

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Instytut Podstaw Budowy Maszyn

III Międzynarodowa Konferencja n.t.: **MODELOWANIE I SYMULACJA ZJAWISK
TARCIOWYCH W UKŁADACH FIZYCZNYCH I STRUKTURACH TECHNICZNYCH**
"TARCIE 2004"

Warszawa, maj 2004

J. Awrejcewicz, Yu. Pyryev
Katedra Automatyki i Biomechaniki
Politechnika Łódzka

NIESTABILNOŚĆ TERMOSPĘŻYSTA CIERNA W UKŁADACH TRIBOLOGICZNYCH

1. Wstęp

W pracy zbadano mechanizm powstania niestabilności termosprężystej czarnej kontaktujących się ciał (NTSC), które modelują pracę układów uszczelnień ruchomych (stykowych), klocka hamulcowego oraz innych układów tribologicznych w przypadku stałej prędkości względnej poruszających się ciał [1-5]. TNSC charakteryzuje wzrost wykładniczy w czasie charakterystyk kontaktowych, tj.: temperatury i ciśnienia, podczas gdy prędkość względna poślizgu ciał przewyższa pewną prędkość krytyczną. Wyprowadzono równanie służące do określenia prędkości krytycznej. Otrzymane wyniki mogą być wykorzystane podczas obliczeń wytrzymałościowych ruchomych połączeń maszyn i mechanizmów i przy wprowadzaniu zaleceń dotyczących zwiększenia niezawodności i trwałości węzłów tarcia, a w szczególności przy sformułowaniu kryteriów dotyczących optymalnego wyboru materiałów par ciernych i podczas badania procesów wytwarzania się ciepła podczas szlifowania lub hamowania mechanizmów transportowych.

Zagadnienia niestabilności termosprężystej powstającej wskutek różnych zniekształceń termicznych kontaktujących się ciał i zależności oporu termicznego od ciśnienia kontaktowego rozpatrywał J. Barber np. w pracy [1]. Wykorzystując metodę zaburzeń, w pracach z udziałem Barbera dokonano analizy warunków powstania niestabilności termosprężystej dla dwóch kontaktujących się półprzestrzeni termosprężystych, dla warstwy i półprzestrzeni termosprężystych, dwóch warstw, dwóch cylindrów cienkościennych półnieskończonych i kontaktujących się końcami oraz dla

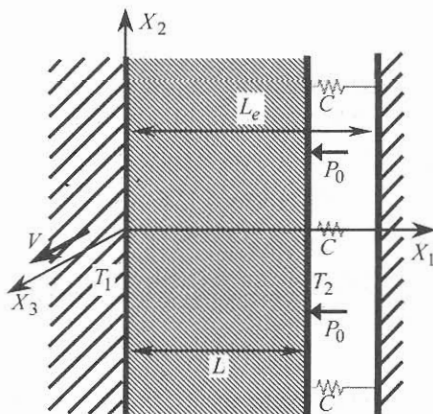
zagadnienia kontaktowego termosprężystości dotyczącego dwuwarstwowego długiego walca.

W większości zagadnień kontaktowych [1] poświęconych temu zagadnieniu ciała są dociskane siłą (zagadnienia pierwszego rodzaju). Dla zagadnień jednowymiarowych takie podejście prowadzi do znanego rozkładu stałego ciśnienia w strefie kontaktu. W pracach [4,5] rozpatrzono zagadnienie kontaktowe z uwzględnieniem zbliżenia się ciał (zagadnienia drugiego rodzaju). Dla zagadnień jednowymiarowych takie podejście prowadzi do tego, że ciśnienie w strefie kontaktu nie jest wielkością znaną. Ponadto w tym przypadku zagadnienia sprężystości i przewodnictwa ciepła są sprzężone poprzez warunki brzegowe. W tej pracy w odróżnieniu od wymienionych prac innych autorów analizuje się model, który jest bardziej zbliżony do rzeczywistości.

Celem tej pracy jest m.in. zbadanie, czy i przy jakiej prędkości może powstać niestabilność termosprężysta cierna w analizowanym układzie modelującym zespół poruszającego się ciała wraz z uszczelnieniem dociskany sprężyną.

2. Matematyczne sformułowanie problemu

Rozpatrzmy model termosprężystego kontaktu dwóch warstw (rys. 1). Przyjmujemy, że lewa warstwa jest sztywna i ślizga się z prędkością stałą V w kierunku osi X_3 układu kartezjańskiego X_1, X_2, X_3 po powierzchni zamocowanej warstwy o grubości L . Siły tarcia F_{fr} wytwarzają na powierzchni kontaktu $X_1 = 0$ materiału parzących ciepło. Suma gęstości strumieni cieplnych (skierowanych do wewnątrz ciał) równa się gęstości mocy sił tarcia. Zakładamy, że na powierzchnię prawej termosprężystej warstwy działają ciśnienie kontaktowe P_0 środowiska o temperaturze $T_2^w(X_2, t) = T_2^0 h_2(X_2, t)$ i siły pochodzące od ściśniętych sprężyn o współczynniku sztywności C .



Rys. 1 Schemat analizowanego układu

Pomiędzy powierzchniami stykowymi dochodzi do wymiany ciepła zgodnie z prawem Newtona i przy założeniu oporu cieplnego $R(P)$, który zależy od ciśnienia kontaktowego. Temperatura lewej warstwy jest znaną i wynosi $T_1^w(X_2, t) = T_1^0 h_1(X_2, t)$.

Ponadto założymy, że $F_{fr} = f P(t)$, gdzie f jest współczynnikiem tarcia, a $P(t)$ jest ciśnieniem kontaktowym. Wartości F_{fr}, C są odniesione do jednostki obszaru kontaktu.

Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami, celem naszym będzie wyznaczenie temperatury $T(X_1, X_2, t)$ i przemieszczeń $U_n(X_1, X_2, t)$ w warstwie oraz naprężeń $\sigma_{nm}(X_1, X_2, t)$, $n, m = 1, 2, 3$.

Rozpatrywane zagadnienie sprowadza się do rozwiązania układu równań teorii naprężeń cieplnych [Nowacki (1986)] o postaci

$$2(1-\nu) \frac{\partial^2 U_1(X_1, X_2, t)}{\partial X_1^2} + (1-2\nu) \frac{\partial^2 U_1(X_1, X_2, t)}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 U_2(X_1, X_2, t)}{\partial X_1 \partial X_2} = 2\alpha(1+\nu) \frac{\partial T(X_1, X_2, t)}{\partial X_1}, \quad (1)$$

$$2(1-\nu) \frac{\partial^2 U_2(X_1, X_2, t)}{\partial X_2^2} + (1-2\nu) \frac{\partial^2 U_2(X_1, X_2, t)}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 U_1(X_1, X_2, t)}{\partial X_1 \partial X_2} = 2\alpha(1+\nu) \frac{\partial T(X_1, X_2, t)}{\partial X_2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 U_3(X_1, X_2, t)}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 U_3(X_1, X_2, t)}{\partial X_2^2} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 T(X_1, X_2, t)}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 T(X_1, X_2, t)}{\partial X_2^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial T(X_1, X_2, t)}{\partial t}, \quad (4)$$

przy warunkach brzegowych mechanicznych

$$U_1(0, X_2, t) = 0, \quad \sigma_{12}(0, X_2, t) = 0, \quad \sigma_{13} = fP(X_2, t) \quad (5)$$

$$\sigma_{11}(L, X_2, t) + CU_1(L, X_2, t) = -(P_0 + P_1)h_3(X_2, t),$$

$$\sigma_{12}(L, X_2, t) = 0, \quad U_3(L, X_2, t) = 0 \quad (6)$$

w warunkach brzegowych cieplnych

$$-K \frac{\partial T(0, X_2, t)}{\partial X_1} + \frac{T(0, X_2, t) - T_1^w}{R(P)} = fVP(X_2, t), \quad (7)$$

$$T(L, X_2, t) = T_2^w \quad (8)$$

oraz zerowych warunkach początkowych, gdzie $P(X_2, t) = -\sigma_{11}(0, X_2, t)$, $L_1 = L_e - L$, $P_1 = C(L_0 - L_1)$, L_0 - długość sprężyny bez napięcia wstępnego.

Wykorzystanie równań Duhamela-Neumanna prowadzi do wyznaczenia naprężeń

$$\sigma_{11}(X_1, X_2, t) = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{\partial U_1(X_1, X_2, t)}{\partial X_1} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial U_2(X_1, X_2, t)}{\partial X_2} - \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} T(X_1, X_2, t) \right] \quad (9)$$

$$\sigma_{12}(X_1, X_2, t) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial U_1(X_1, X_2, t)}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2(X_1, X_2, t)}{\partial X_1} \right] \quad (10)$$

$$\sigma_{13}(X_1, X_2, t) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial U_3(X_1, X_2, t)}{\partial X_1} \right] \quad (11)$$

Wprowadzimy następujące parametry bezwymiarowe:

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \quad x_n = \frac{X_n}{L}, \quad u_n = \frac{U_n}{L}, \quad \theta = \frac{T}{T_*}, \quad \theta_n^w = \frac{T_n^w}{T_*}, \quad \theta_n^0 = \frac{T_n^0}{T_*}, \quad \sigma_{nm} = \frac{\sigma_{nm}}{P_*},$$

$$p_0 = \frac{P_0}{P_*}, \quad p_1 = \frac{P_1}{P_*}, \quad \Omega = \frac{P_* R_* fV}{T_*}, \quad \tilde{c} = \frac{CL}{P_*}, \quad \tilde{R} = \frac{R}{R_*}, \quad \tilde{R}(P_* p) = \tilde{R}(p), \quad n, m = 1, 2$$

gdzie

$$\tilde{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu}, \quad t_* = \frac{L^2}{k}, \quad R_* = \frac{L}{K}.$$

W postaci bezwymiarowej zagadnienie termosprężystości przyjmie postać:

$$2(1-\nu) \frac{\partial^2 u_1(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_1^2} + (1-2\nu) \frac{\partial^2 u_1(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_1 \partial x_2} =$$

$$= 2\tilde{\alpha} T_* (1-\nu) \frac{\partial \theta(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_1} \quad (12)$$

$$2(1-\nu) \frac{\partial^2 u_2(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_2^2} + (1-2\nu) \frac{\partial^2 u_2(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_1 \partial x_2} =$$

$$= 2\tilde{\alpha} T_* (1-\nu) \frac{\partial \theta(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_2} \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \theta(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_2^2} = \frac{\partial \theta(x_1, x_2, \tau)}{\partial \tau} \quad (14)$$

$$u_1(0, x_2, \tau) = 0, \quad \sigma_{12}(0, x_2, \tau) = 0, \quad \sigma_{13}(0, x_2, \tau) = fp(x_2, \tau), \quad (15)$$

$$\sigma_{11}(1, x_2, \tau) + \tilde{c} u_1(1, x_2, \tau) = -(p_0 + p_1) h_3(x_2, \tau), \quad \sigma_{12}(1, x_2, \tau) = 0, \quad u_3(1, x_2, \tau) = 0, \quad (16)$$

$$-\frac{\partial \theta(0, x_2, \tau)}{\partial x_1} + \frac{\theta(0, x_2, \tau) - \theta_1^w}{\tilde{R}(p)} = \Omega p(x_2, \tau), \quad \theta(1, x_2, \tau) = \theta_2^w \quad (17)$$

przy czym bezwymiarowe naprężenia są następujące

$$\sigma_{11}(x_1, x_2, \tau) = \frac{\tilde{E}}{P_*} \left[\frac{\partial u_1(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_1} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_2(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_2} - \tilde{\alpha} T_* \theta(x_1, x_2, \tau) \right], \quad (18)$$

$$\sigma_{12}(x_1, x_2, \tau) = \frac{(1-2\nu)\tilde{E}}{2(1-\nu)P_*} \left[\frac{\partial u_1(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_1} \right] \quad (19)$$

$$\sigma_{13}(x_1, x_2, \tau) = \frac{(1-2\nu)\tilde{E}}{2(1-\nu)P_*} \frac{\partial u_3(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_1} \quad (20)$$

3. Analiza procesu stacjonarnego

Przy zwnętrznych obciążeniach układu $h_m(x_2, \tau) = \text{Re}[e^{i\xi x_2} H(\tau)]$ rozwiązania poszukujemy w postaci

$$p(x_2, \tau) = \text{Re}[p(\xi, \tau)e^{i\xi x_2}], \quad \theta(x_1, x_2, \tau) = \text{Re}[\theta(x_1, \xi, \tau)e^{i\xi x_2}], \\ \sigma_{nm}(x_1, x_2, \tau) = \text{Re}[\sigma_{nm}(x_1, \xi, \tau)e^{i\xi x_2}], \quad u_n(x_1, x_2, \tau) = \text{Re}[u_n(x_1, \xi, \tau)e^{i\xi x_2}].$$

Stacjonarne rozwiązania zagadnienia dla jednorodnego wzdłuż współrzędnej x_2 obciążenia wyznaczamy według zależności

$$p_{st} = \lim_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} [p(\xi, \tau)e^{i\xi x_2}], \quad \theta_{st}(x_1) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} [\theta(x_1, \xi, \tau)e^{i\xi x_2}], \\ \sigma_{nm}^{st}(x_1) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} [\sigma_{nm}(x_1, \xi, \tau)e^{i\xi x_2}], \quad u_n^{st}(x_1) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} [u_n(x_1, \xi, \tau)e^{i\xi x_2}].$$

W tym przypadku stacjonarne ciśnienie kontaktowe i temperatura mają postać

$$p_{st} = \frac{p_0 + p_1 + c_p J \frac{\theta_1^0 + \theta_2^0 + 2\theta_2^0 \tilde{R}_0}{2(1 + \tilde{R}_0)}}{(1 - \Omega/\Omega_{cr})(1 + c_p)}, \quad J = \frac{\tilde{E}\tilde{\alpha}(1-2\nu)T_*}{(1-\nu)P_*}, \quad (21)$$

$$\theta_{st}(x_1) = \theta_{st}(0) + x_1(\theta_2^0 - \theta_{st}(0)), \quad \theta_{st}(0) = \frac{\theta_1^0 + \theta_2^0 \tilde{R}_0 + \Omega p_{st} \tilde{R}_0}{1 + \tilde{R}_0}, \quad (22)$$

$$\Omega_{cr} = \frac{2(1 + 1/\tilde{R}_0)(1 + 1/c_p)}{J}, \quad c_p = \frac{CL(1-\nu^2)}{E}, \quad \tilde{R}_0 = \tilde{R}(p_{st}) = \tilde{R}(P_* p_{st}). \quad (23)$$

Pokazano, że warunkiem powstania niestabilności termosprężystej czarnej dla jednorodnego zaburzenia ($\xi = 0$) jest nierówność

$$\Omega > \Omega_{cr}. \quad (24)$$

Dla analizy oddziaływania niejednorodnego zaburzenia dokonano analizy zaburzeń rozwiązania stacjonarnego. Niech dane będą zaburzenia $h_m(x_2, \tau) = 1 + h_m^*(x_2, \tau)$.

Rozwiązania przedstawiono w postaci: $\theta(x_1, x_2, \tau) = \theta_{st}(x_1) + \theta^*(x_1, x_2, \tau)$,
 $p(x_2, \tau) = p_{st} + p^*(x_2, \tau)$, $u_n(x_1, x_2, \tau) = u_n^{st}(x_1) + u_n^*(x_1, x_2, \tau)$,
 $\sigma_{12}(x_1, x_2, \tau) = \sigma_{12}^*(x_1, x_2, \tau)$, gdzie $|h_n^*| \ll 1$, $|\theta^*| \ll 1$, $|u_n^*| \ll 1$, $|\sigma_{nm}^*| \ll 1$.

Równanie charakterystyczne zagadnienia zlinearyzowanego ma postać

$$\Delta(\xi, s) = \tilde{R}_0 + D_1(\xi, s)Q_1 + D_2(\xi, s) = 0, \quad (25)$$

gdzie

$$Q_1 = -J \left[\Omega \tilde{R}_0 \left(1 + \frac{p_{st}}{1 + \tilde{R}_0} \frac{\tilde{R}'_0}{\tilde{R}_0} \right) + (\theta_2^0 - \theta_1^0) \frac{\tilde{R}'_0}{1 + \tilde{R}_0} \right], \quad \tilde{R}'_0 = \left. \frac{d\tilde{R}(p)}{dp} \right|_{p=p_{st}},$$

$$D_1(\xi, s) = -\frac{1}{s} \left\{ \xi^2 \left(Th - \frac{Si(Si Ch + 1)}{Ch F} \right) - 2c_p \frac{Si(Co Ch - 1)}{Ch F} \right\},$$

$$D_2(\xi, s) = Th, \quad Ch = \cosh \sqrt{\xi^2 + s}, \quad Co = \cosh \xi, \quad F = 1 + Co Si + 2c_p Si^2,$$

$$Th = \frac{\tanh \sqrt{\xi^2 + s}}{\sqrt{\xi^2 + s}}, \quad Sh = \frac{\sinh \sqrt{\xi^2 + s}}{\sqrt{\xi^2 + s}}, \quad Si = \frac{\sinh \xi}{\xi}.$$

Dla wartości krytycznych otrzymano następujące zależności w postaci parametrycznej $\omega \in (0, \infty)$:

$$Q_1 = -\frac{\text{Im } D_2(\xi, i\omega)}{\text{Im } D_1(\xi, i\omega)}, \quad \tilde{R}_0 = \text{Re } D_1(\xi, i\omega) \frac{\text{Im } D_2(\xi, i\omega)}{\text{Im } D_2(\xi, i\omega)} - \text{Re } D_2(\xi, i\omega). \quad (26)$$

4. Literatura

1. Barber J. R.: Thermoelasticity and contact. J. Thermal Stresses, 1999, 22, 513-525.
2. Awrejcewicz J., Pyryev Yu.: Thermoelastic contact of a rotating shaft with a rigid bush in conditions of bush wear and stick-slip movements, International Journal of Engineering Science, 2002, 40, 1113-1130.
3. Awrejcewicz J., Pyryev Yu.: Contact phenomena in braking and acceleration of bush-shaft system. Journal of Thermal Stresses, 2004, 27, 5, 433-454.
4. Pyryev Yu.: Some Thermoelastic Instability Problems in Moving Trybosystems. Mechanical Engineering, 1999, 27, 9, 15-19.
5. Pyryev Yu.: Dynamical Model of Thermoelastic Contact in Conditions of Frictional Heating and Limited Heat Expansion, Friction and Wear. 1994, 15, 6, 941-948.

THERMOELASTIC INSTABILITY IN TRIBOLOGY SYSTEM

Summary

A friction pair model consisted of a moving body and a seal pressed by springs is analysed. Interaction of non-stationary heat generation with thermoelastic instability, when one of the contacting bodies is moving, is studied in more detail.