughlin, K.T.R. 1998. *A Continuum Limit of the Toda Lattice*. Providence: AMS.

136. Del Piero, G. and Truskinovsky, L. 1998. A one-dimensional model for localized and distributed failure. *J. de Physique IY France* 8(82):199–210.
137. Deymier, P.A. (ed.) 2013. *Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals*. Berlin: Springer-Verlag.
138. Dirac, P.A.M. 1929. Quantum Mechanics of many-electron systems. *Proc. R. Soc. London A.* 123(729):714–733.
139. Dodd, R.K., Eilbeck, J.C., Gibbon, J.D. and Morris, H.C. 1982. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. London: Academic Press.
140. Dreiden, G.V., Khusnutdinova, K.R., Samsonov, A.M. and Semenova, I.V. 2010. Splitting induced generation of soliton trains in layered wave guides. *J. Appl. Phys.* 107:034909.
141. Dreiden, G.V., Porubov, A.V., Samsonov, A.M., Semenova, I.V. and Sokurinskaya, E.V. 1995. Experiments in the propagation of longitudinal strain solitons in a nonlinearly elastic rod. *Tech. Phys. Lett.* 21:415–417.
142. Dreiden, G.V., Samsonov, A.M. and Semenova, I.V. 2014. Observation of bulk strain solitons in layered bars of different materials. *Tech. Phys. Lett.* 40(12):1140–1141.
143. Driscoll, T. and Fornberg, B. 2001. A Padé-based algorithm for overcoming the Gibbs phenomenon. *Numer. Algorithm.* 26:77–92.
144. Drumheller, D.S. and Bedford, A. 1974. Wave propagation in elastic laminates using a second order microstructure theory. *Int. J. Sol. Struct.* 10:61–76.
145. Drumheller, D.S. and Sutherland, H.J. 1973. A lattice model for stress wave propagation in composite materials. *J. Appl. Mech.* 40:157–164.
146. Drygas, P., Mityushev, V., Gluzman, S. and Nawalaniec, W. 2020. *Applied Analysis of Composite Media: Analytical and Computational Approaches for Materials Scientists and Engineers*. New York: Elsevier.
147. Dykhne, A.M. 1971. Conductivity of a two-dimensional two-phase system. *Sov. Phys. JETP* 32:63–65.
148. Egle, D.M. and Bray, D.T. 1976. Measurement of acousto elastic and third-order elastic constants for rail steel. *JASA* 60:741–744.
149. Eglit, M.E. 1998. New models arising in the averaged description of microinhomogeneous media. *Proc. Steklov Inst. Math.* 223:94–104.
150. Eglit, M.E. 2010. Dispersion of elastic waves in microinhomogeneous media and structures (A review). *Acoust. Phys.* 56(6):989–995.
151. Ehrlacher, V., Ortner, C. and Shapeev, A.V. 2015. Analysis of boundary conditions for crystal defect atomistic simulations. *arXiv:1306.5334v3*.
152. Engelbrecht, J. 1997. *Nonlinear Wave Dynamics: Complexity and Simplicity*. Dordrecht, Boston: Kluwer.
153. Engelbrecht, J. and Braun, M. 1998. Nonlinear waves in nonlocal media. *Appl. Mech. Rev.* 51:475–488.
154. Eremeyev, V.A. and Sharma, B.L. 2019. Anti-plane surface waves in media with surface structure: Discrete vs. continuum model. *Int. J. Eng. Sci.* 143:33–38.
155. Eringen, A.C. 1987. Theory of nonlocal elasticity and some applications. *Res. Mech.* 21:313–342.
156. Eringen, A.C. 1992. Vistas on nonlocal continuum Physics. *Int. J. Eng. Sci.* 30(10):1551–1565.

157. Eringen, A.C. 1999. *Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids*. New York: Springer-Verlag.
158. Erofeev, V.I. 2003. *Wave Processes in Solids with Microstructure*. Singapore: World Scientific.
159. Espinosa, H.D., Dwivedi, S.K. and Lu, H.-C. 2000. Modelling impact induced delamination of woven fibre reinforced composites with contact/cohesive laws. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 183:259–290.
160. Espinosa, H.D., Zavattieri, P.D. and Dwivedi, S.K. 1998. A finite deformation continuum/discrete model for the description of fragmentation and damage in brittle materials. *J. Mech. Phys. Sol.* 46:1909–1942.
161. Fanga, X.-Q., Liua, J.-X., Niea, G.-Q. and Hub, Ch. 2010. Propagation of flexural waves and localized vibrations in the strip plate with a layer using Hamilton system. *Eur. J. Mech. A/Sol.* 29:152–157.
162. Feng, B.F. and Kawahara, T. 2007. Discrete breathers in two-dimensional nonlinear lattices. *Wave Motion* 45(1-2):68–82.
163. Feng, B.F., Doi, Y. and Kawahara, T. 2004. Quasi-continuum approximation for intrinsic localized modes in Fermi-Pasta-Ulam lattices. *J. Phys. Soc. Jpn.* 73:2100–2111.
164. Feng, B.F., Doi, Y. and Kawahara, T. 2006. A regularized model equation for discrete breathers in an harmonic lattices with symmetric nearest-neighbor potentials. *Phys. D* 214:33–41.
165. Filimonov, A.M. 1992. Some unexpected results on the classical problem of the string with Nbeads. The case of multiple frequencies. *C. R. Acad. Sci. Paris* 1(315): 957–961.
166. Filimonov, A.M. 1996. Continuous approximations of difference operators. *J. Difference Eq. Appl.* 2(4):411–422.
167. Filimonov, A.M. and Myshkis, A.D. 1998. Asymptotic estimate of solution of one mixed difference-differential equation of oscillations theory. *J. Difference Eq. Appl.* 4:13–16.
168. Filimonov, A.M., Mao, X. and Maslov, S. 2000. Splash effect and ergodic properties of solution of the classic difference-differential equation. *J. Difference Eq. Appl.* 6:319–328.
169. Findlin, A.Ya. 2007. Peculiarities of the use of computational methods in applied mathematics (on global computerization and commonsense). In: Blekhman, I.I., Myshkis, A.D., Ya.G. Panovko. 2007. *Applied Mathematics: Subject, Logic, Peculiarities of Approaches. With Examples from Mechanics*. Moscow, URSS:350–358 (in Russian).
170. Fish, J. and Chen, W. 2001. Higher-order homogenization of initial/boundary-value problem. *J. Eng. Mech.* 127:1223–1230.
171. Fish, J. and Chen W. 2004. Space-time multiscale model for wave propagation in heterogeneous media. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 193:4837–4856.
172. Flach, S. and Kladko, K. 1996. Perturbation analysis of weakly discrete kinks. *Phys. Rev.E* 54:2912–2916.
173. Flach, S. and Willis, C.R. 1993. Asymptotic behavior of onedimensional nonlinear discrete kink-bearing systems in the continuum limit: Problem of nonuniform convergence. *Phys. Rev. E* 47: 4447 – 4456.
174. Fleck, N.A. and Hutchinson, J.W. 1993. A phenomenological theory for gradient effects inplasticity. *J. Mech. Phys. Sol.* 41:1825–1857.

175. Fletcher, C.A.J. 1984. *Computational Galerkin Methods*. Berlin: Springer.
176. Floquet, G. 1883. Sur les équations différentielles linéaires à coefficient périodiques. *Ann. sc. l'École Norm.Supér., Sér 2.* 12:47–88.
177. Flügge, W. 1975. *Viscoelasticity*. New York: Springer.
178. Franzevich, I.N., Voronov, F.F. and Bakuta, S.A. 1982. *Elastic Constants and Modules of Elasticity of Metals and Nonmetals*. ReferenceBook. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
179. Frederickson, P., Kaplan, J.L., Yorke, E.D. and Yorke, J.A. 1983. The Liapunov dimension of strange attractors. *J. Differ. Eq.* 49:185–207.
180. Galka, A., Telega, J.J. and Tokarzowski, S. 1999. A contribution to evaluation of effective moduli of trabecular bone with rod-like microstructure. *J. Theor. Appl. Mech.* 37:707–727.
181. Gambin, B. and Kröner, E. 1989. High order terms in the homogenized stress strain relation of periodic elastic media. *Phys. Stat. Sol.* 151:513–519.
182. Gao, Q., Wu, F., Zhang, H.W., Zhong, W.X., Howson, W.P. and Williams, F.W. 2012. Exact solutions for dynamic response of a periodic spring and mass structure. *J.Sound Vib.* 331(5):1183–1190.
183. Ghavanloo, E., Fazelzadeh, S.A. and Rafii-Tabar, H. 2020. Formulation of an efficient continuum mechanics-based model to study wave propagation in one-dimensional diatomic lattices. *Mech. Res. Comm.* 103:103467.
184. Giannoulis, J. and Mielke, A. 2004. The nonlinear Schrödinger equation as a macroscopic limit for an oscillator chain with cubic nonlinearities. *Nonlinearity* 17:551–565.
185. Gibson, J.L. and Ashby, M.P. 1988. *Cellular Solids: Structure and Properties*. New York: Pergamon Press.
186. Gleik, J. 1987. *Chaos: Making a New Science*. New York: Viking Penguin.
187. Golub, M.V., Fomenko, S.I., Bui, T.Q., Zhang, Ch. and Wang, Y.-S. 2012. Transmission and bandgaps of elastic SH waves in functionally graded periodic laminates. *Int. J. Sol. Struct.* 49:344–354.
188. Golub, M.V., Zhang, Ch. and Wang, Y.-S. 2012. SH-wave propagation and scattering in periodically layered composites with a damaged layer. *J. Sound Vib.* 331:1829–1843.
189. Goupillaud, P.L. 1961. An approach to inverse filtering of near-surface layer effects from seismic records. *Geophysics* 26(6):754–760.
190. Grigolyuk, E.I. and Selezov, I.I. 1973. *Nonclassical Theories of Vibrations of Beams, Plates and Shells*. Moscow: VINITI (in Russian).
191. Guckenheimer, J. 1998. Computer simulation and beyond for the 21st century. *Notices AMS* 45:1120–1123.
192. Guckenheimer, J. 1998. Numerical computation in the information age. *SIAM NEWS* 31(5).
193. Guenneau, S., Poulton, C.G. and Movchan, A.B. 2003. Oblique propagation of electromagnetic and elastic waves for an array of cylindrical fibres. *Proc. R. Soc. Lond. A.* 459:2215–2263.
194. Guo, X.E. 2001. Mechanical properties of cortical bone and cancellous bone tissue. In: Cowin, S.C. (ed.) *Bone Mechanics Handbook*. Boca Raton: CRC Press, pp.10-1–10-23.

195. Gusev, A.I., Rempel, A.A. and Magerl, A.J. 2001. *Disorder and Order in Strongly Nonstoichiometric Compounds: Transition, Metal Carbides, Nitrides, and Oxides*. Berlin, New York: Springer.
196. Guz, A.N. and Nemish, Yu.N. 1987. Perturbation of boundary shape in continuum mechanics. *Sov. Appl. Mech.* 23(9):799–822.
197. Guz, A.N. and Shulga, N.A. 1992. Dynamics of laminated and fibrous composites. *Appl. Mech. Rev.* 45:35–60.
198. Hadjesfandiari, A.R. and Dargush, G.F. 2011. Couple stress theory for solids. *Int. J. Sol. Struct.* 48:2496–2510.
199. Hadjesfandiari, A.R. and Dargush, G.F. 2013. Fundamental solutions for isotropic sizedependent couple stress elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 50:1253–1265.
200. Hamming, R.W. 1973. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, 2nd ed. New York: McGrawHill.
201. Hao, H.-Y. and Maris, H.J. 2001. Experiments with acoustic solitons in crystalline solids. *Phys. Rev. B.* 64:064302.
202. Hashin, Z. 2002. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fibre composites. *J. Mech. Phys. Sol.* 50:2509–2537.
203. Hegemier, G., Gurtman, G.A. and Nayfeh, A.H. 1973. A continuum mixture theory of wave propagation in laminated and fibre reinforced composites. *Int. J. Sol. Struct.* 9:395–414.
204. Hellinger, E. 1914. Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua. *Enz. Mat. Wiss.* 4(4):602–694.
205. Herbst, B.M. and Ablowitz, M.J. 1993. Numerical chaos, symplectic intergators, and exponentially small splitting distances. *J. Comput. Phys.* 105:122–132.
206. Hermann, G., Kaul, R.K. and Delph, T.G. 1978. On continuum modelling of the dynamic behaviour of layered composites. *Archiv. Mech.* 28(3):405–421.
207. Hersch, J. 1961. Propriétés de convexité du type de Weye pour des problèmes de vibration ou d'équilibre. *ZAMP* 12: 298–322.
208. Hobart, R. 1965. Peierls stress dependence on dislocation width. *J. Appl. Phys.* 36:1944–1948.
209. Hodges, C.H. and Woodhouse, J. 1986. Theories of noise and vibration transmission in complex structures. *Rep. Prog. Phys.* 49:107–170.
210. Hollister, S.J., Fyhire, D.P., Jepsen, K.J. and Goldstein, S.A. 1991. Application of homogenization theory to the study of trabecular bone mechanics. *J. Biomech.* 24:825–839.
211. Hoppensteadt, F.C. and Hyman, J.M. 1977. Periodic solutions of a logistic difference equation. *SIAM J. Appl. Math.* 32:73–81.
212. Hu, H., Damil, N. and Potier-Ferry, M. 2011. A bridging technique to analyze the influence of boundary conditions on instability patterns. *J. Comp. Phys.* 230:3753–3764.
213. Huang, H.H., Sun, C.T. and Huang, G.L. 2009. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials. *Int. J. Eng. Sci.* 47:610–617.
214. Huges, D.S. and Kelly, I.L. 1953. Second-order elastic deformation of solids. *Phys. Rev.* 92:1145–1156.

215. Hughes, E.R., Leighton, T.G., Petley, G.M., White, P.R. and Chivers, R.C. 2003. Estimation of critical and viscous frequencies for Biot theory in cancellous bone. *Ultrasonics* 41:365–368.
216. Hussein, M.I., Hulbert, G.M. and Scott, R.A. 2006. Dispersive elastodynamics of 1D banded materials and structures: analysis. *J. Sound Vib.* 289:779–806.
217. Hussein, M.I., Leamy, M.J. and Ruzzene, M. 2014. Dynamics of phononic materials and structures: historical origins, recent progress, and future outlook. *Appl. Mech. Rev.* 66:040802.
218. Indeitsev, D.A., Kuznetsov, N.G., Motygin, O.V. and Mochalova, Yu.A. 2007. Localization of Linear Waves. St. Petersburg: St. Petersburg University (in Russian).
219. Jee, W.S.S. 2001. Integrated bone tissue physiology: anatomy and physiology. In: Cowin, S.C. (ed.) *Bone Mechanics Handbook*, Boca Raton: CRC, pp. 51–68.
220. Jerri, A.J. 2011. *Advances in the Gibbs Phenomenon*. New York: Σ Sampling Publishing.
221. Jiang, M., Shen, Yi. And Liao, X. 2006. Stability, bifurcation and a new chaos in the logistic differential equation with delay. *Phys. Lett. A* 350:221–227.
222. Joukowsky, N.E. 1937. The work of continuous and non-continuous traction devices in pulling a train from its position and at the beginning of its motion. In: Joukowsky, N.E. Kotelnikov, A.P. (Ed.) *Complete Collected Works, 8: Theory of Elasticity. Railways. Automobiles*, Moscow: ONTI, pp. 221–255 (in Russian).
223. Kafesaki, M. and Economou, E.N. 1999. Multiple-scattering theory for three dimensional periodic acoustic composites. *Phys. Rev. B* 60:11993–12001.
224. Kalamkarov, A.L., Andrianov, I.V. and Danishevs'kyi, V.V. 2009. Asymptotic homogenization of composite materials and structures. *Appl. Mech. Rev.* 62:030802.
225. Kanaun, S.K. and Levin, V.M. 2003. Self-consistent methods in the problem of axial elastic shear wave propagation through fibre composites. *Arch. Appl. Mech.* 73:105–130.
226. Kanaun, S.K. and Levin, V.M. 2008. *Self-Consistent Methods for Composites. Vol. 2: Wave Propagation in Heterogeneous Materials*. New York: Springer0.
227. Kanaun, S.K. and Levin, V.M. 2005. Propagation of shear elastic waves in composites with a random set of spherical inclusions (effective field approach). *Int. J. Sol. Struct.* 42:3971–3997.
228. Kanaun, S.K., Levin, V.M. and Sabina. F.J. 2004. Propagation of elastic waves in composites with random set of spherical inclusions (effective medium approach). *Wave Motion* 40:69–88.
229. Kantorovich, L.V. and Krylov, V.I. 1958. *Approximate Methods of Higher Analysis*. Groningen: P. Noordhoff.
230. Kaplunov, J.D., Kossovich, L.Yu and Nolde, E.V. 1998. *Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies*. San Diego: AcademicPress.
231. Kaplunov, J. and Pichugin, A. 2009. On rational boundary conditions for higher-order long-wave models. In: Borodich, F. (eds.) *IUTAM Symposium on Scaling in Solid Mechanics*. Iutam Book series 10, Dordrecht: Springer, pp. 81–90.
232. Karpov, S.Yu. and Stolyarov, S.N. 1993. Propagation and transformation of electromagnetic waves in one-dimensional periodic structures. *Physics-Uspexhi* 36(1):1–22.

233. Kasra, M. and Gryn timer, M.D. 1998. Static and dynamic finite element analyses of an idealized structural model of vertebral trabecular bone. *Trans. ASMEJ. Biomech. Eng.* 120:267–272.
234. Kawarai, S. 2002. Exact discretization of differential equations by s-z transform. In: *Proceedings of the 2002 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Phoenix-Scottsdale, AZ, USA, 26-29 May, pp. 461–464.
235. Keller, J.B. 1964. A theorem on the conductivity of a composite medium. *J. Math. Phys.* 5(4):548–549.
236. Kevrekidis, P.G. 2011. Non-linear waves in lattices: past, present, future. *IMA J. Appl. Math.* 76(3): 389–423.
237. Kevrekidis, P.G. and Kevrekidis, I.G. 2001. Heterogeneous versus discrete mapping problem. *Phys. Rev. E.* 64:056624-1–056624-8.
238. Kevrekidis, P.G., Kevrekidis, I.G., Bishop, A.R. and Titi, E.S. 2002. Continuum approach to discreteness. *Phys. Rev. E.* 65(4):46613-1–46613-13.
239. Khusnutdinova, K.R. and Samsonov, A.M. 2008. Fission of a longitudinal strain solitary wave in a delaminated bar. *Phys. Rev. E.* 77:066603.
240. Kissel, G.J. 1988. *Localization in Disordered Periodic Structures*. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology.
241. Kittel, C. 2005. *Introduction to Solid State Physics*. (8th ed.) Hoboken, New York: Wiley.
242. Kivshar, Yu.S. and Salerno, M. 1994. Modulation instabilities in the discrete deformable nonlinear Schrödinger equation. *Phys. Rev. E.* 49(4):3543–3546.
243. Kliakhandler, I.L., Porubov, A. and Velarde, M.G. 2000. Localized finite-amplitude disturbance and selection of solitary waves. *Phys. Rev. E* 62:4959–4962.
244. Kochmann, D.M. and Bertoldi, K. 2017. Exploiting microstructural instabilities in solids and structures: from metamaterials to structural transitions. *Appl. Mech. Rev.* 69:050801.
245. Korn, G.A. and Korn, T.M. 2000. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. Mineola, New York: Dover.
246. Korteweg, D.J. and de Vries, G. 1895. On the change of the form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.* 5:422–443.
247. Kosevich, A.M. 2005. *The Crystal Lattice: Phonons, Solitons, Dislocations, Superlattices*. Berlin: Wiley.
248. Kosevich, A.M. and Kovalev, A.S. 1975. Self-localization of vibrations in a one-dimensional an harmonic chain. *Sov. Phys. JETP.* 40(5):891–896.
249. Kosevich, A.M. and Savotchenko, S.E. 1999. Peculiarities of dynamics of one-dimensional discrete systems with interaction extending beyond nearest neighbors, and the role of higher dispersion in soliton dynamics. *Low Temp. Phys.* 25(7):550–557.
250. Kosevich, Yu.A. 2003. Nonlinear envelope-function equation and strongly localized vibrational modes in an harmonic lattices. *Phys. Rev. B.* 47:3138–3152.
251. Kovalev, A.S. and Kosevich, A.M. 1975. Self-localization of vibrations in a one-dimensional anharmonic chain. *Sov. Phys. JETP* 40:891–896.
252. Kozlov, S.M. 1989. Geometrical aspects of a veraging. *Russ. Math. Surv.* 44:91–144.
253. Kozlov, S.M. 1987. Averaging of differences chemes. *Math. USSR-Sb.* 57(2):351–369.

254. Kozyrenko, V.N., Kumpanenko, I.V. and Mikhailov, I.D. 1977. Green's function analysis of the vibrational spectra of polymer chain. I. Several approaches to the problem. *J. Polymer Sci.* 15:1721–1738.
255. Krivtsov, A.M. 2007. *Deformation and Destruction of Microstructured Solids*. Moscow: Fizmatlit (in Russian).
256. Kruzik, J.J. 2009. Predicting fatigue failures. *Science* 325:156–157.
257. Kunin, I.A. 1966. Model of anelastic medium of simple structure with three-dimensional dispersion. *J. Appl. Math. Mech.* 30(3):642–652.
258. Kunin, I.A. 1982. *Elastic Media with Microstructure. 1. One-dimensional Models*. Berlin: Springer.
259. Kunin, I.A. 1983. *Elastic Media with Microstructure. 2. Three-dimensional Models*. Berlin: Springer.
260. Kurchanov, P.F., Myshkis, A.D. and Filimonov, A.M. 1991. Some unexpected results in the classical problem of vibrations of the string with n beads when n is large. *C.R. Acad. Sci. Paris* 313:961–965.
261. Kurchanov, P.F., Myshkis, A.D. and Filimonov, A.M. 1991. Vibrations of rolling stock and a theorem of Kronecker. *J. Appl. Math. Mech.* 55(6):870–876.
262. Kushwaha, M.S. 1997. Stop-bands for periodic metallic rods: sculptures that can filter the noise. *Appl. Phys. Lett.* 70:3218–3220.
263. Kushwaha, M.S. and Halevi, P. 1994. Band-gap engineering in periodic elastic composites. *Appl. Phys. Lett.* 64:1085–1087.
264. Kushwaha, M.S. and Halevi, P. 1996. Giant acoustic stop bands in two dimensional periodic arrays of liquid cylinders. *Appl. Phys. Lett.* 69:31–33.
265. Kushwaha, M.S., Halevi, P., Dobrzynski, L. and Djafari-Rouhani, B. 1993. Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Phys. Rev. Lett.* 71:2022–2025.
266. Kushwaha, M.S., Halevi, P., Martinez, G., Dobrzynski, L. and Djafari-Rouhani, B. 1994. Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites. *Phys. Rev. B.* 49:2313–2322.
267. Lagrange, J.L. 1997. *Analytical Mechanics*. Berlin: Springer Nature.
268. Lakes, R.S. 1982. Dynamical study of couple stress effects in human compact bone. *Trans. ASMEJ. Biomech. Eng.* 104:6–11.
269. Lamacz, A. 2011. Dispersive effective models for waves in heterogeneous media. *Math. Model. Meth. Appl. Sci.* 21(9):1871–1899.
270. Landa, P.S. 1996. *Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems*. Dordrecht: Kluwer.
271. Landa, P.S., 2001. *Regular and Chaotic Oscillations*. Berlin, New York: Springer-Verlag.
272. Landa, P.S. and Marchenko, V.F. 1991. On the linear theory of waves in media with periodic structures. *Sov. Phys. Usp.* 34(9):830–834.
273. Lazar, M., Maugin, G.A. and Aifantis, E.C. 2006. On a theory of nonlocal elasticity of bi-Helmholtz type and some applications. *Int. J. Sol. Struct.* 43:1404–1421.
274. Le Roux, M.J. 1911. Étude géométrique torsion. *Annales scientifiques de L'École Normale Supérieure* 28, 523–579.
275. Lebedev, L.P. and Vorovich, I.I. 2002. *Functional Analysis in Mechanics*. New York: Springer.

276. Lenci, S. and Menditto, G. 2000. Weak interface in long fibre composites. *Int. J. Sol. Struct.* 37:4239–4260.
277. Levy, A.J. and Dong, Z. 1998. Effective transverse response of fibre composites with nonlinear interface. *J. Mech. Phys. Sol.* 46:1279–1300.
278. Levy, A.J. 1996. The effective dilatational response of fibre reinforced composites with nonlinear interface. *J. Appl. Mech.* 63:357–364.
279. Levy, A.J. 2000. The fibre composite with nonlinear interface. Part I: Axialtension. *J. Appl. Mech.* 67:727–732.
280. Li, D. and H. Benaroya. 1992. Dynamics of periodic and near-periodic structures. *Appl. Mech. Rev.* 45(11):447–459.
281. Li, D. and Benaroya, H. 1996. Vibration localization in multi-coupled and multi-dimensional near-periodic structures. *Wave Motion* 23:67–82.
282. Liang, B., Yuan, B. and Chen, J.C. 2009. Acoustic diode: rectification of acoustic energy flux in one-dimensional systems. *Phys. Rev. Let.* 103:104301.
283. Lin, Y.K. 1996. Dynamics of disordered periodic structures. *Appl. Mech. Rev.* 49:57–64.
284. Liu, Z., Chan, C.T., Sheng, P., Goertzen, A.L. and Page, J.H. 2000. Elastic wave scattering by periodic structures of spherical objects: theory and experiment. *Phys. Rev. B* 62:2446–2457.
285. Love, A.E.H. 1927. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th edn. Cambridge: Cambridge University Press.
286. Lubin, G. 2014. *Handbook of Composites*. Berlin: Springer.
287. Lubineau, G., Azdoud, Y., Han, F., Rey, C. and Askari, A. 2012. Amorphing strategy to couple non-local to local continuum mechanics. *J. Mech. Phys. Sol.* 60:1088–1102.
288. Lucia, U. 2016. Macroscopic irreversibility and microscopic paradox: A Constructal Law analysis of atoms as open systems. *Sci. Rep.* 6:35796.
289. Lur'e, A.I. 1951. *Operational Calculus and its Applications to the Problems of Mechanics*. Moscow: GITTL (in Russian).
290. Lur'e, A.I. 1990. *Nonlinear Theory of Elasticity*. Amsterdam: North-Holland.
291. Malyi, V.I. 1971. About nonlocal theory of elasticity. In: *IV All-Union Conference on Strength and Plasticity*. Moscow: Nauka, pp. 74–78 (in Russian).
292. Malyi, V. 2021. Theoretical determination of the five physical constants of the Toupin-Mindlin gradient elasticity for polycrystalline materials. In: *Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems*, Cham: Springer Nature.145–154. Abramian, A.K., Andrianov, I.V., Gaiko, V.A. (eds). *Advanced Structured Matherials* 139.
293. Manevich, A.I. and Manevitch, L.I. 2005. *The Mechanics of Nonlinear Systems with Internal Resonances*. Singapore: World Scientific.
294. Manevitch, L.I. and Gendelman, O.V. 2011. *Tractable Models of Solid Mechanics. Formulation, Analysis and Interpretation*. Berlin, Heidelberg, London, New York: Springer.
295. Manevitch, L.I. and Pilipchuk, V.N. 1985. Localized vibrations in linear and nonlinear lattices. *Adv. Mech.* 13:107–134 (in Russian).
296. Manevitch, L.I. and Smirnov, V.V. 2008. *Solitons in Macromolecular Systems*. New York: Nova Science Publishers.

297. Manevitch, L.I., Kovaleva, A.S., Smirnov, V.V. and Starosvetsky, Yu. 2017. *Nonstationary Resonant Dynamics of Oscillatory Chains and Nanostructures*. Singapore: Springer.
298. Manevitch, L.I., Mikhlin, Yu.V. and Pilipchuk, V.N. 1989. *Method of Normal Vibrations for Essentially Nonlinear Systems*. Moscow: Nauka (in Russian).
299. Maradudin, A.A. 1965. Some effects of point defects on the vibrations of crystal lattices. *Rep. Prog. Phys.* 28:331–380.
300. Maradudin, A.A. 2003. Lattice dynamics. *Ann. Rev. Phys. Chem.* 14(1):89–116.
301. Maradudin, A.A., Montroll, E.W. and Weiss, G.H. 1971. *Theory of Lattice Dynamics in the Harmonic Approximation*. New York: Academic Press.
302. Martowicz, A., Roemer, J., Staszewski, W.J., Ruzzene, M. and Uhl, T. 2019. Solving partial differential equations in computational mechanics via nonlocal numerical approaches. *ZAMM* 99(4):e201800342.
303. Maslov, V.P. 1976. *Operational Methods*. Moscow: Mir.
304. Maslov, V.P. and Mosolov, P.P. 2000. *Nonlinear Wave Equations Perturbed by Viscous Terms*. Berlin, New York: de Gruyter.
305. Maslov, V.P. and Omelyanov, G.A. 2001. *Geometric Asymptotic for Nonlinear PDE. I*. Providence: AMS.
306. Maugin, G.A. 1999. *Nonlinear Waves in Elastic Crystals*. Oxford: Oxford University Press.
307. Maugin, G.A. 1999. From Piola's manifold to Cosserats' structure. In: *Geometry, Continua and Microstructure*, Maugin, G.A. (Ed.) Paris: Hermann, pp. 113–120.
308. Maugin, G.A. 2013. *Continuum Mechanics Through the Twentieth Century. A Concise Historical Perspective*. Dordrecht: Springer.
309. May, R. 1976. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature* 261:459–467.
310. McPhedran, R.C. and McKenzie, D.R. 1978. The conductivity of lattices of spheres. I. The simple cubic lattice. *Proc. Roy. Soc. London A*359:45–63.
311. McPhedran, R.C., Poladian, L. and Milton, G.W. 1988. Asymptotic studies of closely spaced, highly conducting cylinders. *Proc. Roy. Soc. London A*415:185–196.
312. Mencik, J.M. and Ichchou, M.N. 2005. Multi-mode propagation and diffusion in structures through finite elements. *Eur. J. Mech. A/Solids* 24(5):877–898.
313. Meng, S. and Guzina, B.B. 2018. On the dynamic homogenization of periodic media: Willis' approach versus two-scale paradigm. *Proc. R. Soc. A* 474:20170638.
314. Metrikine, A.V. 2006. On causality of the gradient elasticity models. *J. Sound Vib.* 297:727–742.
315. Metrikine, A.V. and Askes, H. 2002. One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 1: Generic formulation. *Eur. J. Mech. A/Sol.* 21:555–572.
316. Metrikine, A.V. and Askes, H. 2008. Anisotropic dynamically consistent gradient elasticity model derived from a 2D lattice. *Phil. Mag.* 86(21):3259–3268.
317. Maldovan, M. 2013. Sound and heat revolution in phononics. *Nature* 503:209–217.
318. Mindlin, R.D. 1964. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 16:51–78.

319. Mindlin, R.D. and Herrmann, G. 1952. A one-dimensional theory of compressional waves in an elastic rod. *Proc. First U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, ASME 187–191.
320. Monterode Espinosa, F.R., Jiménez E. and Torres, M. 1998. Ultrasonic band gap in a periodic two-dimensional composite. *Phys. Rev. Lett.* 80:1208–1211.
321. Moon, F.C. 1987. *Chaotic Vibrations. An Introduction for Applied Scientists and Engineers.* Ithaca: Cornell University.
322. Mortell, M.P. and Seymour, R.B. 1972. Pulse propagation in a nonlinear viscoelastic rod of finite length. *SIAM J. Appl. Math.* 22:209–224.
323. Mortell, M.P. and Varley, E. 1970. Finite amplitude waves in bounded media: nonlinear free vibrations of anelastic panel. *Proc. Roy. Soc. A* 318:169–196.
324. Movchan, A.B. and Slepyan, L.I. 2007. Band gap Green's functions and localized oscillations. *Proc. R. Soc. A.* 463:2709–2727.
325. Movchan, A.B., Movchan, N.V., Jones, I.S. and Colquitt, D.J. 2018. *Mathematical Modelling of Waves in Multi-Scale Structured Media.* London: Taylor and Francis.
326. Movchan, A.B., Movchan, N.V. and Poulton, C.G. 2002. *Asymptotic Models of Fields in Dilute and Densely Packed Composites.* London: Imperial College Press.
327. Munkhammar, J. 2013. Chaos in fractional order logistic equation. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 16:511–519.
328. Murnaghan, F.D. 1951. *Finite Deformation of an Elastic Solid.* New York: Wiley.
329. Myshkis, A.D. 2005. Mixed functional differential equations. *J. Math. Sc.* 129(5):4111–4226.
330. Nayfeh, A.H. 2000. *Perturbation Methods.* New York: Wiley.
331. Nayfeh, A.H. and Mook, D.T. 1979. *Nonlinear Oscillations.* New York: Wiley.
332. Needleman, A. 1990. An analysis of tensile decohesion along an interface. *J. Mech. Phys. Sol.* 38:289–324.
333. Needleman, A. 1992. Micromechanical modelling of interfacial decohesion. *Ultramicroscopy* 40:203–214.
334. Nemat-Nasser, S. and Srivastava, A. 2011. Overall dynamic constitutive relations of layered elastic composites. *J. Mech. Phys.* 59:1953–2258.
335. Nesterenko, V.F. 2018. Waves in strongly nonlinear discrete systems. *Phil. Trans. R. Soc. A* 376:20170130.
336. Nie, S. and C. Basaran. 2005. A micromechanical model for effective elastic properties of particulate composites with imperfect interfacial bonds. *Int. J. Sol. Struct.* 42:4179–4191.
337. Ogden, R.W. 1997. *Nonlinear Elastic Deformations.* New York: Dover.
338. Olevnik, O.A., Shamaev, A.S. and Yosifian, G.A. 1992. *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization.* Amsterdam: North-Holland.
339. Osharovich, G.G. and Ayzenberg-Stepanenk, M.V. 2012. Wave localization in stratified square-cell lattices: The antiplane problem. *J. Sound Vib.* 331:1378–1397.
340. Pagano, S. and Paroni, R. 2003. A simple model for phase transition: from the discrete to the continuum problem. *Q. Appl. Math.* 61:89–109.
341. Pal, R.K., Rimoli, J.J. and Ruzzene, M. 2016. Effect of large deformation pre-loads on the wave properties of hexagonal lattices. *Smart Mater. Struct.* 25:054010.
342. Pal, R.K., Ruzzene, M. and Rimoli, J.J. 2016. A continuum model for nonlinear lattices under large deformations. *Int. J. Sol. Struct.* 96:300–319.

343. Palmov, V.A. 1967. Propagation of vibrations in a nonlinear dissipative medium. *J. Appl. Math. Mech.* 31:763–769.
344. Palmov, V.A. 2014. *Vibrations of Elasto-Plastic Bodies*. Berlin: Springer.
345. Panasenko, G.P. 2005. *Multi-Scale Modeling for Structures and Composites*. Berlin: Springer.
346. Parks, M.L., Bochev, P.B. and Lehoucq, R.B. 2008. Connecting atomistic-to-continuum coupling and domain decomposition. *Multisc. Mod. Simul.* 7:362–380.
347. Parnell, W.J. 2007. Effective wave propagation in a prestressed nonlinear elastic composite bar. *IMA J. Appl. Math.* 72:223–244.
348. Parnell, W.J. 2012. Nonlinear pre-stress for cloaking from antiplane elastic waves. *Proc. R. Soc. A.* 468:563–580.
349. Parnell, W.J. and Abrahams, I.D. 2006. Dynamic homogenization in periodic fibre reinforced media. Quasi-static limit for SH waves. *Wave Motion* 43:474–498.
350. Parnell, W.J. and Abrahams, I.D. 2008. Homogenization for wave propagation in periodic fibre-reinforced media with complex microstructure. I - Theory. *J. Mech. Phys. Sol.* 56:2521–2540.
351. Parnell, W.J. and Abrahams, I.D. 2011. The effective wave number of a pre-stressed nonlinear microvoided composite. *J. Phys.: Conf. Ser.* 269:012007.
352. Parnell, W.J. and Grimal, Q. 2009. The influence of mesoscale porosity on cortical bone anisotropy. Investigations via asymptotic homogenization. *J. Roy. Soc. Interf.* 6:97–109.
353. Paroni, R. 2003. From discrete to continuum: a Young measure approach. *ZAMP* 54(2):328–348.
354. Pasternak, E. and Mühlhaus H.B. 2005. Generalized homogenization procedure for granular material. *J. Eng. Math.* 52:199–229.
355. Pavlov, I.S. and Potapov, A.I. 2008. Structural models in mechanics of nanocrystalline media. *Dokl. Phys.* 53(7):408–412.
356. Peerlings, R.H.J., Geers, M.G.D., de Borst, R. and Brekelmans, W.A.M. 2001. A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *Int. J. Sol. Struct.* 38:7723–7746.
357. Peregrin, D.H. 1966. Calculation of the development of an undular bore. *Fluid Mech.* 25:321–330.
358. Perrins, W.T, McKenzie, D.R. and McPhedran, R.C. 1979. Transport properties of regular arrays of cylinders. *Proc. Roy. Soc.* A369:207–225.
359. Petropoulou, E.N. 2010. A discrete equivalent of the logistic equation. *Adv. Differ. Eq.* 2010:457073.
360. Pfaller, G., Possart, P., Steinmann, M., Rahimi, F., Müller-Plathe and Böhm, M.C. 2012. A comparison of staggered solution schemes for coupled particle-continuum systems modeled with the Arlequin method. *Comp. Mech.* 49:565–579.
361. Pichugin, A.V., Askes, H. and Tyas, A. 2008. Asymptotic equivalence of homogenization procedures and fine-tuning of continuum theories. *J. Sound Vib.* 313:858–874.
362. Picu, R.C. 2002. On the functional form of non-local elasticity kernels. *J. Mech. Phys. Sol.* 50:1923–1939.
363. Pierre, C. and Dowell, E.H. 1987. Localization of vibrations by structural irregularity. *J. Sound Vib.* 114:549–564.

364. Pierre, Ch., Castanier, M. and Joe, C.W. 1996. Wave localization in multi-coupled periodic structures. Application to truss beams. *Appl. Mech. Rev.* 49:65–86.
365. Pilipchuk, V.N. and Starushenko, G.A. 1997. A version of non-smooth transformations of variables for one-dimensional elastic systems of periodic structures. *J. Appl. Math. Mech.* 61(2):265–274.
366. Pilipchuk, V.N., Andrianov, I.V. and Markert, B. 2016. Analysis of micro-structural effects on phononic waves in layered elastic media with periodic non smooth coordinates. *Wave Motion* 63:149–169.
367. Platts, S.B., Movchan, N.V., McPhedran, R.C. and Movchan, A.B. 2002. Two-dimensional phononic crystals and scattering of elastic waves by an array of voids. *Proc. R. Soc. Lond. A.* 458:2327–2347.
368. Platts, S.B., Movchan, N.V., McPhedran, R.C., Movchan, A.B. 2003. Band gaps and elastic waves in disordered stacks: normal incidence. *Proc. R. Soc. Lond. A.* 459:221–240.
369. Porubov, A.V. 2003. *Amplification of Nonlinear Strain Waves in Solids*. Singapore: WorldScientific.
370. Porubov, A.V. 2009. *Localization of Nonlinear Strain Waves*. Moscow: FIZMATLIT (in Russian).
371. Porubov, A.V. and Andrianov, I.V. 2013. Nonlinear waves in diatomic crystals. *Wave Motion* 50:1153–1160.
372. Porubov, A.V. and Velarde, M.G. 2002. Strain kinks in anelastic rod embedded in a viscoelastic medium. *Wave Motion* 35:189–204.
373. Porubov, A.V., Osokina, A.E. and Antonov, I.D. 2020. Nonlinear dynamics of two-dimensional lattices with complex structure. *Nonlinear Wave Dynamics of Materials and Structures*. Springer Nature: Cham, 309–334.
374. Potapov, A.I., Pavlov, I.S. and Lisina, S.A. 2009. Acoustic identification of nanocrystalline media. *J. Sound Vib.* 322:564–580.
375. Potapov, A.I., Pavlov, I.S. and Maugin, G.A. 2006. A 2D granular medium with rotating particles. *Int. J. Solids Str.* 43(20):6194–6207.
376. Poulton, C.G., Movchan, A.B., McPhedran, R.C., Nicorovici, N.A. and Antipov, Y.A. 2000. Eigenvalue problems for doubly periodic structures and phononic band gaps. *Proc. R. Soc. Lond. A.* 456:2543–2559.
377. Prudnikov, A.P., Brichkov, Yu.A. and Marichev, O.I. 1986. *Integrals and Series. Vol. 1. Elementary Functions*. New York: Gordon&Breach.
378. Psarobas, I.E., Stefanou, N. and Modinos, A. 2000. Scattering of elastic waves by periodic arrays of spherical bodies. *Phys. Rev. B* 62:278–291.
379. Rayleigh, J.W.S. 1877–1888. *The Theory of Sound*, 1-2. London: Macmillan and Co.
380. Rayleigh, Lord Sec. R.S. 1892. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium. *The London, Edinburgh, and Dublin Phil. Mag. J. Sci.* 34(211):481–502.
380. Rayleigh, Lord Sec. R.S. 1892. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium. *The London, Edinburgh, and Dublin Phil. Mag. J. Sci.* 34(211):481–502.

381. Rednikov, A.Ye., Velarde, M.G., Ryazantsev, Yu.S., Nepomnyashchy, A.A. and Kurdyumov, V.N. 1995. Cnoidal wave trains and solitary waves in a dissipation modified Korteweg- de Vries equation. *Acta Appl. Math.* 39:457–475.
382. Remoissenet, M. 1986. Low-amplitude breather and envelope solitons in quasi-one-dimensional physical models. *Phys. Rev. B* 33:2386–2392.
383. Ribeiro, P. and Petyt, M. 1999. Non-linear vibration of beams with internal resonances by the hierarchical finite-element method. *J. Sound Vib.* 224:591–624.
384. Rogers, R.C. and Truskinovsky, L. 1997. Discretization and hysteresis. *Physica B* 233:370–375.
385. Rosenau, Ph. 1986. Dynamics of nonlinear mass-spring chains near the continuum limit. *Phys. Lett. A* 118(5): 222–227.
386. Rosenau, Ph. 1987. Dynamics of dense lattices. *Phys. Rev. B* 36(11):5868–5876.
387. Rosenau, Ph. 1988. Dynamics of dense discrete systems. *Prog. Theor. Phys.* 89(5):1028–1042.
388. Rosenau, Ph. 1989. Extending hydrodynamics via the regularization of the Chapman-Enskog expansion. *Phys. Rev. A* 40(12):7193–7196.
389. Rosenau, Ph. 2003. Hamiltonian dynamics of dense chains and lattices: or how to correct the continuum. *Phys. Lett. A* 311(5):39–52.
390. Rudenko, O.V. 2006. Giant nonlinearities in structurally inhomogeneous media and the fundamentals of nonlinear acoustic diagnostic techniques. *Phys. Uspek.* 49:69–87.
391. Rushchitsky, J.J. 1999. Interaction of waves in solid mixtures. *Appl. Mech. Rev.* 52:35–74.
392. Rushchitsky, J. 2014. *Nonlinear Elastic Waves in Materials*. Berlin: Springer.
393. Sachdev, P.L. 1987. *Nonlinear Diffusive Waves*. Cambridge: Cambridge University Press.
394. Sakuma, Y., Païdoussis, M.P. and Price, S.J. 2010. Mode localization phenomena and stability of disordered trains and train-like articulated systems travelling in confined fluid. *J. Sound Vib.* 329:5501–5519.
395. Salupere, A., Engelbrecht, J. and Maugin, G.A. 2001. Solitonic structures in KdV-based higher-order systems. *Wave Motion* 34:51–61.
396. Salupere, A., Maugin, G.A. and Engelbrecht, J. 1994. Korteweg- deVries soliton detection from a harmonic input. *Phys. Lett. A* 192:5–8.
397. Samarskii, A.A. and Mikhailov, A.P. 2002. *Principles of Mathematical Modeling. Ideas, Methods, Examples*. London: Taylor and Francis.
398. Samsonov, A.M. 2001. *Strain Solitons in Solids and How to Construct Them*. Boca Raton: CRC Press.
399. Santosa, F. and Symes, W. 1991. A dispersive effective medium for wave propagation in periodic composites. *SIAM J. Appl. Math.* 51:984–1005.
400. Schrödinger, E. 1914. Zur Dynamik elastisch gekoppelter Punktsysteme. *Annalen der Physik* 349(14):916–934.
401. Scott, A. 2003. *Nonlinear Science: Emergence and Dynamics of Coherent Structures*. New York: Oxford University Press.
402. Seeger, A. 2010. On the simulation of dispersive wave propagation by elasticity models. *Philos. Mag.* 90(9):1101–1104.

403. Sen, A. and Mukherjee, D. 2009. Chaos in the delay logistic equation with discontinuous delays. *Chaos Soliton Fract.* 40:2126–2132.
404. Seymour, R.B. and Varley, E. 1970. High frequency, periodic disturbances in dissipative systems. I. Small amplitude, finite rate theory. *Proc. Roy. Soc. A* 314:387–415.
405. Shamrovskiy, A.D. 2004. *Discrete Approaches in Economics*. Zaporozhye: Zaporozhye State Engineering Academy (in Russian).
406. Shodja, H.M., Zaheri, A. and Tehranchi, A. 2013. Ab initio calculations of characteristic lengths of crystalline materials in first strain gradient elasticity. *Mech. Mater.* 61:73–78.
407. Shokin, Y.I. 1983. *The Method of Differential Approximation*. Berlin: Springer.
408. Shulga, N.A. 2003. Propagation of elastic waves in periodically inhomogeneous media. *Int. Appl. Mech.* 39:763–796.
409. Shulga, N.A. 2003. Propagation of coupled waves interacting with an electromagnetic field in periodically inhomogeneous media. *Int. Appl. Mech.* 39:1146–1172.
410. Sievers, A.J. and Page, J.B. 1995. Unusual local mode systems. In: *Dynamical Properties of Solids, Vol7. Phonon Physics* the Cutting Edge, Horton, G.K., Maradudin, A.A. (eds.), pp.137-256.
411. Sigalas, M.M. and Economou, E.N. 1992. Elastic and acoustic wave band structure. *J. Sound Vib.* 158:377–382.
412. Sigalas, M.M. and Economou, E.N. 1993. Band structure of elastic waves in two dimensional systems. *Sol. Stat. Comm.* 86:141–143.
413. Sigalas, M.M. and Economou, E.N. 1994. Elastic waves in plates with periodically placed inclusions. *J. Appl. Phys.* 75:2845–2850.
414. Sigalas, M.M. and Economou, E.N. 1996. Attenuation of multiple-scattered sound. *Europhys. Lett.* 36:241–246.
415. Slepyan, L.I. 1972. *Non-steady-state Elastic Waves*. Leningrad: Sudostroyeniye (in Russian).
416. Slepyan, L.I. 1981. Crack propagation in high-frequency lattice vibration. *Sov. Phys. Dokl.* 26:900–902.
417. Slepyan, L.I. 1981. Dynamics of a crack in a lattice. *Sov. Phys. Dokl.* 26:538–540.
418. Slepyan, L.I. 1982. The relation between the solutions of mixed dynamic problems for a continuous elastic medium and a lattice. *Sov. Phys. Dokl.* 27:771–772.
419. Slepyan, L.I. 1984. Dynamics of brittle fracture in media with a structure. *Mech. Sol.* 19(6):114–115.
420. Slepyan, L.I. and Troyankina, L.V. 1984. Fracture wave in a chain structure. *J. Appl. Mech. Techn. Phys.* 25(6):921–927.
421. Slepyan, L.I. and Troyankina, L.V. 1988. Impact waves in a nonlinear chain. In: *Plasticity and Fracture of Solids*, Gol'dstein, R.V. (ed.) Moscow: Nauka, pp. 175–186 (in Russian).
422. Smith, B., Bjorstad, P. and Gropp, W. 1996. *Domain Decomposition*. Cambridge: Cambridge University Press.
423. Smyshlyaev, V.P. 2009. Propagation and localization of elastic waves in highly anisotropic periodic composites via two-scale homogenization. *Mech. Mat.* 41:434–447.
424. Strogatz, S.H. 2018. *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Boca Raton: CRC Press.

425. Sun, C.T., Achenbach, J.D., Herrmann, G. 1968. Continuum theory for a laminated media. *J. Appl. Mech.* 35:467–475.
426. Tadmor, E.B., Ortiz, M. and Phillips, R. 1996. Quasicontinuum analysis of defects in crystals. *Phil. Mag. A* 73:1529–1563.
427. Tamura, S., Shields, J.A. and Wolfe, J.P. 1991. Lattice dynamics and elastic phonon scattering in silicon. *Phys. Rev. B* 44:3001–3011.
428. Tan, H., Liu, C., Huang, Y. and Geubelle, P.H. 2005. The cohesive law for the particle/matrix interfaces in high explosives. *J. Mech. Phys. Sol.* 53:1892–1917.
429. Tarasov, V.E. 2017. Discrete wave equation within finite differences. *Appl. Math. Inf. Sci. Lett.* 5(2):41–44.
430. Tarasova, V.V. and Tarasov, V.E. 2017. Logistic map with memory from economic model. *Chaos Solit. Fract.* 95:84–91.
431. Ting, T.C.T. 1980. Dynamic response of composites. *Appl. Mech. Rev.* 33:1629–1635.
432. Tokarzewski, S., Telega, J.J. and Galka, A. 2000. Prediction of torsional rigidities of bone filled with marrow: The application of multipoint Padé approximants. *Acta Bioeng. Biomech.* 2:560–566.
433. Torres, M., Monterode Espinosa, F.R., Garcia-Pablos, D., Garcia, N. 1999. Sonic band gaps in finite elastic media: surface states and localization phenomena in linear and point defects. *Phys. Rev. Lett.* 82:3054–3057.
434. Toupin, R.A. 1964. Theories of elasticity with couple-stresses. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 17(2):85–112.
435. Truskinovsky, L. and Vainchtein, A. 2005. Quasicontinuum modelling of short-wave instabilities in crystal lattices. *Phil. Mag.* 85(33-35):4055–4065.
436. Tvergaard, V. 1995. Fibre debonding and breakage in a whisker reinforced metal. *Mater. Sci. Eng. A* 90:215–222.
437. Tvergaard, V. and Hutchinson, J.W. 1993. The influence of plasticity on mixed-mode interface toughness. *J. Mech. Phys. Sol.* 41:1119–1135.
438. Tzirakis, N. and Kevrekidis, P.G. 2005. On the collapse arresting effects of discreteness. *Math. Comput. Simul.* 69:553–566.
439. Ulam, S.M. 1960. *A Collection of Mathematical Problems*. New York: Interscience Publishers.
440. Vakakis, A.F., King, M.E. and Pearlstein, A.J. 1994. Forced localization in a periodic chain of nonlinear oscillators. *Int. J. Non-Linear Mech.* 29:429–447.
441. Vakakis, A.F., Manevitch, L.I., Mikhlin, Yu.V., Pilipchuk, V.N. and Zevin, A.A. 1996. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. New York: Wiley.
442. Vakakis, A.F., Nayfeh, A.H. and King, M.E. 1993. A multiple scales analysis of nonlinear localized modes in a cyclic periodic system. *J. Appl. Mech.* 60:388–397.
443. Van Dyke, M. 1975. *Perturbation Methods*. Stanford: The Parabolic Press.
444. Van Rietbergen, B. and Huiskes, R. 2001. Elastic constants of cancellous bone. In: Cowin, S.C. (ed.) *Bone Mechanics Handbook*. Boca Raton: CRC Press, 15-1–15-24.
445. Varley, E. and Rogers, T.G. 1967. The propagation of high frequency, finite acceleration pulses and shocks in viscoelastic materials. *Proc. Roy. Soc. A* 296:498–518.
446. Vasiliev, V.V. and Lurie, S.A. 2016. Correct nonlocal generalized theories of elasticity. *Phys. Mesomech.* 19(3):269–281.

447. Vasiliev, A.A., Dmitriev, S.V. and Miroshnichenko, A.E. 2010. Multi-field approach in mechanics of structural solids. *Int. J. Sol. Struct.* 47:510–525.
448. Vedenova, E.G., Manevich, L.I. and Pilipchuk, V.N. 1985. Normal oscillations of a string with concentrated masses on non-linearly elastic supports. *Appl. Math. Mech.* 49:153–159.
449. Verhulst, P.F. 1845. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouv. Mém. del' Académie Royale des Sci. Et Belles-Lett. De Brux.*, 18:1–42.
450. Verhulst, P.F. 1847. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. *Mém. de l'Acad'emie Royale des Sci. des Lett. et des Beaux-Arts de Belg.* 20:1–32.
451. Vishik, M.I. and Lyusternik, L.A. 1960. The asymptotic behaviour of solutions of linear differential equations with large or quickly changing coefficients and boundary conditions. *Russ. Math. Surv.* 15(4):23–91.
452. Wagner, G. J. and Liu, W.K. 2003. Coupling of atomistic and continuum simulations using a bridging scale decomposition. *J. Comput. Phys.* 190:249–274.
453. Wattis, J.A.D. 1993. Approximations to solitary waves on lattices, II: quasi-continuum approximations for fast and slow waves. *J. Phys. A: Math. Gen.* 26:1193–1209.
454. Wattis, J.A.D. 2000. Quasi-continuum approximations to lattice equations arising from discrete nonlinear telegraph equation. *J. Phys. A: Math. Gen.* 33:5925–5944.
455. Weinan, E. and Engquist, B. 2003. The heterogeneous multiscale methods. *Comm. Math. Sci.* 1(1):87–132.
456. Weissert, T.P. 1997. *The Genesis of Simulations in Dynamics: Pursuing the Fermi-Pasta-Ulam Problem.* Berlin: Springer.
457. Wilcox, D.C. 1995. *Perturbation Methods in the Computer Age.* La Canada, Ca.: DCW Industries Inc.
458. Williams, J.L. and Lewis, J.L. 1982. Properties and an anisotropic model of cancellous bone from the proximal tibial epiphysis. *Trans. ASMEJ. Biomech. Eng.* 104(1):50–56.
459. Willis, J.R. 2009. Exact effective relations for dynamics of a laminated body. *Mech. Mater.* 41:385–393.
460. Willis, J.R. 2011. Effective constitutive relations for waves in composites and metamaterials. *Proc. R. Soc. A* 467(2131):1865–1879.
461. Willis, J.R. 2012. A comparison of two formulations for effective relations for waves in a composite. *Mech. Mater.* 47:51–60.
462. Wolfe, J.P. 1998. *Imaging Phonons: Acoustic Wave Propagation in Solids.* Cambridge: Cambridge University Press.
463. Xiao, S.P. and Belytschko, T. 2004. A bridging domain method for coupling continua with molecular dynamics. *Comp. Met. Appl. Mech. Eng.* 193:1645–1669.
464. Yan, Z.-Z. and Zhang, Ch. 2012. Band structures and localization properties of a periodic layered phononic crystals. *Phys. B: Phys. Condens. Matter.* 407:1014–1019.
465. Yan, Z.-Z., Zhang, Ch. And Wang, Y.-S. 2009. Analysis of wave propagation and localization in periodic/disordered layered composite structures by a mass-spring model. *Appl. Phys. Lett.* 94:161909.

466. Yan, Z.-Z., Zhang, Ch. and Wang, Y.-S. 2010. Wave propagation and localization in randomly disordered layered composites with local resonances. *Wave Motion* 47:409–420.
467. Zabusky, N.J. and Deem, G.S. 1967. Dynamics of nonlinear lattices. I. Localized optical excitations, acoustic radiation, and strong nonlinear behavior. *J. Comput. Phys.* 2:126–153.
468. Zabusky, N.J. and Kruskal, M.D. 1965. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.* 15:240–243.
469. Zaitsev, V.Yu., Nazarov, V.E. and Talanov, V.I. 2006. @ Nonclassical ”manifestations of microstructure-induced nonlinearities: new prospects for acoustic diagnostics. *Phys. Usp.* 49:89–94.
470. Zakharov, V.E. 1974. On stochastization of one-dimensional chains of nonlinear oscillators. *Sov. Phys. JETP* 38(1):108–110.
471. Zakharov, Yu. 2019. On physical principles and mathematical mechanisms of the phenomenon of irreversibility. *Phys. A: Statist. Mech. Appl.* 525:1289–1295.
472. Zalipaev, V.V., Movchan, A.B., Poulton, C.G., McPhedran, R.C. 2002. Elastic waves and homogenization in oblique periodic structures. *Proc. R. Soc. Lond. A.* 458:1887–1912.
473. Zevin, A.A. 1991. Symmetrization of functionals and its applications in mechanics problems. *Mech. Sol.* 26(5):109–118.
474. Zevin, A.A. 1996. Localization of periodic oscillations in discrete non-linear systems. *J. Sound Vib.* 193(4):847–862.
475. Zevin, A.A. 1998. Estimates of eigenvalue of self-adjont boundary-value problems with periodic coefficients. *Ukr. Math. J.* 50(5):719–722.
476. Zheludev, N.I. and Kivshar, Yu.S. 2012. From metamaterials to metadevices. *Nat. Mater.* 11:917–924.
477. Zhikov, V.V. 1991. Estimates for the averaged matrix and the averaged tensor. *Russ. Math. Surv.* 46(3):65–136.
478. Zivieri, R., Garesci, F., Azzarboni, B., Chiappini, M. and Finocchio, G. 2019. Nonlinear dispersion relation in anharmonic periodic massspring and mass-in-mass systems. *J. Sound Vib.* 462:114929





