

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
Instytut Podstaw Budowy Maszyn
II International Conference
MODELLING AND SIMULATION OF THE FRICTION
PHENOMENA IN THE PHYSICAL AND TECHNICAL SYSTEMS
„*FRICTION 2002*”

Warszawa, grudzień 2002

Jan Awrejcewicz, Yuriy Pyryev
Katedra Automatyki i Biomechaniki
Politechnika Łódzka

MODELOWANIE I OPIS MATEMATYCZNY ZJAWISK
TARCIOWYCH W UKŁADZIE WALEC-TULEJA

1. Wstęp

Drgania samowzbudne występują w wielu układach masowo - sprężystych z tarciami ślizgowym. Do mniej zbadanych problemów należą drgania wywołane tarciami, którym towarzyszą procesy cieplne [1]. Badanie warunków powstania takich drgań i zachowania się charakterystyk kontaktowych (temperatura kontaktowa, ciśnienie kontaktowe) może stanowić ważny przyczynek dla wytłumaczenia różnych zjawisk w hamulcach tarciovych, szlifierkach, czy w obrabiarkach o bardzo wysokiej dokładności obróbki, jak i w innych układach maszynowych z parami ciernymi.

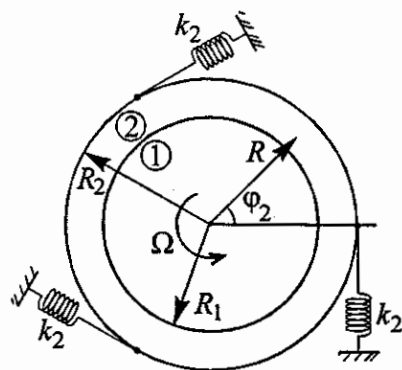
Celem pracy jest zbadanie, czy i w jakim stopniu frykcyjna generacja ciepła mogą wpływać na przebieg i parametry ruchu samowzbudnemu występującego w dynamicznym układzie modelującym zespół walec – tuleja przy wymuszeniu kinematycznym.

2. Matematyczne sformułowanie problemu

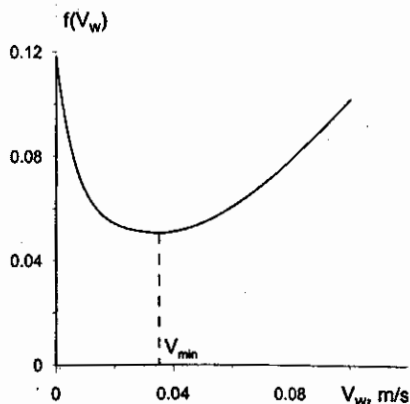
Sprężysty i przewodzący ciepło walec o promieniu R_1 został wciśnięty do tulei. Wartość promienia wewnętrznego tulei nasadzonej na walec wynosi R_2 . Schemat analizowanego w tym rozdziale układu przedstawiono na rysunku 1. Tuleja jest połączoną z

obudową (korpusem, podstawą) przy pomocy sprężyn. Zakładamy, że w modelu tym tuleja jest ciałem doskonale sztywnym, a sprężyny posiadają współczynnik sztywności k_1 .

Walec obraca się z taką prędkością kątową $\Omega(t) = \dot{\varphi}_1(t)$, że można pominąć siły odśrodkowe mogące się pojawić w analizowanym układzie. Zakładamy, że prędkość kątowa obrotu walca zmienia się zgodnie z prawem ruchu obrotowego walca po przyłożeniu momentu $M = M_0 h_M(t)$ ($h_M(t) \rightarrow 1, t \rightarrow \infty$) odniesionego do jednostki długości walca. Przyjmujemy, że między tuleją a walcem występuje tarcie suche przypadające na jednostkę długości i określone funkcją $F_t(V_w)$, przy czym V_w jest prędkością względną tulei i walca $V_w = \Omega R_1 - \dot{\varphi}_2 R_1$. B_1, B_2 są masowymi momentami bezwładności walca i tulei również przypadającymi na ich jednostkę długości. W pracy przyjęto, że zgodnie z założeniem Amontonsa siła tarcia F_t jest równa iloczynowi składowej normalnej reakcji $N(t)$ i współczynnika tarcia, czyli, że $F_t = f(V_w)N(t)$ jest siłą tarcia określającą opór przemieszczania się dwóch ciał względem siebie ($f(V_w)$ oznacza współczynnik tarcia kinematycznego). Tak zwana krzywa Stribeck [2,3] (rys. 2) posiada minimum przy $V_w = V_{\min}$ i dla $V_w < V_{\min}$ obserwuje się charakterystyczne zmniejszenie współczynnika tarcia ($f'(V_w) < 0$).



Rys. 1. Schemat analizowanego układu.



Rys. 2. Kinematyczny współczynnik tarcia

Wskutek działania sił tarcia F_t na powierzchni kontaktu dla $R = R_1$ następuje wytwarzanie się ciepła poprzez tarcie. Zgodnie z założeniami Linga [4] praca sił tarcia przekształca się w energię cieplną. Niech $T_1(R, t)$ oznacza temperaturą walca i niech równa się zero w chwili początkowej. Zakładamy, że walec idealnie przewodzi ciepło i pomiędzy walcem i tuleją zachodzi wymiana ciepła zgodnie z założeniami Newtona, a temperatura otoczenia zmienia się według prawa $T_0 h_T(t)$ ($h_T(t) \rightarrow 1, t \rightarrow \infty$).

Zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia równań ruchu ciał wokół położenia równowagi, przemieszczeń $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ oraz prędkości kątowej tulei $\dot{\varphi}_2(t)$ i walca $\dot{\varphi}_1(t)$, naprężeń powstałych w walcu $\sigma_R(R, t)$, ciśnienia kontaktowego $P(t) = N(t)/2\pi R_1 = -\sigma_R(R_1, t)$, temperatury $T_1(R, t)$ wału i przemieszczenia $U(R, t)$ w kierunku osi R .

Równania dynamiki tulei i walca z warunkami początkowymi i naprężeń cieplnych z warunkami brzegowymi i początkowymi w postaci bezwymiarowej mają następującą postać:

$$\ddot{\varphi}(\tau) + \tilde{\omega}^{-2} \varphi(\tau) = \varepsilon_2 F(\dot{\phi} - \dot{\phi}) p(\tau), \quad 0 < \tau < \infty, \quad (1)$$

$$\ddot{\phi}(\tau) - \varepsilon_1 m_0 h_M(\tau) = -\varepsilon_1 F(\dot{\phi} - \dot{\phi}) p(\tau), \quad 0 < \tau < \infty, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \theta(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta(r, \tau)}{\partial r} = \frac{\partial \theta(r, \tau)}{\partial \tau}, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \tau < \infty, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial r} + Bi \theta(1, \tau) = \gamma F(\dot{\phi} - \dot{\phi}) (\dot{\phi} - \dot{\phi}) p(\tau) + Bi h_T(\tau), \quad 0 < \tau < \infty. \quad (4)$$

$$r \left. \frac{\partial \theta(r, \tau)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad 0 < \tau < \infty, \quad (5)$$

$$\varphi(0) = \varphi^*, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega^*, \quad \phi(0) = \phi^*, \quad \dot{\phi}(0) = \omega_1^*, \quad \theta(r, 0) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (6)$$

gdzie bezwymiarowe ciśnienie kontaktowe i przemieszczenie w walcu wynoszą

$$p(\tau) = 2 \int_0^1 \theta(\xi, \tau) \xi d\xi, \quad u(r, \tau)/r = \frac{1}{2(1-\nu_1)} \left[\frac{1}{r^2} \int_0^r \theta(\eta, t) \eta d\eta - \int_0^1 \theta(\eta, t) \eta d\eta \right]. \quad (7)$$

Zostały wprowadzone następujące parametry bezwymiarowe

$$r = \frac{R}{R_1}, \quad \tau = \frac{t}{t_T}, \quad p = \frac{P}{P_*}, \quad \theta = \frac{T_1}{T_0}, \quad u = \frac{U}{\alpha_1 T_0 (1 + \nu_1) R_1}, \quad \tilde{\omega} = \frac{t_D}{t_T}, \quad Bi = \frac{\alpha_T R_1}{\lambda_1},$$

$$m_0 = \frac{M_0}{P_* 2\pi R_1^2}, \quad \gamma = \frac{E_1 \alpha_1 a_1}{\lambda_1 (1 - 2\nu_1)}, \quad \varepsilon_1 = \frac{2\pi R_1^2 P_* t_T^2}{B_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{2\pi R_1^2 P_* t_T^2}{B_2}, \quad h_M(\tau) = h_M(t_T \tau),$$

$$h_T(\tau) = h_T(t_T \tau), \quad F(\dot{\phi} - \dot{\phi}) = f(R_1 t_T^{-1} (\dot{\phi} - \dot{\phi})), \quad \varphi(\tau) = \varphi_2(t_T \tau), \quad \phi(\tau) = \varphi_1(t_T \tau),$$

gdzie:

$$P_* = \frac{\alpha_1 E_1 T_0}{1 - 2\nu_1}, \quad t_D = \frac{1}{R_2} \sqrt{\frac{B_2}{k_2}}, \quad t_T = \frac{R_1^2}{a_1}.$$

Zależność współczynnika tarcia kinematycznego od prędkości względnej (patrz rysunek 2) została przybliżona wzorem

$$f(V_w) = \operatorname{sgn}(V_w) \begin{cases} f_{\min} + (f_s - f_{\min}) \exp(-b_1 |V_w|), & \text{dla } |V_w| < V_{\min} \\ [-f_s; f_s], & \text{dla } V_w = 0 \\ f_{\min} + (f_s - f_{\min}) \exp(-b_1 |V_{\min}|) + \\ + \frac{b_2 b_3 (|V_w| - V_{\min})^2}{1 + b_2 (|V_w| - V_{\min})}, & \text{dla } |V_w| > V_{\min} \end{cases} \quad (8)$$

gdzie: $f_s = 0.12$, $f_{\min} = 0.05$, $b_1 = 140 \text{ s m}^{-1}$, $b_2 = 10 \text{ s m}^{-1}$, $b_3 = 2 \text{ s m}^{-1}$,

$V_{\min} = 0.035 \text{ m c}^{-1}$. Funkcję $\text{sgn}(x)$ przy analizie numerycznej aproksymowano funkcją [1]

$$\text{sgn}_{\varepsilon_0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x > \varepsilon_0, \\ \left(2 - \frac{|x|}{\varepsilon_0}\right) \frac{x}{\varepsilon_0}, & \text{if } |x| < \varepsilon_0, \\ -1, & \text{if } x < -\varepsilon_0, \end{cases} \quad (9)$$

gdzie $\varepsilon_0 = 0.0001$.

3. Analiza procesu stacjonarnego

Rozpatrzmy przypadek, gdy walec po pewnym czasie zacznie obracać się z stałą prędkością $\dot{\phi}(\tau) = \omega_{st}$, a tuleja jest nieruchoma $\dot{\phi} = 0$. Wtedy stacjonarne rozwiązanie problemu (w równaniach (1)-(3) są pominięte człony różniczkowe względem czasu) ma postać:

$$p_{st} = \frac{1}{1-\nu}, \quad \theta_{st} = \frac{1}{1-\nu}, \quad \varphi_{st} = \varepsilon m_0 \tilde{\omega}^2, \quad \nu = \frac{\gamma \omega_{st} F(\omega_{st})}{Bi}, \quad (10)$$

gdzie ω_{st} jest rozwiązaniem nieliniowego równania

$$F(\omega_{st}) = \frac{m_0}{1 + \gamma m_0 \omega_{st} / Bi}. \quad (11)$$

Graficzne rozwiązanie równania (11) dla różnych wartości parametrów m_0 , γ i Bi przedstawiono na rysunku 3.

Prawa część równania (11) dla różnych wartości parametrów m_0 , γ i Bi przedstawiona jest krzywą ciągłą. Krzywa ciągła 1 odpowiada parametrowi $m_0 = 0.14$, $\gamma = 0$, $Bi = 2$, krzywa ciągła 2 - $m_0 = 0.1$, $\gamma = 1.87$, $Bi = 10$, krzywa ciągła 3 - $m_0 = 0.1$, $\gamma = 1.87$, $Bi = 2$, krzywa ciągła 4 - $m_0 = 0.14$, $\gamma = 1.87$, $Bi = 2$. Krzywa przerywana odpowiada funkcji $F(\omega_{st})$.

Jak widać, równanie (11) może mieć przy $m_0 = 0.14$, $\gamma = 0$, $Bi = 2$ (pierwszy przypadek) jedno rozwiązanie ω_{st}^3 ($F'(\omega_{st}^3) > 0$), przy $m_0 = 0.1$, $\gamma = 1.87$, $Bi = 10$ (drugi przypadek) trzy rozwiązania ω_{st}^1 , ω_{st}^2 , ω_{st}^3 ($F'(\omega_{st}^1) > 0$, $F'(\omega_{st}^2) < 0$, $F'(\omega_{st}^3) > 0$), oraz dla $m_0 = 0.1$, $\gamma = 1.87$, $Bi = 2$ (trzeci przypadek) jedno rozwiązanie $\omega_{st}^1 = 0$ (przy aproksymacji (8) $\omega_{st}^1 \approx \varepsilon_0 m_0 / 2 f_s$, $F'(\omega_{st}^1) \approx 2 f_s / \varepsilon_0$). Dla wartości $m_0 = 0.14$, $\gamma = 1.87$, $Bi = 2$ (czwarty przypadek) pojawia się jedno rozwiązanie ω_{st}^2 ($F'(\omega_{st}^2) < 0$).

Dokonano analizy zaburzeń rozwiązania ustalonego stacjonarnego (10). W tym celu zlinearyzowano prawe strony równań (1), (2) i warunek brzegowy (4). Stosując transformację Laplace'a do otrzymanego układu liniowego otrzymamy rozwiązanie w

postacie transformatorowej Laplace'a. Równanie charakterystyczne zagadnienia zlinearyzowanego ma postać

$$\Delta_1^*(s) = 0, \quad \Delta_1^*(s) = s\Delta^*(s) + \varepsilon_1 p_{st}(\tilde{\omega}^2 s^2 + 1)[\beta_2 \Delta_1(s) + 2Biv\beta_1 \Delta_2(s)], \quad (12)$$

$$\Delta^*(s) = \Delta_1(s)\Omega_2(s) - 2Biv\Delta_2(s)\Omega_1(s), \quad (13)$$

$$\Omega_1(s) = \tilde{\omega}^2 s^2 - \frac{\varepsilon_2 \beta_1}{1-\nu} \tilde{\omega}^2 s + 1, \quad \Omega_2(s) = \tilde{\omega}^2 s^2 + \frac{\varepsilon_2 \beta_2}{1-\nu} \tilde{\omega}^2 s + 1,$$

$$\beta_2 = F'(\omega_{st}), \quad \beta_1 = F(\omega_{st})/\omega_{st}.$$

Pierwiastki s_m ($\text{Re } s_1 > \text{Re } s_2 > \dots > \text{Re } s_m > \dots$, $m = 1, 2, 3, \dots$) równania charakterystycznego (12) w zależności od parametrów modelu leżą w lewej półpłaszczyźnie $\text{Re } s < 0$ (stacjonarne rozwiązanie jest stateczne) lub w prawej półpłaszczyźnie $\text{Re } s > 0$ (stacjonarne rozwiązanie nie jest stateczne) zmiennej zespolonej s . Funkcja charakterystyczna jest zapisana w postaci:

$$\Delta_1^*(s) = \sum_{m=0}^{\infty} s^m b_m, \quad (14)$$

$$b_0 = \varepsilon_1 Bi p_{st}(\beta_2 + \nu \beta_1), \quad d_0 = Bi(1-\nu), \quad b_1 = d_0 + \varepsilon_1 p_{st}[2(2+Bi)\beta_2 + Biv\beta_1]/8,$$

$$d_1 = 0.5 + Bi[0.25 - 0.125\nu + \tilde{\omega} p_{st}\varepsilon_2(\beta_2 + \nu\beta_1)],$$

$$b_m = d_{m-1} + \varepsilon_1 p_{st}[(d_m^{(1)} + \tilde{\omega}^2 d_{m-2}^{(1)})\beta_2 + 2Biv(d_m^{(2)} + \tilde{\omega}^2 d_{m-2}^{(2)})\beta_1],$$

$$d_m = d_m^{(1)} - 2Biv d_m^{(2)} + \tilde{\omega}^2 \varepsilon_2 p_{st}[\beta_2 d_{m-1}^{(1)} + 2Biv\beta_1 d_{m-1}^{(2)}] + \\ + \tilde{\omega}^2 (d_{m-2}^{(1)} - 2Biv d_{m-2}^{(2)}), \quad m = 2, 3, \dots$$

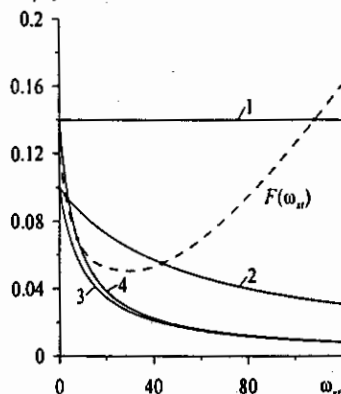
$$d_m^{(1)} = \frac{Bi + 2m}{2^{2m}(m!)^2}, \quad d_m^{(2)} = \frac{1}{2^{2m+1} m!(1+m)!}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Dla walca stalowego ($\alpha_1 = 14 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $\lambda_1 = 21 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})$, $\nu = 0.3$, $a_1 = 5.9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $E_1 = 19 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$) przy $R_1 = 0.005 \text{ m}$, $R_2 = 0.01 \text{ m}$, $T_0 = 0.1 \text{ } ^\circ\text{C}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 100$, $\tilde{\omega} = 0.1$, $\varphi^\circ = 0$, $\omega^\circ = 0$ zgodnie ze wzorem (14) zostały obliczone pierwiastki równania (12).

W pierwszym przypadku $m_0 = 0.14$, $\gamma = 0$, $Bi = 2$ mamy jedno rozwiązanie $\omega_{st}^3 = 108.4$, $p_{st}^3 = 1$, $\theta_{st}^3 = 1$, $\varphi_{st}^3 = 0.14$ ($\beta_1 = 1.29 \cdot 10^{-3}$, $\beta_2 = 1.72 \cdot 10^{-3}$, $\nu = 0$), które jest stateczne (pierwiastki równania (12) $s_{1,2} = -0.009 \pm 10i$, $s_3 = -0.017$ leżą w lewej połowie płaszczyzny zespolonej s).

W drugim przypadku $m_0 = 0.1$, $\gamma = 1.87$, $Bi = 10$ mamy trzy rozwiązania. Rozwiązanie $\omega_{st}^3 = 43.55$, $p_{st}^3 = 1.81$, $\theta_{st}^3 = 1.81$, $\varphi_{st}^3 = 0.1$ ($\beta_1 = 0.001$, $\beta_2 = 0.006$, $\nu = 0.45$), które jest stateczne (pierwiastki równania (12) $s_{1,2} = -0.008 \pm 10.04i$, $s_3 = -0.43$ leżą w lewej połowie płaszczyzny zespolonej s). Rozwiązanie $\omega_{st}^2 = 2.63$ ($\beta_1 = 0.036$, $\beta_2 = -0.0075$, $\nu = 0.047$), które nie jest stateczne (pierwiastki równania (12)

$s_{1,2} = 0.37 \pm 9.99i$, $s_3 = 0.656$ leżą w prawej połowie płaszczyzny zespolonej s). Rozwiązanie przy aproksymacji (9) $\omega_{st}^1 = 0.417 \cdot 10^{-4}$ ($\beta_1 = 2.4 \cdot 10^3$, $\beta_2 = 2.4 \cdot 10^3$, $\nu = 8 \cdot 10^{-6}$), które odpowiada okresowemu ruchowi (pierwiastki równania (12) $s_{1,2} = -0.52 \cdot 10^{-4} \pm 7.071i$ leżą na osi urojonej płaszczyzny zespolonej s). Zauważymy, że dla ostatniego przypadku pierwiastki mogą być znalezione z równania charakterystycznego $s^2 + \omega_0^2 / \bar{\omega}^2 = 0$, gdzie $\omega_0 = 1 / \sqrt{1 + \varepsilon_2 / \varepsilon_1}$.



Rys. 3. Graficzne rozwiązanie równania (11)

W trzecim przypadku $m_0 = 0.1$, $\gamma = 1.87$, $Bi = 2$ mamy jedno rozwiązanie. Rozwiązanie przy aproksymacji (9) $\omega_{st}^1 = 0.417 \cdot 10^{-4}$ ($\beta_1 = 2.4 \cdot 10^3$, $\beta_2 = 2.4 \cdot 10^3$, $\nu = 4 \cdot 10^{-6}$), które odpowiada okresowemu ruchowi (pierwiastki równania (12) $s_{1,2} = 0.52 \cdot 10^{-4} \pm 0.71i$ leżą na osi urojonej płaszczyzny zespolonej s). Zauważymy, że dla ostatniego przypadku pierwiastki mogą być znalezione z równania charakterystycznego $s^2 + \omega_0^2 / \bar{\omega}^2 = 0$.

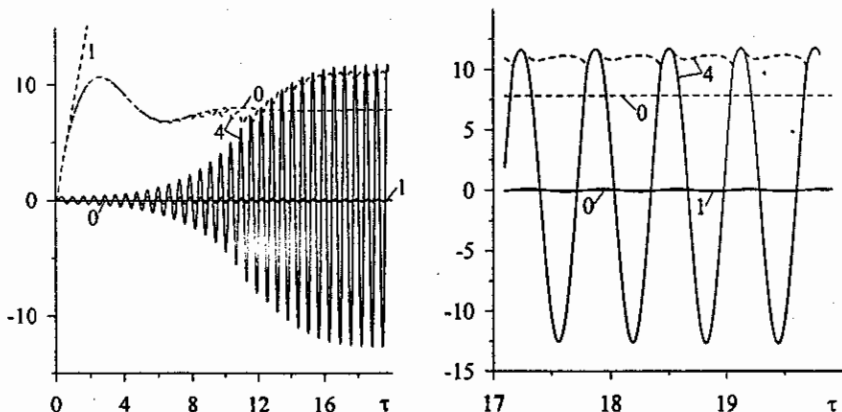
W czwartym przypadku $m_0 = 0.14$, $\gamma = 1.87$, $Bi = 2$ mamy jedno rozwiązanie. Rozwiązanie $\omega_{st}^2 = 7.8$, $p_{st}^2 = 2.02$, $\theta_{st}^2 = 2.02$, $\varphi_{st}^2 = 0.14$ ($\beta_1 = 0.0089$, $\beta_2 = -0.0031$, $\nu = 0.505$) jest niestacyczne (pierwiastki równania (12) $s_{1,2} = 0.31 \pm 10.05i$, leżą w prawej połowie płaszczyzny zespolonej s). Rozwiązanie nieliniowego zagadnienia w tym przypadku ma charakter drgań okresowych samowzbudnych.

4. Analiza numeryczna

Przyjmujemy, że w chwili początkowej na walec zacznie działać moment siły $h_M(\xi) = 1 - \exp(-\delta \tau^2)$, $\delta = 100$. Walec zacznie obracać się z przyspieszeniem.

Bezwymiarowa temperatura tulei zmienia się według wzoru $h_\tau(\tau) = 1 - \exp(-\delta \tau^2)$. Wskutek wymiany ciepła walec zacznie się rozszerzać i kontaktować z tuleją. Warunki początkowe przyjmujemy jako zerowe: $\varphi^* = 0$, $\omega^* = 0$, $\dot{\varphi}^* = 0$, $\dot{\omega}^* = 0$. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 4–5 dla kilka wartości parametru m_0 i γ . Krzywe 1 odpowiadają pierwszemu przypadkowi bez uwzględnienia frykcyjnej generacji ciepłej ($\gamma = 0$, $m_0 = 0.14$, $Bi = 2$), krzywe 0 odpowiadają przypadkowi bez uwzględnienia drgań tulei ($\tilde{\omega} = 0$, $m_0 = 0.14$, $\gamma = 1.87$, $Bi = 2$), krzywe 4 odpowiadają czwartemu przypadkowi, gdy zagadnienie ma jedno niestateczne stacjonarne rozwiązanie ($m_0 = 0.14$, $\gamma = 1.87$, $Bi = 2$).

Na rys. 4 przedstawiono zależność: bezwymiarowej prędkości kątowej walca $\dot{\varphi}$ (linie przerywane) i tulei $\dot{\omega}$ (linie ciągłe) od czasu bezwymiarowego τ w rozpatrywanych przypadkach. Z rysunku widać, że we wszystkich przypadkach układ zachowuje się zgodnie z obliczeniami analitycznymi.

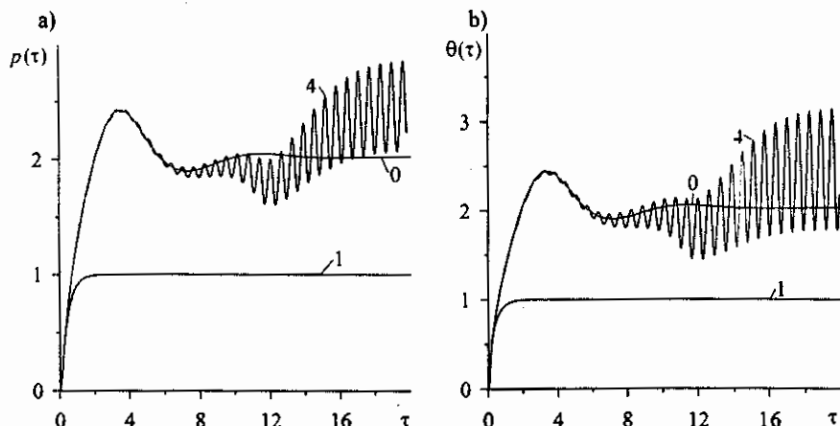


Rys. 4. Ewolucja w czasie prędkości kątowej klocka $\dot{\varphi}$ (krzywe ciągłe) i walca $\dot{\omega}$ (krzywe przerywane) pod czas przyspieszenia (krzywe 0: $\tilde{\omega} = 0$, $\gamma = 1.87$, krzywe 1: $\tilde{\omega} = 0.1$, $\gamma = 0$, krzywe 4: $\tilde{\omega} = 0.1$, $\gamma = 1.87$).

W pierwszych dwóch przypadkach walec z upływem czasu zacznie się obracać z stałą prędkością. W trzecim przypadku, dla niewielkiego momentu walec i tuleja po pewnym czasie wejdą w kontakt i zaczną drgać jak jedno ciało okresowo o okresie $T = 2\pi\tilde{\omega}/\omega_0$. W czwartym przypadku układ przebywa w ruchu typu „stick-slip”. Przy ruchu układu typu „stick” drgania mają charakter okresowy.

Ewolucja w czasie ciśnienia kontaktowego i temperatury kontaktowej została przedstawiona dla rozpatrywanych przypadków przy pomocy krzywych ciągłych 0–4 na rysunkach 5. W tym ostatnim przypadku charakterystyki kontaktowe ulegają zmianom.

Wyniki przeprowadzonej analizy analitycznej i numerycznej prowadzą do następujących wniosków: w rozpatrywanym zagadnieniu przy pewnych parametrach może pojawić się ruch okresowy samowzbudny typu „stick-slip”.



Rys. 5. Ewolucja w czasie ciśnienia kontaktowego(a) i temperatury kontaktowej(b) (krzywe 0: $\bar{\omega} = 0$, $\gamma = 1.87$, krzywe 1: $\bar{\omega} = 0.1$, $\gamma = 0$, krzywe 4: $\bar{\omega} = 0.1$, $\gamma = 1.87$).

5. Literatura

1. Awrejcewicz J., Pyryev Yu.: Thermoelastic contact of a rotating shaft with a rigid bush in conditions of bush wear and stick-slip movements, *International Journal of Engineering Science*, 2002, 40, 1113-1130.
2. Krahelsky I., Hittis N.: *Frictional Self-Oscillations*, Nauka, Moscow, 1987 (Russian).
3. Grudziński K., Wedman S.: Symulacyjne badania ruchu stick-slip przy kinematycznych wymuszeniach zewnętrznych, XXXVII Sympozjon „Modelowanie w mechanice” 1998, 135-142.
4. Ling F.F.: A quasi-iterative method for computing interface temperature distribution, *ZAMP*, 1959, 10, 461-474.

MODELLING AND MATHEMATICAL DESCRIPTION OF FRICTIONAL BEHAVIOUR IN A BUSH-SHAFT SYSTEM

Summary

The following model is analysed: elastic and heat transferring rotating shaft is put into a rigid bush. The bush is linked to a fundament via springs. The shaft extends its volume and a contact between hush and shaft begins. It is assumed that a friction between two contacting bodies depends on their relative velocity. The occurred friction causes heat transfer. It has been shown, among others, that for some parameters a stick-slip periodic motion occurs.