

ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА



ПРОБЛЕМИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МЕХАНІКИ І МІЦНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ

**PROBLEMS OF COMPUTATIONAL MECHANICS
AND STRENGTH OF STRUCTURES**

32

ВИПУСК

2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара
Oles Honchar Dnipro National University

**ПРОБЛЕМИ
ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МЕХАНІКИ
І МІЦНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ**

Збірник наукових праць

**ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ
И ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ**

Сборник научных трудов

**PROBLEMS OF COMPUTATIONAL MECHANICS
AND STRENGTH OF STRUCTURES**

Collection of scientific articles

32

випуск

Видається
з 1997 р.

Дніпро
Ліра
2020

УДК 539.3

П78

Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій:
зб. наук. праць / редкол.: А. П. Дзюба (відп. ред.) та ін. – Дніпро: Ліра, 2020. – Вип. 32. – 172 с. Укр., рос. та англ. мовами.

Наведені нові результати теоретичних, числових і експериментальних досліджень в галузі механіки деформівного твердого тіла, динаміки, міцності та оптимального проектування механічних систем і конструкцій. Розглянуті проблеми розробки математичних моделей, методів та числових алгоритмів, теоретичного обґрунтування розрахункових, технологічних і проектних рішень та їх застосування до розв'язування прикладних задач.

Для наукових співробітників, інженерів-механіків та аспірантів, а також як навчальний посібник в галузі динаміки, міцності та комп'ютерної механіки для магістрів і студентів старших курсів.

Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций:
сб. научн. трудов / редкол.: А. П. Дзюба (отв. ред.) и др. – Днепр: Лира, 2020. – Вип. 32. – 172 с. На укр., рус. и англ. языках.

Приведены новые результаты теоретических, численных и экспериментальных исследований в области механики деформируемого твердого тела, динамики, прочности и оптимального проектирования механических систем и конструкций. Рассмотрены проблемы разработки математических моделей, методов и численных алгоритмов, теоретического обоснования расчетных, технологических и проектных решений, а также их применение к решению практических задач.

Для научных сотрудников, инженеров-механиков и аспирантов, а также как учебное пособие в области динамики, прочности и компьютерной механики для магистров и студентов старших курсов.

Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures:
Col. of sci. art. / edit. board: A. P. Dzyuba (editor-in chief) and other. – Dnipro: Lira, 2020. – Vol. 32. – 172 p. In Ukr., Rus. and Engl.

New results of theoretical, numerical and experimental researches in solid mechanics, dynamics, strength and optimal design of mechanical systems and constructions are given. The problems of the development of mathematical models, methods and numerical algorithms, theoretical basis of calculation, technological and design solutions as well as their application to the solution of practical problems are considered.

It recommended for research associates, mechanical engineers and graduate students also for graduates and last year students, as a manual in dynamics, strength and computational mechanics.

Матеріали випуску рекомендовані до друку вченою радою Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара згідно з планом видань на 2020 р. (протокол № 8 від 30 січня 2020 р.).

ISSN 2079-1836

© Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, 2020

© Автори статей, 2020

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Д-р техн. наук, проф. **А. П. Дзюба** (відповідальний редактор); д-р фіз.-мат. наук, доц. **Е. Л. Гарт** (заступник відповідального редактора); чл.-кор. Польської академії наук, д-р наук (почесний), проф. **Я. Аврейцевич** (Польща); д-р фіз.-мат. наук, проф. **І. В. Андріанов** (Німеччина); д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Я. Григоренко**; д-р техн. наук, проф. **В. З. Гришак**; чл.-кор. НАНУ, д-р техн. наук, проф. **В. С. Гудрамович**; д-р техн. наук, проф. **В. В. Данішевський**; д-р техн. наук, проф. **О. А. Дісковський**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Ю. Євкін** (Канада); д-р мат. наук, проф. **Р. А. Іскандеров** (Азербайджан); чл.-кор. НАНУ, д-р техн. наук, **О. П. Круковський**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Ю. М. Лапуста** (Франція); д-р фіз.-мат. наук, проф. **Ф. С. Латіфов** (Азербайджан); д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Лобода**; д-р техн. наук, проф. **В. В. Можаровський** (Республіка Білорусь); д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. М. Пилипчук** (США); д-р фіз.-мат. наук, проф. **П. О. Стеблянко**; д-р фіз.-мат. наук, **Ю. В. Токовий**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **А. Є. Шевельова**; **І. А. Сафронова** (відповідальний секретар)

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. І. Пожуєв**
д-р техн. наук, проф. **С. М. Гребенюк**

BOARD OF EDITORS

Dr. Sci. (Tech.), Prof. **A. P. Dzyuba** (editor-in chief); Dr. Sci. (Phys.-Math.), Ass. Prof. **E. L. Hart** (deputy editor-in chief); Corresponding Member of the Polish Academy of Sciences, Dr. h. c. mult., Prof. **Ja. Awrejcewicz** (Poland); Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. **I. V. Andrianov** (Germany); Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. **O. Ya. Grygorenko**; Dr. Sci. (Tech.), Prof. **V. Z. Grischak**; Corresponding Member of the National Academy of Science of Ukraine, Dr. Sci. (Tech.), Prof. **V. S. Hudramovich**; Dr. Sci. (Tech.), Prof. **V. V. Danishevskyy**; Sci. (Tech.), Prof. **A. A. Diskovsky**; Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. **A. Ju. Evkin** (Canada); Dr. Sci. (Math.), Prof. **R. A. Iskanderov** (Azerbaijan); Corresponding member of the National Academy of Science of Ukraine, Dr. Sci. (Tech.), **A. P. Krukovskiy**; Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. **Yu. N. Lapusta** (France); Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. **F. S. Latifov** (Azerbaijan); Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. **V. V. Loboda**; Dr. Sci. (Tech.), Prof. **V. V. Mozharovsky** (Republic Bilorus); Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. **V. N. Pilipchuk** (USA); Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. **P. A. Steblyanko**; Dr. Sci. (Phys.-Math.), **Yu. V. Tokovyy**; Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. **A. E. Sheveleva**; **I. A. Safronova** (assistant editor)

Reviewers: Dr. Sci. (Phys.-Math.) **V. I. Pozhucv**
Dr. Sci. (Tech.) **S. M. Grebenyuc**

Адреса редколегії:

49010, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 72,

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,

корп. 5а, кімн. 12, e-mail: compumech@ua.fm

Збірнику присвоєно **Категорію «Б»** друкованих періодичних видань, що включаються до Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт за спеціальностями: *113 Прикладна математика, 131 Прикладна механіка, 133 Галузеве машинобудування, 134 Авіаційна та ракетно-космічна техніка, 135 Суднобудування (Наказ МОН України від 02.07.2020 № 886).*

Реферати статей збірника публікуються в реферативному журналі «Джерело» Інституту проблем реєстрації інформації НАН України (м. Київ, Україна) <http://www.ipri.kiev.ua/index.php?id=58>, електронна копія збірника розміщена на сайті Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського НАН України за адресою: <http://nbuv.gov.ua/portal/> та на власному сайті <https://pommk.dp.ua/index.php/journal>.

З 2014 р. збірник індексується в наукометричних базах даних **Index Copernicus**, **CrossRef** та **Google Scholar**. Значення показника *Index Copernicus Value (ICV)* за 2019 рік склало **75.47** (<https://journals.indexcopernicus.com/search/details?id=45410&lang=pl>).

Проблематика збірника наукових праць:

1. Проблеми динаміки, міцності, стійкості і надійності конструкцій.
2. Математичне і комп'ютерне моделювання в механіці суцільних середовищ.
3. Обчислювальна (комп'ютерна) механіка.
4. Експериментальне моделювання поведінки механічних систем.
5. Оптимальне проектування, зниження матеріаломісткості та енергоємності сучасних конструкцій.
6. Загальні проблеми механіки суцільних середовищ.
7. Механіка руйнування.
8. Механіка контактної взаємодії.
9. Механіка композитних матеріалів.
10. Геомеханіка.
11. Біомеханіка.
12. Прикладні задачі механіки.

Subject of the collection of scientific articles:

1. Problems of dynamics, strength, stability and reliability of constructions.
2. Mathematical and computational modeling in mechanics of solid environments.
3. Computational mechanics.
4. Experimental modeling behavior of mechanical systems.
5. Optimal engineering, decreasing of material capacity and power consumption of modern constructions.
6. Common problems of mechanics of solid environments.
7. Mechanics of destruction.
8. Mechanics of contact interaction.
9. Mechanics of composite materials.
10. Geomechanics.
11. Biomechanics.
12. Application problems of mechanics.

*Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації
КВ № 23289-13129ПР від 11.04.2018 р.*

DOI 10.15421/4220011
УДК 519.63

І. В. Гарькавський, Л. І. Книш, д-р техн. наук

МОДЕЛЮВАННЯ ЕНЕРГОПЕРЕНОСУ В ФАЗОПЕРЕХІДНОМУ ТЕПЛОАКУМУЛЯТОРІ СОНЯЧНОЇ ТЕРМОДИНАМІЧНОЇ УСТАНОВКИ

Проведено числове дослідження процесів фазового переходу «тверде тіло – рідина» в тепловому акумуляторі сонячної термодинамічної установки. В основі математичної моделі та числового алгоритму покладено метод «Mushy Layer», який відображає фізичну суть явища. Комп'ютерне моделювання задачі Стефана дозволило виявити особливості процесу фазового переходу, визначити розподіл температур в рідкій та твердій фазі, товщину твердої та рідкої фаз теплоакуючого матеріалу, швидкість руху границі розподілу фаз.

Ключові слова: тепловий акумулятор; задача Стефана; метод «Mushy Layer»; теплоакуючий матеріал, числові експерименти.

Вступ. Дослідження систем акумуляування теплової енергії є однією із актуальних проблем сучасної енергетики. Ця проблема стає особливо гострою у зв'язку з широким впровадженням енергетичних систем, що функціонують на основі відновлювальних джерел енергії, зокрема, на основі енергії Сонця. Нерівномірність надходження сонячного випромінювання протягом дня, місяця, року потребує обов'язкового використання теплових акумуляторів, які забезпечують безперебійну роботу сонячних енергетичних пристроїв. Ґрунтові та водяні акумулятори теплоти, принцип дії яких базується на акумуляуванні тепла за рахунок теплоємності, знайшли широке застосування у низькотемпературних сонячних установках, що використовуються для гарячого водопостачання та опалення. Для високотемпературних сонячних енергетичних пристроїв такий тип акумуляування є неефективним та досить коштовним, бо потребує значних об'ємів та площ. У високотемпературних енергетичних системах акумуляування здійснюється за рахунок теплоти фазового переходу «тверде тіло – рідина». Фазоперехідні акумулятори проєктуються під відповідний температурний рівень, що дорівнює температурі фазового переходу обраного теплоакуючого матеріалу (ТАМ), тому можуть використовуватись не тільки для високотемпературних, а і для низькотемпературних систем в разі налаштування їх під визначений ТАМ. Загальна ефективність фазоперехідного методу акумуляування обумовлена тим, що для багатьох речовин значення ентальпії фазового переходу значно вище теплоутримання за рахунок тепло-

ємності, тому при однакових геометричних розмірах теплові акумулятори «тверде тіло – рідина» мають значно більшу енергетичну ємність.

Пошук оптимального співвідношення між енергетичними, геометричними та динамічними параметрами фазоперехідного теплоаккумулятора неможливий без моделювання температурних полів всередині шару ТАМ, де поглинається або виділяється прихована теплота фазового переходу. Цей процес супроводжується рухом границі розподілу фаз, на якій температура дорівнює температурі фазового переходу ТАМ. Подібні нелінійні та нестационарні задачі в математичній фізиці об'єднують в окремий клас, що має назву задач Стефана. Відомо, що точний аналітичний розв'язок для задач Стефана можна отримати лише в одновимірному випадку при тривіальних граничних умовах [3], тому числові методи є основним інструментарієм для пошуку адекватних розв'язків багатовимірних задач при граничних умовах, що наближені до реальних. Серед таких методів виділяється метод «Mushy Layer» [7], що базується на згладжуванні переходу між твердою та рідкою фазами, де має місце стрибкоподібна зміна параметрів. Саме такий метод було обрано в даній роботі для моделювання фазового переходу в теплоаккумуляторі сонячної термодинамічної установки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На даний момент існує велика кількість наукових робіт, присвячених розв'язанню задачі Стефана наближеними аналітичними та числовими методами. Так, наближений аналітичний розв'язок задачі про фазовий перехід було отримано в [1] на основі енергетичних балансових співвідношень. У [6] вперше було отримано наближений аналітичний розв'язок задачі Стефана методом Гальоркіна. Ці та інші наближені методи [5] дають швидкі адекватні розв'язки, які зручно використовувати для оцінки параметрів на початкових етапах проектування, але остаточні рекомендації можна видати лише на основі детального аналізу процесу фазового переходу на основі моделювання задачі Стефана в повній постановці та її числової реалізації.

Проведений огляд підходів до розв'язання задачі Стефана показав, що вибір числового методу, як правило, обумовлюється особливостями протікання процесу фазового переходу, геометрією системи, теплофізичними та динамічними властивостями ТАМ. Так, у [8], де важливим було врахування конвекції в рідинній фазі, числовий розв'язок отримано методом малого параметру. Авторам [2] був відомий закон руху границі розподілу фаз, тому для визначення розподілу температур при фазовому переході було обрано метод вирівнювання фронтів. Для подолання розрахункових труднощів під час дослідження задачі Стефана часто використовуються підстановки Кірхгоффа, Гудмена, Больцмана, метод змінних часових кроків, метод дрібних кроків та ін. [7, 11, 12].

Особливість протікання процесу фазового переходу в щільному тепловому акумуляторі сонячної термодинамічної установки обумовлює вибір методу «Mushy Layer», як найбільш ефективного та такого, що відповідає фізичній моделі явища.

Метою роботи є побудова математичної моделі фазового переходу «тверде тіло – рідина» в щільному накопичувачі тепла сонячної термодинамічної установки, створення відповідного числового алгоритму та проведення числового дослідження по визначенню температурних полів в ТАМ, що дозволить розрахувати основні проектні параметри для теплового акумулятора заданої ємності.

Розробка математичної моделі фазового переходу «тверде тіло – рідина». Класична математична модель задачі Стефана містить два рівняння теплопровідності з нелінійною умовою спряженості на границі фазового переходу, де виділяється або поглинається теплота фазового переходу [3]. Наявність розриву теплофізичних параметрів на границі розподілу фаз спонукає до пошуку різноманітних моделей їх згладжування та переходу до визначення безперервних функцій температур не тільки в кожній фазі, а і у всьому шарі, де здійснюється фазовий перехід. Одним з найпоширеніших методів такого згладжування, який найбільш наближений до реальної фізичної суті явища є метод «Mushy Layer» [7]. Він заснований на припущенні, що прихована теплота фазового переходу виділяється не в нескінченно тонкому шарі на границі фазового переходу, а в тонкому шарі скінченної товщини, який рухається в часі. Це припущення базується на багаточисельних експериментальних даних, наведених в роботах, що присвячені дослідженню розплавів матеріалів різної природи. Спостереження вказують на існування двофазної зони кристалізації, яка являє собою суміш кристалів різних форм з ще незатверділим розплавом. Таким чином, у речовині, що змінює агрегатний стан, виділяють не дві, а три зони: рідка фаза, двофазна зона кристалізації (mushy layer), тверда фаза (рис. 1). Границі цих зон визначаються температурами ліквідуса T_L та солідуса T_C , які знаходяться у відповідності до діаграми стану речовини, що розглядається.

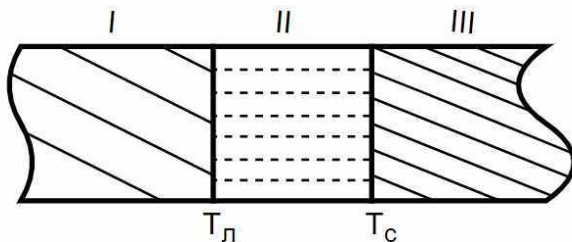


Рис. 1 – Схема затвердіння теплоакumuлюючого матеріалу:
I – рідка фаза, II – двофазна зона кристалізації, III – тверда фаза

Наведене припущення дозволяє спростити загальну постановку задачі Стефана, що містить систему рівнянь у часткових похідних зі спеціальною граничною умовою на межі розподілу фаз, де поглинається чи виділяється теплота фазового переходу. Після відповідних перетворень задача описується єдиним диференціальним рівнянням, яке має вигляд:

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad } T) + q(T), \quad (1)$$

де T – температура (K); t – час (c); $c(T)$ – питома теплоємність ($\text{Дж}/\text{кг} \cdot K$); λ – коефіцієнт теплопровідності ($\text{Вт} \cdot \text{м}/K$); ρ – густина ($\text{кг}/\text{м}^3$); q – функція джерела ($\text{Вт}/\text{м}^3$).

В якості функції джерела використовується комплекс

$$q(T) = L\rho\phi \begin{cases} \psi(T), & T_c \leq T \leq T_l, \\ 0, & T > T_l \text{ та } T < T_c, \end{cases}$$

де L – прихована теплота фазового переходу ($\text{Дж}/\text{кг}$); ψ – відносна доля твердої фази в двофазній зоні.

Підставляючи $q(T)$ в рівняння (1) можна спостерігати, що $c(T)$ та $q(T)$ входять в це рівняння однаковим чином. Тому, після проведення відповідних перетворень, отримаємо рівняння (1) у вигляді:

$$c_\vartheta \rho_\vartheta \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_\vartheta \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

де

$$c_\vartheta = \begin{cases} c_p, & T > T_l, \\ \frac{c_p + c_m}{2} - L \frac{d\psi}{dT}, & T_c < T < T_l, \\ c_m, & T < T_c, \end{cases} \quad (3)$$

$$\rho_\vartheta = \begin{cases} \rho_p, & T > T_l, \\ \frac{\rho_p + \rho_m}{2}, & T_c < T < T_l, \\ \rho_m, & T < T_c, \end{cases} \quad (4)$$

$$\lambda_\vartheta = \begin{cases} \lambda_p, & T > T_l, \\ \frac{\lambda_p + \lambda_m}{2}, & T_c < T < T_l, \\ \lambda_m, & T < T_c, \end{cases} \quad (5)$$

Вирази (3) – (5) містять значення теплоємності, густини та коефіцієнту теплопровідності рідної фази c_p , ρ_p , λ_p та твердої фази c_m , ρ_m , λ_m , відповідно. Похідна $-\frac{d\psi}{dT}$ характеризує темп кристалізації, величина якого вибирається, виходячи з уявлень про характер кристалізації відповідного матеріалу. Зокрема, якщо лінії солідуса та ліквідуса ТАМ мають вид прямих паралельних ліній, то темп кристалізації можна виразити аналітичної формулою виду (7):

$$-\frac{d\psi}{dT} = 1/(T_n - T_c). \quad (7)$$

Проведені в [10] експерименти вказують на те, що більшість ТАМ мають самі такі лінії ліквідуса та солідуса.

Теплофізичні властивості теплоакумуючого матеріалу. Критерієм для вибору ТАМ є температурний рівень, на якому функціонує система перетворення енергії. Наразі, існує багато природних та синтетичних речовин, що охоплюють великий діапазон температур фазового переходу, які теоретично можна використовувати в якості ТАМ. До низькотемпературних ТАМ відносяться парафіни різного хімічного складу, композиційні матеріали, інші хімічні сполуки, температура фазового переходу яких $T_{\phi} \leq 80^{\circ}\text{C}$. Середньотемпературні ТАМ ($T_{\phi} \leq 900^{\circ}\text{C}$) – це різноманітні органічні матеріали, солі та їх суміші, неорганічні хімічні сполуки та їх композиції. Діапазон температур фазового переходу високотемпературних ТАМ типу кремнію, фториду або гідриду літію, фториду натрію та ін. починається з $T_{\phi} > 900^{\circ}\text{C}$. Крім температури фазового переходу при виборі ТАМ важливим є його теплофізичні властивості, екологічна та економічна складова. Таким критеріям повністю відповідають солі лужних металів, які широко застосовуються при акумулювання енергії в діапазоні температур від 400 K до 900 K. Саме в такому температурному діапазоні функціонують сонячні термодинамічні станції з параболоциліндричними концентраторами, обов'язковим елементом яких є фазоперехідний теплоаккумулятор [13].

Евтектична суміш нітрату натрію NaNO_3 та калію KNO_3 у співвідношенні 45,67% та 54,33% є найбільш розповсюдженим ТАМ для подібних станцій. Слід відмітити, що такі нітратні суміші в сонячних термодинамічних установках можуть використовуватися не тільки як ТАМ, але і як теплоносії [15]. Саме така суміш досліджувалась в якості ТАМ в даній роботі.

Незважаючи на те, що евтектична суміш нітрату натрію та калію є популярним ТАМ, у відкритій літературі наводяться досить суперечливі дані щодо їх теплофізичних властивостей. На основі літературних джерел [4, 10, 14] було проведено аналіз цих властивостей та прийняті відповідні адитивні значення теплофізичних параметрів, які наведені в табл. 1.

Таблиця 1 – Теплофізичні параметри

Параметр	Значення	Параметр	Значення
$\rho_m, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	1900	$\lambda_p, \frac{\text{Вт}\cdot\text{м}}{\text{К}}$	0.425
$\rho_p, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	2100	$\lambda_m, \frac{\text{Вт}\cdot\text{м}}{\text{К}}$	0.5
$c_p, \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$	1800	$L, \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$	$232.5 \cdot 10^3$
$c_m, \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$	1400	$T_l, \text{К}$	496

Числова реалізація, результати та обговорення. На основі математичної моделі (2) – (6) було створено числовий алгоритм, який реалізовано на мові програмування Python. При складанні числового алгоритму важливе значення мав вибір кількості кроків за просторовою координатою. Це пов'язано з особливістю розв'язання задачі Стефана методом “Mushy Layer”, а саме, в перехідну зону, яка обмежена температурами T_l і T_c , повинні потрапити мінімум 10 вузлів розрахункової сітки, щоб забезпечити врахування прихованої теплоти фазового переходу. Стійкість розрахункової схеми для задачі з особливими умовами, що пов'язані з виділенням чи поглинанням тепла, забезпечувалась вибором відповідної кількості кроків за часом і співвідношенням їх величини з величиною кроків за просторовою координатою.

Для реалізації числового експерименту була обрана фізична модель щільного теплового акумулятора з шаром ТАМ товщиною $l = 0,2 \text{ м}$. Повний час числового експерименту дорівнював $\tau = 5 \text{ год}$. Діапазон температур ліквідуса та солідуса був вибраний у відповідності до температури фазового переходу и дорівнював $T_l = 496 \text{ К}$ та $T_c = 494 \text{ К}$.

На рис. 2 представлені результати числового моделювання процесу фазового переходу «тверде тіло – рідина» в евтектичній суміші солей натрію та калію при граничних умовах першого роду. Початкова температура ТАМ дорівнювала $T_m = 330 \text{ К}$, а температура стінки теплового акумулятора – $T_{cm} = 1650 \text{ К}$. На графіку можна чітко спостерігати формування границі розподілу фаз, її рух в часі, розподіл температур в рідкій та твердій фазі, товщину шару розплавленого або затверділого ТАМ. Якісна картина процесу співпадає з відомими класичними розв'язками задачі Стефана [3].

Більш характерним режимом функціонування теплового акумулятора є режим, що відповідає граничним умовам третього роду. Розв'язок задачі Стефана з граничними умовами третього роду при початковій температурі $T_m = 330 \text{ К}$, коефіцієнті тепловіддачі $\alpha = 1000 \text{ Вт} / \text{м}^2 \cdot \text{К}$ та температурі теплоносія $T_{mn} = 2650 \text{ К}$, наведений на рис. 3.

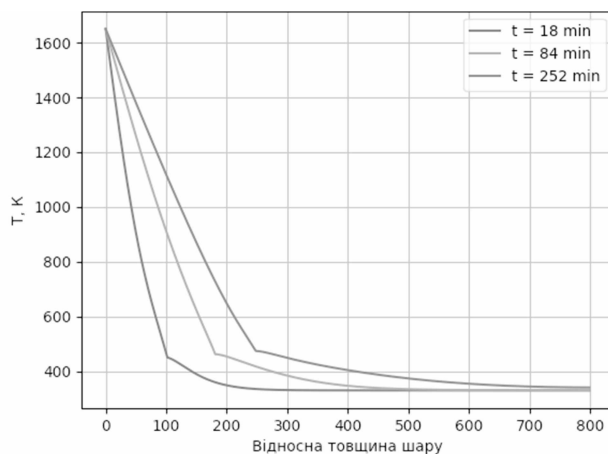


Рис. 2 – Розподіл температури у шарі ТАМ при граничних умовах першого роду

Як видно з рис. 3, в цілому, якісна картина процесу фазового переходу співпадає з попереднім випадком, що опосередковано свідчить про адекватність розробленої математичної моделі та відповідного числового алгоритму. Більш точна кількісна верифікація буде отримана на наступних етапах дослідження відповідної суміші солів шляхом порівняння з експериментальними даними або розв'язками, що отримані іншими методами.

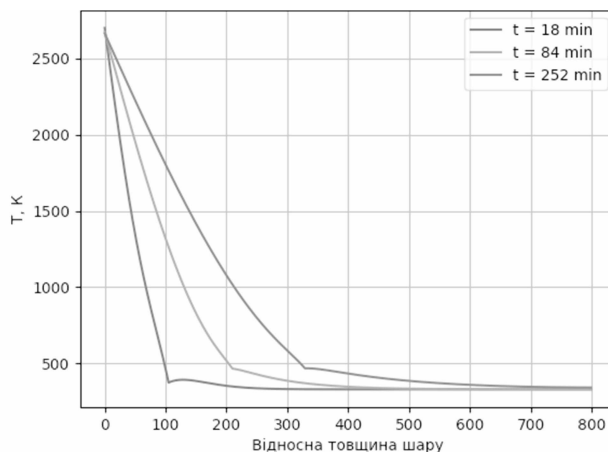


Рис. 3 – Розподіл температури у шарі ТАМ при розв'язанні задачі Стефана з граничними умовами третього роду

Висновки. Наведені в роботі результати відображають перший етап дослідження перспективних теплоакumuлюючих матеріалів, використання яких може забезпечити безперебійну роботу системи перетворення сонячних термодинамічних установок, що функціонують в середньотемпературному інтервалі. Аналіз різних підходів до розв'язання задачі Стефана дозволив визначити метод «Mushy Layer» таким, що відповідає суті фізичного процесу в фазоперехідному тепловому акумуляторі. Побудована на основі вибраного методу математична модель та проведені числові розрахунки дозволили виявити особливості протікання процесу фазового переходу, визначити розподіл температур в рідкій та твердій фазі, товщину шару розплавленого або затверділого теплоакumuлюючого матеріалу, швидкість руху границі розподілу фаз.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Кныш Л.И.** Математическое моделирование процессов теплообмена в аккумулирующих системах «твёрдое тело – жидкость» // Пром. теплотехника. 2014. Т. 36. № 4. С. 5-10.
2. **Кобиланська О.Б.** Задача Стефана зі змінним у часі джерелом тепла // Вісник Харківського нац. ун-ту. 2012. № 1015. С.167–172.
3. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
4. **Назирев Р.А.** Материалы с изменяющимся фазовым состоянием в ограждающих конструкциях. // Строительство и реконструкция. 2019. № 6 (86) С. 66–85.
5. **Пехович А.И., Жидких В.М.** Расчёты теплового режима твердых тел // Л.: Энергия, 1976. 352 с.
6. **Подгородный А.Р.** Численный анализ фазовых превращений на примере одномерной задачи // Радиоэлектроника и информатика. 2015. № 2. С. 45–48.
7. **Тимошпольский В.И., Беляев Н.М., Рядно А.А. и др.** Прикладные задачи металлургической теплофизики. Минск: Наука і тэхніка, 1991. 320 с. ISBN 5-343-00826-7.
8. **Шевченко А.И.** Задача Стефана при наличии конвекции // Доповіді Нац. акад. наук України. 2012. № 1. С. 25–29.
9. **Caldwell J., Kwan Y.** A brief review of several numerical methods for one-dimensional Stefan problems // Thermal Science. 2009. Vol. 13. No 2. P. 61–72.
10. **D'Aguzzo B., Karthik M., Grace A. N., Floris A.** Thermostatic properties of nitrate molten salts and their solar and eutectic mixtures // Scientific reports. 2018. Vol. 8. No 10485. P. 1–13.
11. **Gupta S.C.** The Classical Stefan Problem. Basic Concepts, Modelling and Analysis with Quasi-Analytical Solutions and Methods. Amsterdam: Elsevier; 2018. 732 p.
12. **Javierre-Perez E.** Literature Study: Numerical Methods for solving Stefan problems // Report 03-16, Delft University of Technology. 2003. P. 35–45.
13. **Knysh L.** Comprehensive mathematical model and efficient numerical analysis of the design parameters of the parabolic trough receiver // International Journal of Thermal Sciences. 2021. Vol.162. No 106777. P. 1–15.
14. **Liu M, Saman W., Bruno F.** Review on storage materials and thermal performance enhancement techniques for high temperature phase change thermal storage systems // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2012. Vol. 16, Iss. 4. P. 2118–2132. <https://habr.com/ru/post/102753/>

И. В. Гарькавский, Л. И. Кныш, д-р техн. наук

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭНЕРГОПЕРЕНОСА В ФАЗОПЕРЕХОДНОМ ТЕПЛОАККУМУЛЯТОРЕ СОЛНЕЧНОЙ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ

Проведено численное исследование процессов фазового перехода «твердое тело – жидкость» в тепловом аккумуляторе солнечной термодинамической установки. В основе математической модели и численного алгоритма положен метод "Mushy Layer", который отражает физическую суть явления. Компьютерное моделирование задачи Стефана позволило выявить особенности процесса фазового перехода, определить распределение температур в жидкой и твердой фазе, толщину твердой и жидкой фаз теплоаккумулирующего материала, скорость движения границы раздела фаз.

Ключевые слова: тепловой аккумулятор; задача Стефана; метод «Mushy Layer»; теплоаккумулирующий материал; численные эксперименты.

UDC 519.63

I. V. Harkavskiy, L. I. Knysh, Dr. Sci. (Tech.)

MODELING OF ENERGY TRANSFER IN A PHASE-CHANGE THERMAL STORAGE MODULE OF A SOLAR THERMODYNAMIC POWER PLANT

A numerical study of the phase change "solid-liquid" processes in the thermal storage module of a solar thermodynamic power plant is carried out. The mathematical model and numerical algorithm are based on the "Mushy Layer" method, which reflects the physical essence of the phenomenon. Computer modeling of the Stefan problem allows to reveal the phase-change process features, to determine the temperature distributions in the liquid and solid phases, the thickness of the solid and liquid phases in the thermal storage material, the velocity of the phase boundary.

Keywords: thermal storage module; Stefan problem; "Mushy Layer" method; thermal storage materials; numerical experiments.

Thermal storage systems are key elements of solar thermodynamic systems, since guarantee smooth functioning power plants when the Sun is absent. Phase-change thermal storage systems have significant advantages in comparison with other methods of thermal storage. Thermal storage systems are designed on temperature level which corresponds phase change temperature of the chosen thermal storage material. Therefore, using of a molten salt is widespread technology of thermal storage in solar thermodynamic systems. Eutectic mixture of sodium nitrate and potassium nitrate as phase change material for solar thermodynamic plants is numerically studied in the present article. Numerical algorithm based on mathematical model that is composed by the «Mushy Layer» method. The choice of this method is due to nature of the phase-change process in the molten-salt thermal storage modules. Applying of the "Mushy Layer" method allows to simplify Stefan problem and to replace two partial differential equations by single heat equation for solid, liquid and "Mushy" phases. Such equation is numeri-

cally solved assuming that solidus line and liquidus line of the phase-change material are parallel. This assumption allows to find analytical equation for crystallization rate and to take into account latent heat of fusion (melting). The thermodynamic parameters of the eutectic mixture of sodium nitrate and potassium nitrate is chosen via review and analysis of numerous scientific sources. The developed numerical algorithm is realized using Python in-house software and tested using classical heat equation without phase change. Computer modeling of the phase transition in plate thermal storage of the solar thermodynamic plants allows to identify features of the phase-change process, to determine the temperature distributions in the liquid and solid phases, thickness of the solid and liquid phases in the thermal storage material, the velocity of the phase boundary.

REFERENCES

1. **Knysh L.I.** Mathematical modeling of heat transfer processes in accumulating systems "solid - liquid" // *Ind. heat engineering*. 2014. Vol. 36., № 4. P. 5–10. (in Russian).
2. **Kobylyanska O.B., Lyashenko V. P.** Stefan's problem with a time-varying heat source // *Vestnik of Kharkiv National University*. 2012. № 1015. P.167–172. (in Russian).
3. **Lykov A. V.** Thermal conductivity theory // *M.: Vysshaya shkola*, 1967. 600 p. (in Russian).
4. **Nazirov R.A., Takhtobin A. V.** Materials with a changing phase state in enclosing structures // *Construction and reconstruction*. 2019. № 6 (86.) P. 66–85. (in Russian).
5. **Pekhovich A. I., Zhidkikh V.M.** Calculations of the thermal mode of solids. Leningrad: Energia, 1976. 352 p. (in Russian).
6. **Podgorodnyi A.R., Sidorov M.V., Yalovega I.G.** Numerical analysis of phase transformations on the example of a one-dimensional problem // *Radioelectronics and Informatics*. 2015. No 2. P. 45–48. (in Russian).
7. **Tymoshpolskyi V.I., Belyaev N.M., Ryadno A.A.** and etc/ *Applied problems of metallurgical thermal physics*. Minsk: Navuka i tekhnika, 1991, 320 c. ISBN 5-343-00826-7. (in Russian).
8. **Shevshenko A. I., Minenko A.S.** Stefan problem in the presence of convection // *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*. 2012. №1. P. 25–29. (in Russian).
9. **Caldwell J., Kwan Y.** A brief review of several numerical methods for one-dimensional Stefan problems // *Thermal Science*. 2009. Vol. 13. No 2. P. 61–72.
10. **D'Aguzzo B., Karthik M., Grace A. N., Floris A.** Thermostatic properties of nitrate molten salts and their solar and eutectic mixtures // *Scientific reports*. 2018. Vol. 8. No 10485. P.1–15.
11. **Gupta S.C.** The Classical Stefan Problem: Basic Concepts, Modelling and Analysis with Quasi-Analytical Solutions and Methods. Amsterdam: Elsevier; 2018. 732 p.
12. **Javierre-Perez E.** Literature Study: Numerical Methods for solving Stefan problems // *Report 03-16*, Delft University of Technology. 2003. P. 35–45.
13. **Knysh L.** Comprehensive mathematical model and efficient numerical analysis of the design parameters of the parabolic trough receiver // *International Journal of Thermal Sciences*. 2021. Vol.162. No 106777. P. 1–13.
14. **Liu M, Saman W., Bruno F.** Review on storage materials and thermal performance enhancement techniques for high temperature phase change thermal storage systems // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2012. Vol. 16. Iss. 4, P. 2118–2132. <https://habr.com/ru/post/102753/>.

DOI 10.15421/4220012
УДК 539.3

Б. Д. Гераскин, Ю. Я. Годес, канд. физ.-мат. наук, И. Б. Кочеткова

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ НАГРУЗКИ ПО ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ НА ВИНКЛЕРОВСКОМ ОСНОВАНИИ

Рассмотрена динамическая задача об установившемся движении нагрузки по бесконечной упругой ортотропной пластине, лежащей на основании Винклера. Для определения поля прогибов использован метод интегрального преобразования Фурье. В результате анализа сходимости интеграла, выражающего прогибы, установлен диапазон скоростей движения нагрузки, при которых реализуется установившийся процесс деформирования.

Ключевые слова: ортотропная упругая пластина; упругое основание; установившееся движение нагрузки; критическая скорость; интегральное преобразование Фурье.

Введение. Решения стационарных динамических задач о движении нагрузок по поверхностям полубесконечных упругих тел теряют смысл при достижении скоростью движения нагрузки некоторого критического значения, что указывает на невозможность реализации установившегося процесса деформирования при критической и сверхкритических скоростях [6, 7]. Определению критических скоростей для упругих многослойных оснований посвящены работы [1, 2, 5, 8]. Диапазон скоростей, при которых реализуется установившийся режим движения нагрузки по изотропной пластине на упругом основании, исследован в [3, 4]. В настоящей статье излагается алгоритм моделирования движения нагрузки по ортотропной упругой пластине, лежащей на основании Винклера.

Постановка задачи. Рассматривается бесконечная ортотропная упругая пластина толщиной h ($-\infty < x_1^0, x_2^0 < \infty$, $-h/2 < x_3^0 < h/2$), лежащая на основании Винклера с коэффициентом постели k , $x_1^0 x_2^0 x_3^0$ – неподвижная система координат, плоскость $x_1^0 x_2^0$ которой совпадает с срединной плоскостью пластины (рис. 1). На пластину действует поперечная нагрузка, область приложения которой движется поступательно с постоянной по величине и направлению скоростью v , вектор которой образует угол α с осью x_1^0 . Подвижная система координат $x_1 x_2 x_3$ неизменно связана с областью нагружения, $x_1 = x_1^0 - v t \cos \alpha$, $x_2 = x_2^0 - v t \sin \alpha$, $x_3 = x_3^0$, ее оси перпендикулярны плоскостям симмет-

рии упругих свойств материала пластины. Интенсивность поперечной нагрузки $q(x_1, x_2)$ с течением времени не изменяется. Рассматривается установившийся процесс деформирования пластины, когда поле прогибов в подвижной системе координат явно от времени не зависит: $w = w(x_1 - vt \cos \alpha, x_2 - vt \sin \alpha) = w(x_1, x_2)$. Требуется определить поле прогибов и установить диапазон скоростей движения нагрузки, при которых реализуется установившийся процесс деформирования.

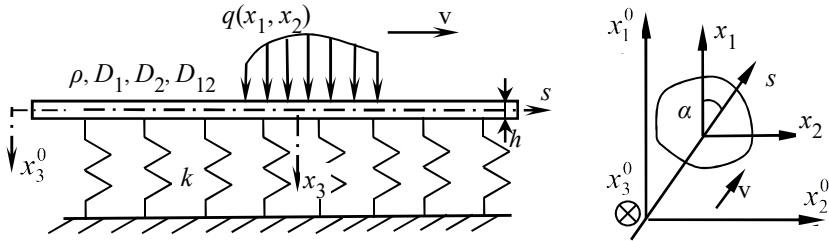


Рис. 1 – Пластина на основании Винклера под действием движущейся нагрузки

Методика решения. Так как процесс деформирования предполагается установившимся, то инерционное слагаемое в уравнении динамического изгиба ортотропной упругой пластины [10] выражается через производные прогибов по подвижным координатам, и указанное уравнение приводится к виду

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + k w + \rho h v^2 \left(\cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \sin 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = q(x_1, x_2), \quad (1)$$

где D_1 , D_2 , D_{12} – жесткости ортотропной пластины, определяемые механическими характеристиками материала; ρ – ее плотность.

Применив к уравнению (1) интегральное преобразование Фурье [9] по координатам x_1 , x_2 , получим выражение трансформанты поля прогибов

$$D_1 \bar{w} = h^4 \bar{q}(\xi_1, \xi_2) (u(\xi_1, \xi_2))^{-1}, \quad (2)$$

где $\bar{q}(\xi_1, \xi_2)$ – трансформанта интенсивности нагрузки; функция $u(\xi_1, \xi_2)$ определена равенством

$$u(\xi_1, \xi_2) = (\xi h)^4 \left(\cos^4 \varphi + \frac{m_1}{2} \sin^2 2\varphi + m_2 \sin^4 \varphi \right) - (\xi h)^2 \eta \cos^2(\varphi - \alpha) + \kappa ;$$

ξ, φ – полярные радиус и угол в плоскости ξ_1, ξ_2 параметров преобразования Фурье соответственно; $\xi_1 = \xi \cos \varphi$; $\xi_2 = \xi \sin \varphi$. Величины

$$\kappa = kh^4 D_1^{-1}, \quad \eta = \rho v^2 h^3 D_1^{-1}, \quad m_1 = D_{12} D_1^{-1}, \quad m_2 = D_2 D_1^{-1}$$

представляют собой характеристики системы – безразмерные коэффициент постели, скорость и параметры ортотропии соответственно.

Поле прогибов определяется в результате применения к равенству (2) формулы обращения интегрального преобразования Фурье [9]:

$$4\pi^2 D_1 w(x_1, x_2) = h^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{q}(\xi_1, \xi_2)}{u(\xi_1, \xi_2)} e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} d\xi_1 d\xi_2 . \quad (3)$$

Критическая скорость движения нагрузки. Для того чтобы формула (3) представляла решение поставленной задачи, интеграл в ее правой части должен сходиться равномерно относительно параметров x_1, x_2 . Это требование выполняется при условии отсутствия в плоскости ξ_1, ξ_2 нулей у функции $u(\xi_1, \xi_2)$, являющейся биквадратным трехчленом относительно ξh . Указанное условие приводит к неравенству

$$\eta^2 \cos^4(\varphi - \alpha) - 4\kappa \left(\cos^4 \varphi + \frac{m_1}{2} \sin^2 2\varphi + m_2 \sin^4 \varphi \right) < 0 ,$$

которое должно выполняться для любых значений полярного угла φ .

Таким образом, интеграл Фурье, выражающий поле прогибов, сходится равномерно, если безразмерная скорость движения нагрузки η меньше критического значения η_* , определяемого равенством:

$$\eta_*^2 = 4\kappa \min_{-\pi < \varphi \leq \pi} \frac{m_2 + 2(m_1 - m_2) \cos^2 \varphi + (m_2 - 2m_1 + 1) \cos^4 \varphi}{\cos^4(\varphi - \alpha)} . \quad (4)$$

Реализация установившегося процесса деформирования оказывается возможной только при докритических скоростях движения нагрузки $\eta < \eta_*$. Значение критической скорости, задаваемое формулой (4), зависит исключительно от механических характеристик конструкции и угла между вектором скорости движения нагрузки и направлениями ортотропии.

Численная реализация решения. Для приближенного вычисления интеграла Фурье использовались адаптивные алгоритмы на основе

квадратурных формул Гаусса и Филона, учитывающие осциллирующий характер подынтегральной функции. Применение таких алгоритмов позволяет избежать накопления ошибок округления и обеспечивает получение численных результатов с заданной точностью. Значение критической скорости определялось в результате численного решения задачи минимизации методом половинного деления.

В качестве иллюстрации предлагаемой методики моделирования рассмотрена задача о движении по пластине поперечной сосредоточенной силы Q , приложенной в начале подвижной системы координат. В этом случае трансформанта Фурье поперечной нагрузки $\bar{q}(\xi_1, \xi_2) = Q$. На рис. 2 показано изменение прогибов вдоль линии движения сосредоточенной силы при некоторых докритических значениях скорости.

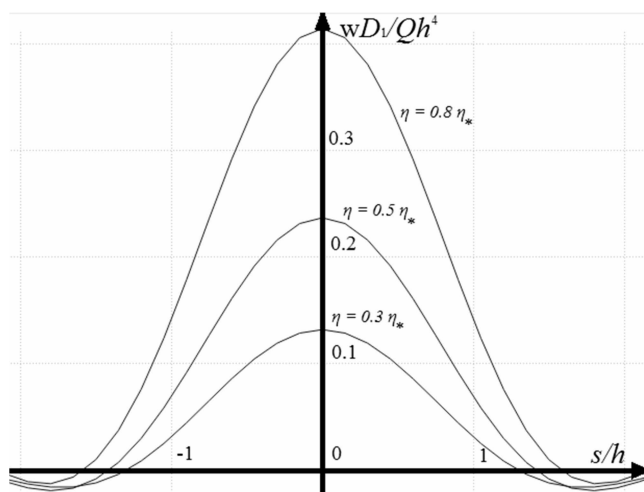


Рис. 2 – Прогибы от действия сосредоточенной силы

Параметры конструкции $\kappa = 4$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $\alpha = 30^\circ$, $\eta_* = 5,336$, координата s отсчитывается от точки приложения силы вдоль линии ее движения. Как и следовало ожидать, максимальное значение прогиба достигается в точке приложения сосредоточенной силы. С ростом скорости движения нагрузки прогибы возрастают, при стремлении скорости движения нагрузки к критической максимальное значение прогиба возрастает неограниченно.

Заключение. Построенное в настоящей работе решение стационарной динамической задачи о движении нагрузки по упругой пластине, лежащей на винклеровском основании, позволило исследовать имеющие место в таких процессах резонансные явления и установить диапазон скоростей, при которых реализуется установившийся режим деформирования. Предложена эффективная методика вычисления кри-

тической скорости и прогибов пластины с заданной точностью, позволяющая проводить численный анализ влияния на них анизотропии материала.

Перспективным направлением дальнейших исследований является решение нестационарной задачи, когда нагрузка прикладывается к бесконечной ортотропной пластине в начальный момент времени и затем перемещается с постоянной скоростью. Значительный интерес представляет исследование условий, при которых нестационарное поле прогибов с течением времени стремится к построенному стационарному решению. Целесообразно также исследовать возможность распространения в упругой ортотропной пластине собственных волн и установить связь между их скоростями и критической скоростью установившегося движения нагрузки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Вильданова С. И., Годес Ю. Я.** Резонансные явления в многослойных основаниях с чередующимися однородными и неоднородными слоями // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. 2008. Т. 1. Вип. 11. С. 102–116.
2. **Вильданова С. И., Годес Ю. Я.** Задача об установившемся движении нагрузки по неоднородному упругому основанию // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. 2005. Т. 2. Вип. 9. С. 19 – 26.
3. **Годес Ю. Я., Кочеткова И. Б.** Резонансные явления при установившемся движении нагрузки по пластине на упругом основании // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. 2017. Вип. 21. С. 82–89.
4. **Годес Ю. Я., Лесничий А. Н.** Критическая скорость движения нагрузки по упругому основанию из пластины на полупространстве // Вопросы механики деформирования и разрушения твердых тел: сб. науч. тр. Дніпропетровськ: ДДУ, 1997. С. 22 – 27.
5. **Годес Ю. Я., Рябук П. В.** Критическая скорость движения нагрузки по слою, сцепленному с полупространством // Вопросы механики деформирования и разрушения твердых тел: сб. науч. тр. Дніпропетровськ: ДДУ, 1998. С. 19–23.
6. **Гольдштейн Р. В.** Волны Рэлея и резонансные явления в упругих телах // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. Вип. 3. С. 516 – 525.
7. **Гольдштейн Р. В.** Поверхностные волны и резонансные явления в упругих телах // Соросовский образовательный журнал. 1996. № 11. С. 123 – 127.
8. **Приварников А. К., Радовский Б. С.** Действие подвижной нагрузки на вязко-упругое многослойное основание // Прикл. механика. 1981. Т. 17. Вип. 6. С. 45–52.
9. **Снеддон И.** Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
10. **Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.** Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.

УДК 539.3

Б. Д. Гераскін, Ю. Я. Годес, канд. фіз.-мат. наук, І. Б. Кочеткова

МОДЕЛЮВАННЯ УСТАЛЕНОГО РУХУ НАВАНТАЖЕННЯ ПО ОРТОТРОПНІЙ ПЛАСТИНІ НА ВІНКЛЕРОВСЬКІЙ ОСНОВІ

Розглянуто динамічну задачу про усталений рух навантаження по нескінченній пружній ортотропній пластині, що лежить на основі Вінклера. Для визначення поля прогинів застосовано метод інтегрального перетворення

Фур'є. У результаті аналізу збіжності інтеграла, що виражає прогини, визначено діапазон швидкостей руху навантаження, за яких реалізується усталений процес деформування.

Ключові слова: ортотропна пружна пластина; пружна основа; усталений рух навантаження; критична швидкість; інтегральне перетворення Фур'є.

Розглядається нескінченна ортотропна пружна пластина товщиною h , що лежить на основі Вінклера з коефіцієнтом постелі k . Пластина знаходиться під дією поперечного навантаження, область прикладення якого рухається поступально з постійною швидкістю v . З областю навантаження незмінно зв'язана рухома система координат $x_1x_2x_3$, осі якої перпендикулярні площинам симетрії пружних властивостей матеріалу пластини, площина x_1x_2 співпадає з серединною площиною пластини, а вісь x_1 утворює кут α з вектором швидкості. Інтенсивність навантаження $q(x_1, x_2)$ не змінюється з часом. Розглядається усталений процес деформування, при якому поле прогинів у рухомій системі координат явно від часу не залежить.

Інерційний доданок у рівнянні динамічного згину пластини виражається через похідні прогинів по рухомих координатах. Застосовуючи інтегральне перетворення Фур'є по координатах x_1, x_2 , знаходимо поле прогинів $w(x_1, x_2)$ у вигляді інтеграла по площині параметрів перетворення $\xi_1 \xi_2$. Рівномірна збіжність цього інтеграла відносно параметрів x_1, x_2 забезпечується відсутністю нулів у знаменника $u(\xi_1, \xi_2)$ трансформанти прогинів. Функція $u(\xi_1, \xi_2)$ є бікватратним тричленом відносно полярного радіуса у площині параметрів перетворення, тому умова відсутності нулів призводить до нерівності $\eta < \eta_*$, де η – безрозмірна швидкість руху навантаження, η_* – її критичне значення. За умови $\eta < \eta_*$ інтеграл Фур'є, що виражає прогини, збігається рівномірно.

Таким чином, реалізація усталеного процесу деформування є можливою тільки при докритичних швидкостях руху навантаження. Значення критичної швидкості залежить виключно від механічних характеристик конструкції та кута між вектором швидкості руху навантаження та напрямками ортотропії.

Для наближеного обчислення інтеграла Фур'є застосовано адаптивні алгоритми на основі квадратурних формул Гауса і Філона, що враховують осцилюючий характер підінтегральної функції. Такі алгоритми забезпечують одержання числових результатів із заданою точністю. Значення критичної швидкості знайдено як результат числового розв'язання задачі мінімізації методом ділення навпіл. Запропоновану методику моделювання проілюстровано результатами для випадку руху по пластині зосередженої сили, що рухається з докритичними швидкостями. Продемонстровано зростання прогинів при наближенні швидкості до критичного значення.

B. D. Heraskin, Yu. Ya. Hodes, PhD (Phys.-Math.), I. B. Kochetkova

MODELLING OF STEADY-STATE LOAD MOTION ALONG AN ORTHOTROPIC PLATE ON WINKLER FOUNDATION

Dynamic problem of a load steady-state motion is considered for an infinite elastic orthotropic plate on Winkler foundation. Fourier integral transformation is used to obtain the deflections. The Fourier integrals convergence analysis allows to find the velocities diapason in which the steady-state deformation process can be carried out.

Keywords: *orthotropic elastic plate; elastic foundation; steady-state load motion; critical velocity; Fourier integral transformation.*

An infinite elastic orthotropic plate on Winkler foundation is considered, h is the plate thickness, k is the bed coefficient. A lateral load is applied to the plate, motion of the loading area is translational with the constant velocity v . The movable coordinate system $x_1x_2x_3$ is connected to the loading area, coordinate axes are perpendicular to the planes of elastic symmetry for the plate material, x_1x_2 is the middle plane for the plate, the velocity direction forms the angle α with the x_1 -axis. The load intensity $q(x_1, x_2)$ does not change in time. The deformation process is considered to be steady-state: the deflection field does not depend evidently on time in the movable coordinate system.

The time derivative of the deflection in the equation of the plate dynamic bending can be expressed in terms of derivatives respect to the moving coordinates. After applying Fourier integral transformation by coordinates x_1 , x_2 we obtain the deflection field $w(x_1, x_2)$ as integral over the plane of the transformation parameters $\xi_1 \xi_2$:

$$4\pi^2 D_1 w(x_1, x_2) = h^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{q}(\xi_1, \xi_2)}{u(\xi_1, \xi_2)} e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} d\xi_1 d\xi_2.$$

For this integral the uniform convergence with respect to x_1, x_2 is ensured if the deflections transform denominator $u(\xi_1, \xi_2)$ has no zeros. Function $u(\xi_1, \xi_2)$ is a biquadratic trinomial with respect to the polar radius in the plane of the transformation parameters, and so the condition for the zeros absence leads to inequality $\eta < \eta_*$, where η is the dimensionless velocity of the load, η_* is its critical value

$$\eta_*^2 = 4\kappa \min_{-\pi < \varphi \leq \pi} \frac{m_2 + 2(m_1 - m_2)\cos^2 \varphi + (m_2 - 2m_1 + 1)\cos^4 \varphi}{\cos^4(\varphi - \alpha)},$$

where κ is the dimensionless bed coefficient; m_1 , m_2 are the dimensionless orthotropy parameters.

Thereby the steady-state deformation process can be carried out only at subcritical velocities. The critical velocity value depends only on the mechanical characteristics of the structure and the angle between the velocity and the orthotropy directions.

The effective method is proposed to calculate deflections accurately. The adaptive algorithm based on Gauss and Filon quadratures allows to take into account oscillation of the integrand. The proposed technique is illustrated by the results for the case of concentrated force moving with the subcritical velocities. The maximum deflection increases when velocity tends to the critical value.

REFERENCES

1. **Vildanova S.I., Hodes Yu.Ya.** Resonance phenomena in the multilayered foundations with the alternate homogeneous and nonhomogeneous layers // Bulletin of Dnipropetr. Univ. Ser.: Mechanika. 2008. Vol. 1. Is. 11. P. 102–116. (in Russian).
2. **Vildanova S.I., Hodes Yu.Ya.** The problem of a load steady-state motion along inhomogeneous elastic foundation // Bulletin of Dnipropetr. Univ. Ser.: Mechanika. 2005. Vol. 2. Is. 9. P. 19–26. (in Russian).
3. **Hodes Yu.Ya., Kochetkova I.B.** Resonance phenomena at a load steady-state motion along a plate on elastic foundation // Bulletin of Dnipropetr. Univ. Ser.: Mechanika. 2017. Is. 21. P. 82–89. (in Russian).
4. **Hodes Yu.Ya., Lesnichiy A.N.** Critical velocity of the moving load along the elastic base from the plate on the half-space // Problems of solids deformation and fracture mechanics. Dnipropetrovsk: DSU. 1997. P. 22–27. (in Russian).
5. **Hodes Yu.Ya., Riabuk P.V.** Critical velocity of the moving load along the layer concatenated to half-space // Problems of solids deformation and fracture mechanics. Dnipropetrovsk: DSU. 1998. P. 19–23. (in Russian).
6. **Goldstein R.V.** Rayleigh waves and resonance phenomena in elastic bodies // Applied Mathematics and Mechanics. 1965. Vol. 26. Is. 3. P. 516–525. (in Russian).
7. **Goldstein R.V.** Surface waves and resonance phenomena in elastic bodies // Soros Educational Journal. 1996. No. 11. P. 123–127. (in Russian).
8. **Privarnikov A.K., Radovsky B.S.** Viscoelastic multilayered foundation under moving load // Applied Mechanics. 1981. Vol. 17. No. 6. P. 45–52. (in Russian).
9. **Sneddon I.** Fourier transforms. Moscow: Foreign Literature Publ. House, 1955. 668 p. (in Russian).
10. **Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S.** Theory of plates and shells. Moscow: Phys.-Math. Literature State Publ. House, 1966. 668 p. (in Russian).

*Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара
Дніпр, Україна*

Надійшла до редколегії 30.10.2020

DOI 10.15421/4220013
УДК. 539.3

П. А. Дзюба, канд. техн. наук

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОСЛАБЛЕННЫХ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

Представлены результаты системного экспериментального исследования докритического состояния, закритических форм равновесия и критических нагрузок цилиндрических оболочек с регулярно расположенными в одном поясе среднего поперечного сечения круговыми отверстиями при осевом сжатии. Количество отверстий и их размеры изменялись в широких диапазонах. Испытаны двенадцать серий моделей. Для каждой серии оболочек суммарная площадь всех отверстий оставалась постоянной. Результаты представлены в виде графиков, таблиц и картин форм потери устойчивости.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка; круговые отверстия; осевое сжатие; устойчивость; экспериментальное исследование.

Введение. Тонкостенные цилиндрические оболочки находят широкое применение в ракетной, космической, авиационной, нефтеперерабатывающей, химической и других отраслях. Такие оболочечные элементы зачастую имеют целый ряд отверстий различного количества, формы, размеров и расположения, обусловленных конструктивными и технологическими требованиями.

Применение теоретических методов и современных численных средств анализа позволяет достаточно успешно исследовать напряженно-деформированное состояние таких тонкостенных деформируемых систем [5, 11, 15, 16, 20]. Что касается задач устойчивости, то достоверность полученных таким образом решений часто требует дополнительного обоснования. Дело в том, что наличие отверстий в гладкой цилиндрической оболочке приводит к существенному изменению напряженно-деформированного состояния. Наряду с основным напряженным состоянием, которое распространяется по всей поверхности оболочки, вокруг отверстий возникают области концентрации напряжений локального характера, которые зачастую и инициируют локальную потерю устойчивости оболочки в районе отверстий, которая сопровождается образованием больших деформаций и существенным изменением поля напряжений. Как правило, после локальной потери устойчивости оболочка может и далее воспринимать возрастающую нагрузку вплоть до общей потери устойчивости. Изменение геометрии и напряженно-деформированного состояния в процессе локальной потери

устойчивости носит нелинейный характер, поэтому теоретически определить достоверную величину критической нагрузки, соответствующей общей потере устойчивости оболочки, часто не представляется возможным. В этих условиях чрезвычайно важными являются экспериментальные методы исследования. В тоже время корректное проведение таких исследований связано со значительными трудностями технического характера. Эти обстоятельства обуславливают актуальность экспериментальных исследований этой проблемы, учитывая, что обеспечение устойчивости и несущей способности таких тонкостенных оболочек при действии на них различных внешних нагрузок является одной из важнейших инженерных задач.

Одной из первых статей, посвященных экспериментальным исследованиям влияния отверстий на устойчивость оболочек при осевом сжатии, была работа R. Tennyson [27], который проводил исследование оболочек, ослабленных в средней части цилиндрической поверхности одним круговым отверстием различного диаметра. Оболочки изготавливались методом центробежного литья из эпоксидного материала.

В [10] представлены результаты экспериментального исследования устойчивости круговых продольносжатых цилиндрических оболочек, ослабленных в средней части одним круговым вырезом, при действии осевого сжатия, кручения, внешнего давления и комбинации этих нагрузок. Эксперименты проводились на оболочках, изготовленных из триацетатной плёнки. Проведен анализ зависимости докритического поведения, критических нагрузок и закритического волнообразования от размеров отверстия. В работе Д. Г. Старнса [18] обсуждаются результаты экспериментального исследования влияния круговых вырезов на устойчивость тонких цилиндрических оболочек, изготовленных из майларовой полистероидной плёнки при действии осевой сжимающей силы, изгиба и кручения.

Работа [2] посвящена экспериментальному исследованию устойчивости цилиндрических и конических оболочек с одним и двумя отверстиями круговой и квадратной формы при осевом сжатии. Был сделан вывод, что критические нагрузки для круговых отверстий немного превышают соответствующие нагрузки для квадратных, а несущая способность оболочки с одним круговым или квадратным отверстием меньше несущей способности оболочек с двумя такими отверстиями. Этот результат в полной мере соответствует физике процесса, поскольку при наличии одного отверстия на поверхности оболочки при ее продольном сжатии появляется изгибающий момент от внецентренного сжатия [7].

В [8, 9, 14] приводятся результаты экспериментального исследования влияния количества равномерно расположенных в окружном направлении в различных сечениях по длине оболочки круговых отверстий различных размеров на величину несущей способности цилиндрических оболочек при осевом сжатии. Исследовались закритические формы равновесия оболочек с увеличением количества отверстий. В [7] представлены результаты системных экспериментальных испытаний

моделей продольно сжатых оболочек с одним или несколькими отверстиями квадратной и круговой формы, различных размеров и количества.

В целом, исследованию устойчивости тонкостенных оболочек с круговыми отверстиями при действии как осевой сжимающей силы, так и других видов нагружения посвящено значительное количество работ, среди которых следует отметить публикации [3, 4, 6, 12, 13, 17, 21 – 24, 26, 28].

Модели для испытаний. В качестве материала для изготовления моделей была выбрана чертежная бумага марки «В» ГОСТ 597-73. Впервые возможность качественного исследования устойчивости моделей цилиндрических оболочек, изготовленных из бумаги, была показана Р.В. Роде и Е.Е. Лундквистом [25], а позже В.М. Чебановым [19]. В настоящей статье использована методика изготовления и испытания моделей цилиндрических оболочек из чертёжной бумаги, разработанная Е.Ф. Прокопало [4, 7 – 9, 14, 21], где приведено также обоснование корректности использования такого материала. Показано, что этот материал обладает достаточно стабильными механическими характеристиками, ортотропией механических свойств и высокой технологичностью при изготовлении моделей. Более того, невзирая на сравнительно низкие значения упругих характеристик бумаги, по сравнению с металлами, отношение предела текучести этого материала к модулю упругости (σ_T/E) соразмерно с этими данными для листовой нержавеющей стали, что даёт возможность проводить широкомасштабные экспериментальные исследования, которые практически невозможно выполнить на металлических оболочках.

В результате предварительных исследований, выполненных как на плоских образцах, так и на оболочках при помощи электромеханической системы, были определены основные механические характеристики материала: модули упругости $E_x = 6,9 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $E_y = 3,45 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $G = 1,92 \cdot 10^9 \text{ Па}$ и коэффициенты Пуассона $\mu_x = 0,3$, $\mu_y = 0,15$. Здесь индексы X , Y соответствуют главным направлениям ортотропии бумаги. Толщина листа составляла $h = 0,23 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Эта величина была практически неизменной для соответствующей партии бумаги. Измерение толщины листа проводилось при помощи индикатора часового типа с ценой деления шкалы 10^{-6} м .

Для изготовления оболочек из листа ватмана вырезались прямоугольные заготовки таким образом, чтобы их стороны были параллельны главным направлениям ортотропии. Направление E_x всегда совпадало с направлением образующей оболочки, а E_y – с её направляющей. На заготовках при помощи высечек пробивались круговые отверстия, регулярно расположенные вдоль направляющей симметрично относительно среднего поперечного сечения. Размеры отверстий варьировались в широких диапазонах. Такая технология обеспечивала в районе отверстий отсутствие остаточных деформаций. Затем заготовка склеивалась на металлическом цилиндре. Ширина клеевого шва со-

ставляла $5 \cdot 10^{-3}$ м. Внутренний радиус всех моделей – $R = 37,5 \cdot 10^{-3}$ м, рабочая длина $L = 75 \cdot 10^{-3}$ м. Полная длина оболочки была принята $L_{\Pi} = 115 \cdot 10^{-3}$ м. Для обеспечения возможности равномерной передачи на оболочку осевых сжимающих усилий к ее криволинейным кромкам приклеивались металлические торцевые приспособления, имеющие круговое поперечное сечение диаметром $d = 75 \cdot 10^{-3}$ м. Ширина приклея составляла $2 \cdot 10^{-2}$ м. Такое закрепление краев обеспечивало граничные условия, близкие к жесткому защемлению.

Таблица 1 – Геометрия моделей

№ Серии	Суммарная относительная площадь отверстий F/n	Диаметр отверстий d (мм)											
		Количество отверстий n											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\bar{F}_1 = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	$\bar{F}_2 = 0,0043$	10	7	5,5	5	-	4	-	-	-	-	-	-
3	$\bar{F}_3 = 0,0055$	11,1	8	6,4	5,5	5	-	-	4	-	-	-	3,2
4	$\bar{F}_4 = 0,011$	15,8	11,1	9	8	7	6,4	6	5,5	-	5	4,8	-
5	$\bar{F}_5 = 0,014$	18	12,7	-	9	8	-	-	6,4	6	-	5,5	-
6	$\bar{F}_6 = 0,022$	22	15,5	12,7	11	-	9	-	-	-	7	-	6,4
7	$\bar{F}_7 = 0,028$	25	18	-	12,5	11,1	-	9,5	9	-	8	-	-
8	$\bar{F}_8 = 0,042$	30	22	-	15,5	14	12,5	-	11	-	9,5	9	-
9	$\bar{F}_9 = 0,07$	40	-	-	20	18	16	15	14	-	12,7	12,5	11,1
10	$\bar{F}_{10} = 0,11$	50	-	-	25	22	20	19	17,5	-	15,8	15	-
11	$\bar{F}_{11} = 0,16$	60	-	-	30	-	25	22	-	20	19	-	-
12	$\bar{F}_{12} = 0,21$	70	50	40	-	30	-	-	-	-	-	-	-

Всего было испытано 12 серий оболочек, общим количеством 160 моделей. Оболочки первой серии были сплошными (4 шт.). В табл. 1 для оболочек всех серий приведены: количество отверстий (n шт.), их диаметр (d, мм) и относительная суммарная площадь круговых отверстий, где $\bar{F}$ равно отношению суммарной площади всех отверстий, вырезанных на конкретной модели к рабочей площади боковой поверхности сплошной оболочки. Каждая номинально геометрически одинаковая модель изготавливалась в двух экземплярах. В каждой серии при различных размерах и количестве отверстий их суммарная площадь оставалась постоянной. На одной оболочке все отверстия были одного размера.

Методика проведения эксперимента. Испытания проводились на специальной установке, позволяющей нагружать оболочку осевой сжимающей силой (рис. 1). Оболочка (1) нижним торцом крепилась на горизонтальной плите (2), а к верхнему торцу (4) оболочки для передачи сжимающей силы шарнирно крепилась тяга (3), которая проходила через отверстие в нижнем торце и в плите. Нагружение проводилось через тягу поэтапно по схеме «мертвого» груза при помощи стандартных гирь второго класса точности. В процессе нагружения перемещение груза ограничивалось упором, предотвращающим полное разрушение оболочки после потери её устойчивости. Равнодействующая сжимающего усилия всегда проходила через геометрические центры верхнего и нижнего торцов. При нагружении оболочки верхний торец мог свободно поворачиваться в вертикальной плоскости.

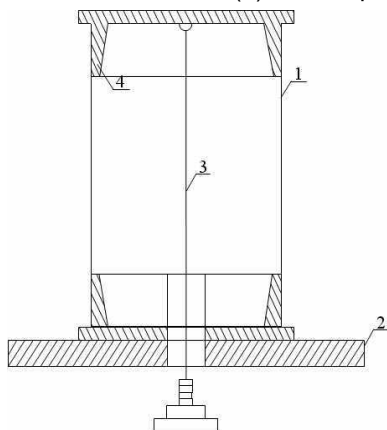


Рис. 1 – Схема установки для испытаний оболочек на осевое сжатие

При наличии в оболочке одного отверстия такая схема нагружения приводит к внецентренному сжатию. Для сплошной оболочки и для оболочек с отверстиями, при их количестве, отличном от единицы, и условии их регулярного размещения в одном поперечном сечении, такая схема нагружения отвечает осевому сжатию. Момент потери устойчивости определялся визуально. Оболочки, которые имели локальные формы потери устойчивости, догружались до общей потери устойчивости, которая сопровождалась исчерпанием несущей способности.

Докритическое поведение и закритические формы равновесия. На оболочках с отверстиями диаметром $d = 4 - 6$ мм в докритической стадии изгибающих деформаций вблизи отверстий визуально не наблюдалось. На оболочках с отверстиями диаметром от 8 до 20 мм при нагружении осевой сжимающей силой наблюдался изгиб на краях отверстий, в результате которого образовывались выпучины, направленные от центра кривизны. Они начинались и далее имели максимальное значение на противоположных концах диаметра отверстия, лежащего в среднем поперечном сечении оболочки. Вдоль направляющей протяженности выпучин была сопоставима по размеру с диаметром отверстия. В радиальном направлении максимальные перемещения имели порядок нескольких толщин оболочки на краю отверстия и быстро убывали вдоль образующей. На расстояниях, равных примерно половине радиуса отверстия, с обеих сторон от "вершины" каждого прогиба они принимали отрицательные значения.



Рис. 2. – Локальная форма потери устойчивости оболочки с отверстием $d = 8$ мм

При дальнейшем увеличении нагрузки в этих зонах происходила локальная потеря устойчивости, проявлявшаяся на оболочках при определенном значении внешней нагрузки в зависимости от количества и размера отверстий, с образованием двух-трёх вмятин, которые располагались симметрично или кососимметрично по образующей, проходящей через центр отверстия (рис. 2).

После локальной потери устойчивости были возможны три варианта поведения оболочек: 1) сразу же после локальной потери устойчивости происходила общая потеря устойчивости; 2) происходила локальная потеря устойчивости, далее при неизменной нагрузке вмятины увеличивались и через некоторое непродолжительное время происходила общая потеря устойчивости; 3) после локальной потери устойчивости оболочки несли возрастающую нагрузку, локальные вмятины при этом увеличивались, и в какой-то момент хлопком наступала общая потеря устойчивости, которая сопровождалась исчерпанием несущей способности модели. Превышение нагрузки, соответствующее общей потере устойчивости над локальной, достигало 12 %. На оболочках с большим количеством отверстий $n > 6$ или с отверстиями большого диаметра $d > 20$ мм локальная потеря устойчивости не наблюдалась.

Закритические формы равновесия в основном наследовали картины прогибов докритического поведения оболочки.

Для сплошных оболочек (I серия) потеря устойчивости сопровождалась хлопком с образованием одного-двух поясов ромбовидных вмятин. Количество вмятин по дуге оболочки, как это и следовало ожидать из классических решений [1], было равно шести.

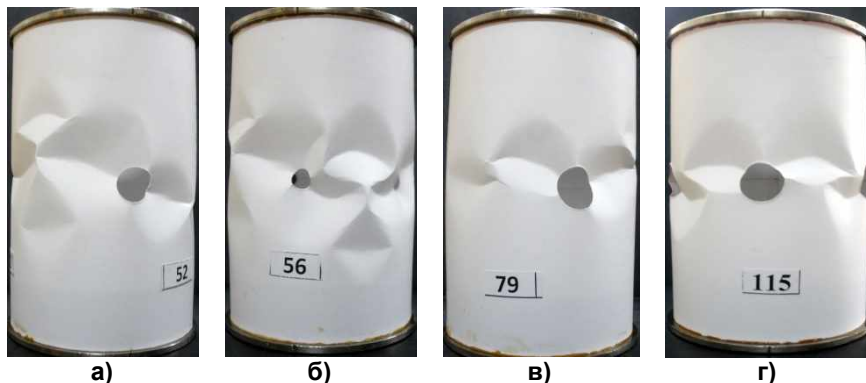


Рис.3 – Формы потери устойчивости цилиндрической оболочки при:
а) $n=2$, $d=12,7$ мм; б) $n=5$, $d=8$ мм; в) $n=2$, $d=15,5$ мм; г) $n=5$, $d=14$ мм

Отметим некоторые общие закономерности закритического волнообразования, характерные для оболочек с отверстиями. При малом количестве отверстий ($n \leq 5$), с диаметром не превышающем $d \leq 20$ мм, потеря устойчивости сопровождалась появлением, как правило, нерегулярных вмятин. При этом наибольшие из вмятин проходили через центры отверстий (рис. 3).

Оболочки с одним отверстием всегда теряли устойчивость по несимметричной форме (рис. 4). Увеличение размеров отверстий и их количества приводит к появлению регулярного волнообразования, геометрия которого определяется количеством и размером отверстий.

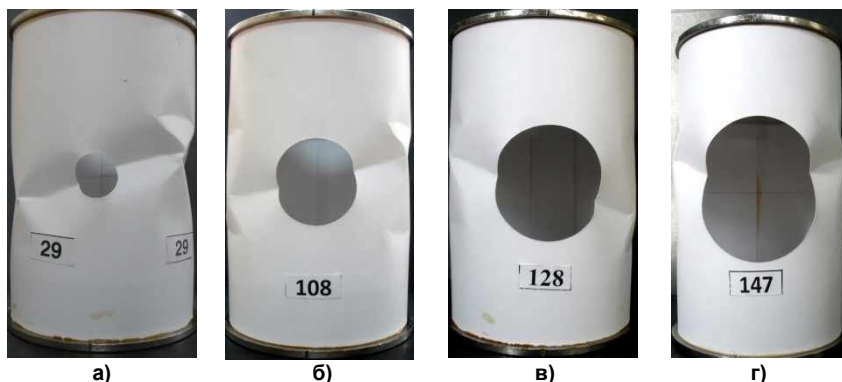


Рис. 4 – Несимметричные формы потери устойчивости оболочки с одним отверстием: а) $d=16$ мм; б) $d=30$ мм; в) $d=40$ мм; г) $d=50$ мм

Для оболочек с шестью отверстиями, при их диаметре, изменяющимся от $d = 4$ мм до $d = 18$ мм, два соседних пояса вмятин, расположенные симметрично относительно среднего поперечного сечения, образовывали один пояс «сдвоенных» вмятин, в центре каждой из которых находилось отверстие. Овалообразные вмятины были вытянуты кососимметрично относительно образующей, проходящей через центр отверстий (рис. 5).

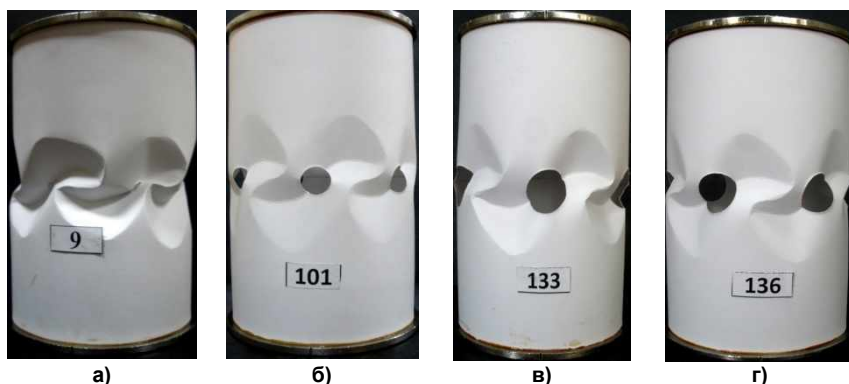


Рис. 5 – Формы потери устойчивости с поясом сдвоенных вмятин ($n=6$) : а) $d=4$ мм; б) $d=9,5$ мм; в) $d=18$ мм; г) $d=16$ мм

Оболочки с отверстиями диаметром $d = 8\text{--}14\text{ мм}$, при их количестве $n = 8\div 10$ теряли устойчивость с образованием одного – двух поясов, в каждом из которых было по пять – шесть вмятин, соответственно. При этом каждая вмятина как бы «опиралась» своими краями на два соседних отверстия (рис. 6).

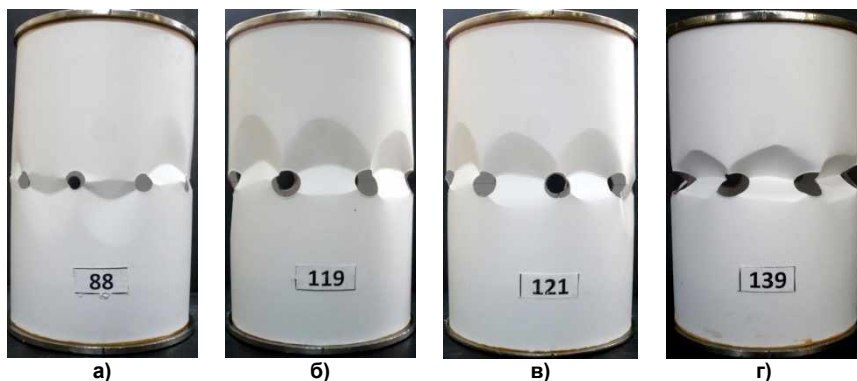


Рис. 6 – Регулярные формы потери устойчивости с образованием вмятин между отверстиями:

а) $n=10$, $d=8\text{ мм}$; б) $n=8$, $d=12\text{ мм}$; в) $n=9$, $d=10\text{ мм}$; г) $n=8$, $d=14\text{ мм}$

С увеличением размеров и количества отверстий в некоторый момент времени потеря устойчивости принимала «панельную» форму (рис. 7). Прогибы оболочки, соответствующие направлению ее перемещений в области волнообразования были направлены либо к центру, либо от центра кривизны. Характерной особенностью такого волнообразования является то, что по длине оболочки оно распространяется на величину, равную приблизительно диаметру отверстия.

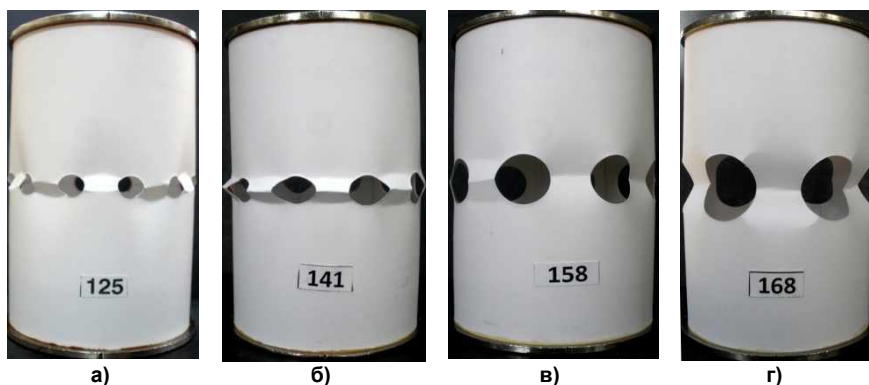


Рис. 7 – «Панельные» формы потери устойчивости:

а) $n=12$, $d=9\text{ мм}$; б) $n=10$, $d=12,7\text{ мм}$; в) $n=8$, $d=17,5\text{ мм}$; г) $n=6$, $d=25\text{ мм}$

Формы потери устойчивости, как следует из результатов исследований, зависели от количества и размеров отверстий, что вполне объясняется механизмом образования закритических деформаций. Как уже указывалось выше, каждая номинально геометрически одинаковая модель, изготавливалась и испытывалась в двух экземплярах. При этом, значения критических нагрузок, полученные для таких оболочек равной суммарной площадью отверстий, оказались очень близкими для всех моделей всех серий.

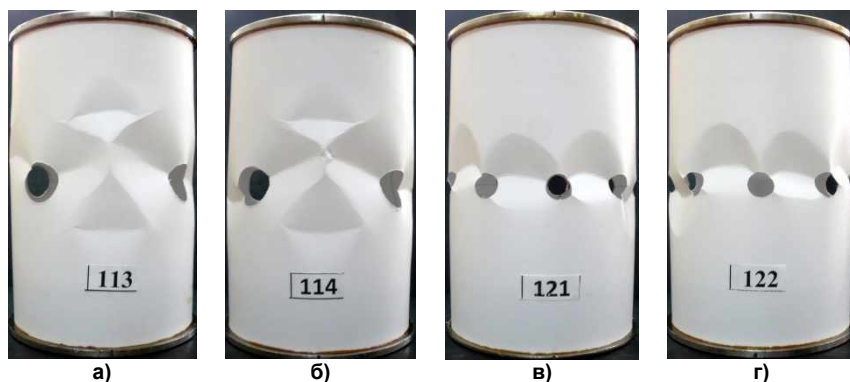


Рис. 8 – Закритические формы равновесия геометрически одинаковых моделей с малыми отверстиями:

а) $n=4$, $d=15,5$ мм; б) $n=4$, $d=15,5$ мм; в) $n=9$, $d=10$ мм; г) $n=9$, $d=10$ мм

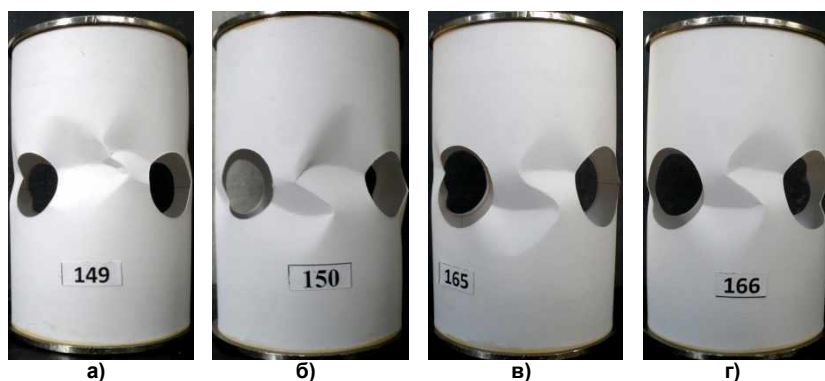


Рис. 9 – Закритические формы равновесия геометрически одинаковых моделей с большими отверстиями:

а) $n=4$, $d=25$ мм; б) $n=4$, $d=25$ мм; в) $n=4$, $d=30$ мм; г) $n=4$, $d=30$ мм

Возникает вопрос: будет ли при этом отличаться закритическое волнообразование таких двух геометрически одинаковых моделей? Проведенный анализ показал, что для двух геометрически одинаковых моделей формы волнообразования практически совпадают. На рис. 8 и рис. 9 приведены фотографии закритических форм равновесия для

четырёх пар оболочек. В каждой паре были оболочки геометрически номинально идентичными. Первая пара № 113 и № 114, вторая пара № 121 и № 122, третья пара № 149 и № 150, четвёртая пара № 165 и № 166. Приведенные фотографии свидетельствуют о том, что различие форм закритического волнообразования между двумя оболочками одной пары практически отсутствует. Это позволяет утверждать о несомненно очень высоком качестве проведенного эксперимента.

Анализ экспериментальных результатов. В табл. 2 приведены результаты экспериментальных исследований устойчивости 12-ти серий тонкостенных цилиндрических оболочек, ослабленных круговыми отверстиями общим количеством 160 моделей. Здесь P и $\bar{P}$, соответственно, абсолютные и относительные значения критической силы, а F и $\bar{F}$ - абсолютные и относительные суммарные площади отверстий для каждой серии оболочек. На рис. 10 представлена зависимость усредненных для каждой из двенадцати серий относительных критических нагрузок $\bar{P} = P/P_0$ от относительной суммарной площади отверстий на поверхности каждой оболочки; $\bar{F} = F/F_0$, где P - критическая осевая сила для оболочки с отверстиями; P_0 - критическая сила для сплошной оболочки; F - суммарная площадь отверстий в каждой оболочке; F_0 - площадь боковой поверхности оболочки. Разбросы критических нагрузок в пределах одинаковых оболочек каждой из серии не превышали 6-8 %.

Таблица 2 – Абсолютные и относительные значения критической осевой силы и соответствующие им абсолютные и относительные значения суммарной площади отверстий для каждой серии оболочек

Серия	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P, Н$	602	480	429	409	400	382	372	324	225	153	105	72
$F, см$	0	0,76	0,98	1,95	2,55	3,81	4,97	7,45	12,5	19,4	28,2	37,2
$\bar{P}$	1,0	0,8	0,71	0,68	0,66	0,63	0,62	0,54	0,37	0,25	0,17	0,12
$\bar{F}$	0	0,0043	0,0055	0,011	0,014	0,022	0,028	0,042	0,07	0,11	0,16	0,21

Характерной особенностью полученной зависимости во всём диапазоне изменения суммарной площади отверстий является неравномерное уменьшение критических усилий с увеличением суммарной площади отверстий в каждой оболочке.

При этом, самое интенсивное падение критической нагрузки имеет место на первом участке диаграммы $\bar{P} = f(\bar{F})$, где осевая критическая сила уменьшается примерно на 29 %, в то время как суммарная относительная площадь отверстий достигает всего лишь 0,55 % от площади общей боковой поверхности оболочки.

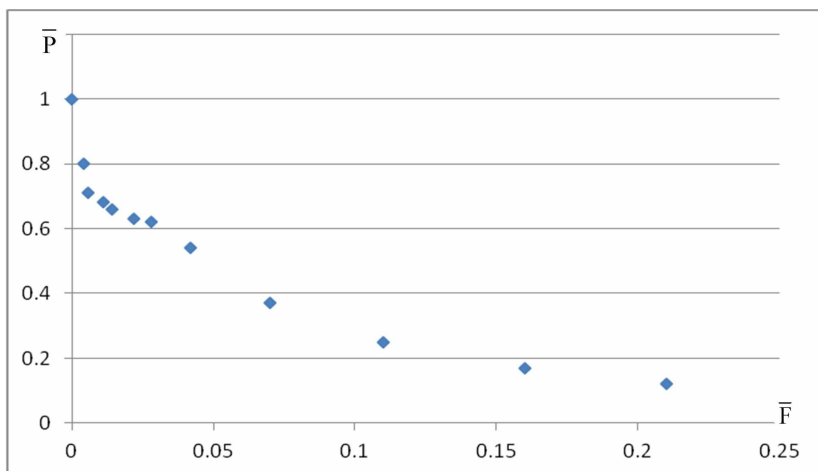


Рис. 10 – Зависимость относительных критических нагрузок $\bar{P}$ от относительной суммарной площади отверстий на каждой оболочке

В дальнейшем интенсивность падения нагрузки существенно уменьшается. Так увеличение параметра $\bar{F}$ (суммарной относительной площади отверстий) от 0,55 % до 7 % сопровождается уменьшением критической силы на 34 %. Таким образом, интенсивность падения нагрузки на втором участке ($0,55 \% \leq \bar{F} \leq 7 \%$) примерно в десять раз меньше, чем на первом ($0\% \leq \bar{F} \leq 0,55 \%$).

Выводы. Представлены результаты системного экспериментального исследования устойчивости 160 моделей цилиндрических оболочек при наличии различного количества и диаметра равномерно расположенных в окружном направлении среднего поперечного сечения круговых отверстий при осевом сжатии.

Построены и проанализированы зависимости относительной критической силы от отношения суммарной площади всех отверстий в каждой из оболочек к площади боковой поверхности.

Получены и проанализированы различные формы волнообразования при потере устойчивости в зависимости от количества и размеров отверстий.

Исходя из полученных результатов, можно также сделать вывод, что наличие круговых отверстий, центры которых регулярно расположены в среднем поперечном сечении оболочки с площадью, составляющей приблизительно пятую от часть общей поверхности сплошной оболочки, приводит к уменьшению несущей способности оболочки приблизительно в десять раз.

Показано, что зависимость критической силы потери устойчивости продольно сжатой цилиндрической оболочки от относительной суммарной площади равномерно расположенных в среднем поперечном сече-

нии круговых отверстий боковой поверхности имеет неравномерный характер.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
2. **Голда Ю.Л., Преображенский И.Н., Штукарев В.С.** Экспериментальное исследование устойчивости оболочек с отверстиями // Прикладная механика. 1973. Т. 9. № 1. С. 27–32.
3. **Григолюк Э.И., Кабанов В.В.** Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360 с.
4. **Гудрамович В.С., Дзюба П.А., Прокопало Е.Ф.** Устойчивость ослабленных круговыми отверстиями гладких цилиндрических оболочек при действии поперечного изгиба // Теоретична і прикладна механіка. Донецьк. 2007. Вип. 43. С. 82–87.
5. **Гузь А.Н.** Концентрация напряжений около отверстий в тонких оболочках // Прикладная механика. 1969. Т. 5. Вып. 3. С. 1–17.
6. **Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. и др.** Методы расчёта оболочек: в 5-ти томах. Т. 1 Теория оболочек, ослабленных отверстиями. К.: Наукова думка, 1980. 692 с.
7. **Дзюба А.П., Прокопало Е.Ф., Дзюба П.А.** Несуча здатність циліндричних оболонок з отворами. Д.: Ліра, 2014. 224 с.
8. **Колодяжный А.П., Прокопало Е.Ф.** Устойчивость цилиндрических оболочек с круговыми отверстиями при осевом сжатии. – Сообщение 1. Методика проведения и результаты испытаний; – Сообщение 2. Зависимость критической нагрузки от размеров отверстий; – Сообщение 3. Зависимость критической нагрузки от количества отверстий // Theoretical foundations of civil engineering. Warsaw: OWPW. 2010. №18. P. 171–192.
9. **Колодяжный А.П., Прокопало Е.Ф.** Устойчивость цилиндрических оболочек с системой отверстий при осевом сжатии // Вісник Дніпропетр. ун-ту: Серія «Механіка». 2011. Вип. 15. Т. 2. №. 5. С. 124–132.
10. **Коноплев Ю.Г., Тильш А.Л.** Устойчивость цилиндрических оболочек с вырезами при осевом сжатии, кручении и внешнем давлении // Теория пластин и оболочек. Казань, 1973. Вып.3. С. 3–13
11. **Лурье А.И.** Концентрация напряжений в области отверстий на поверхности кругового цилиндра // Прикл. математ. и механ. 1946. Т. X. Вып. 3. С. 22–30.
12. **Моссаковский В.И., Маневич Л.И., Мильцин А.М.** Моделирование несущей способности цилиндрических оболочек. К.: Наукова думка, 1977. 136 с.
13. **Преображенский И.Н.** Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями. М.: Машиностроение, 1981. 192 с.
14. **Прокопало Е.Ф., Саверская М. А.** Устойчивость цилиндрических оболочек, ослабленных круговыми отверстиями при осевом сжатии // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций: Сб. науч. тр. 2012. Вып.20. С.292–299.
15. **Савин Г.Н.** Концентрация напряжений около отверстий. К.: Наукова думка, 1968. 887 с.
16. **Сало В.А., Корниенко А.В.** Расчет напряженного состояния упругой оболочки с периодической системой круглых отверстий // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. 2011. Вып. 1. С. 76–82.
17. **Саченков А.В.** Теоретико-экспериментальный метод исследования устойчивости пластин и оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек: Сб.научн.тр. Казанского ун-та. 1968. № 6–8. С. 391–433.
18. **Старнс Д.Г.** Влияние кругового отверстия на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Ракетная техника и космонавтика. 1972. Т. 10. № 11. С. 96–104.

19. **Чебанов В.М.** Исследование устойчивости тонкостенных оболочек при помощи моделей из бумаги // Инженерный сборник. Институт механики АН СССР. 1955. Т. XXII. С. 68–73.
20. **Чернишенко І.С., Комарчук С.М., Максимюк В.А., Сторожук Є.А.** Моделювання нелінійного деформування ортотропних циліндричних оболонок з отвором при врахуванні ексцентриситету його підкріплення // Доп. Нац. академії наук України. 2016. № 1. С. 34–40.
21. **Dzyuba P.A., Prokopalo E.F.** Experimental investigation on the torsional stability of cylindrical shells weakened by circular holes // Journal Strength of Materials, November 2017, Vol. 49(6), Iss. 6, P. 829–837.
22. **Kamalarajah R., Stoffberg W., Bull J.W., Chizari M.** Stress Analysis of Uniform Circular Cylindrical Shells with Large Circular Holes // Proc. of The World Congress on Engineering. London: U.K. 2015., P. 1169–1172
23. **Lykhachova O., Krasovsky V.** Numerical simulation of buckling tests of axially compressed cylindrical shells with one circular cutout (R.Tennyson's experiments) // Theoretical foundations of civil engineering. Warsaw: WP. 2014. № 22. P. 133–136.
24. **Maksymyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S.** Nonlinear Deformation of Thin Isotropic and Orthotropic Shells of Revolution with Reinforced Holes and Rigid Inclusions // Int. Appl. Mech. 2013. Vol. 49. No 6. P. 685–692.
25. **Rhode R.V. Lundquist E.E.** Strength tests on paper cylinders in compression bending and shear // NASA. Techn. Notc. 1931. № 370.
26. **Stasiewicz P.** Analytical and Experimental Studies of Stability of Cylindrical Shells with a Cut-Out // Mechanics and Mechanical Engineering. 2013, Vol. 17. No. 2. P. 167–176.
27. **Tennyson R.C.** The effects of unreinforced circular cutouts on the buckling of circular shells under axial compression. // Trans. ASME. 1968. Vol. 90. No 4. P. 541–546.
28. **Wang D.F., Cao P.Z.** Stability of thin-walled cylindrical shells under combined loading of overall and local axial compression considering weld geometrical imperfection // Engineering Mechanics. 2009. № 26 (8). P. 65–73.

УДК 539.3

П. А. Дзюба, канд. техн. наук

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ОСЛАБЛЕНИХ КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ОСЬОВОМУ СТИСНЕННІ

Подані результати системного експериментального дослідження докритическої поведінки, закритичних форм рівноваги і критичних навантажень циліндричних оболонок з регулярно розташованими в одному поясі середнього поперечного перерізу круговими отворами при осьовому стисненні. Кількість отворів і їх розміри змінювалися в широких діапазонах. Випробувані дванадцять серій моделей. Для кожної серії оболонок сумарна площа всіх отворів лишалася незмінною. Результати подані у вигляді графіків, таблиць і картин форм втрати стійкості.

Ключові слова: циліндрична оболонка; кругові отвори; осьовий стиск; стійкість; експериментальне дослідження.

Забезпечення стійкості і несучої здатності тонкостінних оболонок з отворами при дії на них різних зовнішніх навантажень є однією з найважливіших інженерних задач.

Застосування теоретичних методів і сучасних числових засобів аналізу дозволяє досить успішно досліджувати напружено-деформований стан таких тонкостінних деформованих систем. В задачах стійкості достовірність отриманих таким чином рішень часто вимагає додаткового обґрунтування. Це пов'язано з тим, що наявність отворів в гладкій циліндричній оболонці призводить до істотної зміни напружено-деформованого стану в процесі її навантаження.

Поряд з основним напруженим станом, що поширюється по всій поверхні оболонки, навколо отворів виникають області концентрації напружень локального характеру, які найчастіше і ініціюють локальну втрату стійкості оболонки в околі отворів, яка супроводжується утворенням великих деформацій і істотною зміною поля напружень.

Зміна геометрії і напружено-деформованого стану в процесі локальної втрати стійкості носять нелінійний характер, тому теоретично визначити достовірну величину критичного навантаження, що відповідає загальній втраті стійкості оболонки, часто не представляється можливим. У цих умовах надзвичайно важливими є експериментальні методи дослідження. У той же час коректне проведення таких досліджень пов'язано зі значними труднощами технічного характеру. Ці обставини обумовлюють актуальність експериментальних досліджень цієї проблеми.

У статті представлені результати системного експериментального дослідження докритического стану, закритичних форм рівноваги і критичних навантажень циліндричних оболонок з регулярно розташованими в одному поясі середнього поперечного перерізу круговими отворами при осьовому стисненні. Як матеріал для виготовлення моделей було обрано чертежний папір марки «В». Наведено обґрунтування коректності та ефективності використання такого матеріалу.

Всього було випробувано 12 серій оболонок, загальною кількістю 160 моделей. Оболонки першої серії були суцільними. Кількість та розміри отворів варіювалися в широких діапазонах. Кожна номінально геометрично однакова модель виготовлялася в двох примірниках. У кожній серії при різних розмірах і різній кількості отворів їх сумарна площа лишалася незмінною. На одній оболонці всі отвори були одного розміру. Випробування проводилися на спеціальній установці, що дозволяє навантажувати оболонку осьової стискальною силою.

Побудовано і проаналізовано залежності осереднених значень критичної сили від сумарної площі отворів в оболонці (відповідно до кожної з дванадцяти серій оболонок).

Отримані картини різних форм хвилеутворення при втраті стійкості в залежності від кількості та розмірів отворів.

Характерною особливістю отриманої залежності критичної сили втрати стійкості поздовжньо стислої циліндричної оболонки від відносної сумарної площі рівномірно розташованих в середньому поперечному перерізі кругових отворів бічній поверхні є нерівномірне зменшення критичних зусиль зі збільшенням сумарної площі отворів на кожній оболонці.

EXPERIMENTAL STABILITY RESEARCHES OF CYLINDRICAL SHELLS WEAKENED BY CIRCULAR HOLES UNDER AXIAL COMPRESSION

The results of a systematic experimental study of the subcritical behavior, supercritical forms of equilibrium and critical loads of cylindrical shells with circular holes regularly located in one belt, symmetrically relative to the average cross-section, under axial compression are presented. The number of holes and their sizes varied within wide limits. Twelve series of models were tested, for each series of shells the total area of all holes remained constant. The results are presented in the form of graphs, tables and pictures of buckling forms.

Keywords: *cylindrical shell; circular holes; axial compression; stability; experimental study.*

The results of a systemic experimental study of the subcritical state, supercritical forms of equilibrium and critical loads of cylindrical shells with circular holes regularly located in one belt of the middle cross-section under axial compression are presented. The number of holes and their sizes varied within wide limits.

Drawing paper of "B" type was chosen as a material for making models. The substantiation of the correctness and efficiency of using such a material for the manufacture of models of cylindrical shells is presented in [4, 7, 9, 10, 14, 19, 21, 25].

In total, 12 series of shells were tested, with a total of 160 models. For each series of shells, the total area of all holes remained constant. The shells of the first series were solid. Each nominally geometrically identical model was made in duplicate. In each series, with different sizes and different numbers of holes, their total area remained constant. On one shell, all the holes were the same size. The tests were carried out on a special installation that allows the shell to be loaded with an axial compressive force.

The dependences of the averaged values of the critical force on the total area of holes on the shell (in accordance with each of the twelve series of shells) are constructed and analyzed.

Pictures of various forms of wave formation with loss of stability are obtained depending on the number and size of holes.

A characteristic feature of the obtained dependence of the critical buckling force of a longitudinally compressed cylindrical shell on the relative total area of uniformly spaced circular holes of the lateral surface in the middle cross-section is an uneven decrease in critical forces with an increase in the total area of holes on each shell.

REFERENCES

1. **Volmir A.S.** Stability of deformable systems. Moscow: Nauka, 1967. 984 p. (in Russian).

2. **Golda Yu.L.**, Preobrazhensky I.N., Shtukarev V.S. Experimental Investigation of the stability of shells with holes // *Applied Mechanics*. 1973. T. 9. No. 1. P. 27–32. (in Russian).
3. **Grigolyuk E.I.**, Kabanov V.V. The stability of the shells. Moscow: Nauka, 1978. 360 p. (in Russian).
4. **Hudramovich V.S.**, Dzyuba P.A., Prokopalo E.F. Stability of smooth cylindrical shells weakened by circular holes under transverse bending // *Theoretical and Applied Mechanics*. Donetsk. 2007. Vip. 43. S. 82–87. (in Russian).
5. **Guz A.N.** Stress concentration near holes in thin shells // *Applied Mechanics*. 1969. Vol. 5. Iss. 3, P. 1–17. (in Russian).
6. **Guz A.N.**, Chernyshenko I.S., Chekhov V.N. and etc. Methods for calculating shells: in 5 volumes. Vol. 1 Theory of shells weakened by holes. Kiev: Naukova Dumka, 1980. 692 p. (in Russian).
7. **Dzyuba A.P.**, Prokopalo E.F., Dzyuba P.A. The bearing capacity of cylindrical shells with openings. Dnepr: Lira, 2014. 224 p. (in Russian).
8. **Kolodyazhny A.P.**, Prokopalo E.F. Stability of cylindrical shells with circular holes under axial compression. - Message 1. Procedure and test results; - Message 2. Dependence of critical load on hole sizes; - Message 3. Dependence of the critical load on the sizes and number of holes // *Theoretical foundations of civil engineering*. Warsaw: OWPW. 2010. No. 18. P. 171–192. (in Russian).
9. **Kolodyazhny A.P.**, Prokopalo E.F. Stability of cylindrical shells with a system of holes under axial compression // *Bulletin of Dnipropetrovsk University: Series "Mekhanika"*. 2011. Vol. 2. Iss. 15. No. 5. P. 124–132. (in Russian).
10. **Konoplev Yu.G.**, Tilsh A.L. Stability of cylindrical shells with cutouts under axial compression, torsion and external pressure // *Theory of plates and shells*. Kazan. 1973. Iss. 3. P. 3–13. (in Russian).
11. **Lurie A.I.** Concentration of stresses in the area of holes on the surface of a circular cylinder // *Applied Mathematics and mechan.* 1946. Vol. X. Iss. 3. P. 22–30. (in Russian).
12. **Mossakovsky V.I.**, Manevich L.I., Miltsin A.M. Modeling the bearing capacity of cylindrical shells. Kiev: Naukova Dumka, 1977. 136 p. (in Russian).
13. **Preobrazhensky I.N.** Stability and vibrations of plates and shells with holes. Moscow: Mashinostroenie, 1981. 192 p. (in Russian).
14. **Prokopalo E.F.**, Saverskaya M.A. Stability of cylindrical shells weakened by circular holes under axial compression. Problems of computational mechanics and strength of structures.: Collection of scientific articles. 2012. Iss. 20. P. 292–299. (in Russian).
15. **Savin G.N.** Stress concentration around holes. Kiev: Naukova Dumka, 1968. 887 p. (in Russian).
16. **Salo V.A.**, Kornienko A.V. Calculation of the stress state of an elastic shell with a periodic system of circular holes // *Issues of design and production of aircraft structures*. 2011. Iss. 1. P. 76–82. (in Russian).
17. **Sachenkov A.V.** Theoretical and experimental method for studying the stability of plates and shells // Research on the theory of plates and shells: Collection of scientific works of Kazan University. 1968. No. 6-8. P. 391–433. (in Russian).
18. **Starnes D.G.** Influence of a circular hole on the stability of cylindrical shells under axial compression // *Rocket technology and cosmonautics*. 1972. Vol. 10. No. 11. P. 96–104. (in Russian).
19. **Chebanov V.M.** Investigation of the stability of thin-walled shells using paper models // Engineering collection. Institute of Mechanics of the Academy of Sciences of the USSR. 1955. Vol. XXII. P. 68–73. (in Russian).
20. **Chernishenko I.S.**, Komarchuk S.M., Maksimuk V.A., Storozhuk E.A. Modeling of nonlinear deformation of orthotropic cylindrical shells with a hole taking into account the

eccentricity of its reinforcement // Reports of Nat. Academy of Sciences of Ukraine. 2016. No. 1. P. 34–40. (in Ukrainian).

21. **Dzyuba P.A., Prokopalo E.F.** Experimental investigation on the torsional stability of cylindrical shells weakened by circular holes // Journal Strength of Materials, November 2017, Vol. 49(6). Iss. 6. P. 829–837.

22. **Kamalarajah R., Stoffberg W., Bull J.W., Chizari M.** Stress Analysis of Uniform Circular Cylindrical Shells with Large Circular Holes // Proc. of The World Congress on Engineering. London: U.K. 2015. P. 1169–1172.

23. **Lykhachova O., Krasovsky V.** Numerical simulation of buckling tests of axially compressed cylindrical shells with one circular cutout (R.Tennyson's experiments) // Theoretical foundations of civil engineering. Warsaw: WP. 2014. No 22. P. 133–136.

24. **Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S.** Nonlinear Deformation of Thin Isotropic and Orthotropic Shells of Revolution with Reinforced Holes and Rigid Inclusions // Int. Appl. Mech. 2013. Vol. 49. No 6. P. 685–692.

25. **Rhode R.V., Lundquist E.E.** Strength tests on paper cylinders in compression bending and shear // NASA. Techn. Notc. 1931. No. 370.

26. **Stasiewics P.** Analytical and Experimental Studies of Stability of Cylindrical Shells with a Cut-Out // Mechanics and Mechanical Engineering. 2013. Vol. 17. No. 2. P. 167–176.

27. **Tennyson R.C.** The effects of unreinforced circular cutouts on the buckling of circular shells under axial compression. // Trans. ASME. 1968. Vol. 90. No. 4. P. 541–546.

28. **Wang D.F., Cao P.Z.** Stability of thin-walled cylindrical shells under combined loading of overall and local axial compression considering weld geometrical imperfection // Engineering Mechanics. 2009. No. 26 (8). P. 65–73.

*Дніпровський національний
університет імені Олеся Гончара,
Дніпр, Україна*

Надійшла до редколегії 06.10.2020

DOI 10.15421/4220014
УДК 539.3

*А. С. Каиров, д-р техн. наук, Л. А. Латанская, канд. физ.-мат. наук,
В. А. Каиров, канд. техн. наук*

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ОТВЕРСТИЯМИ МЕТОДОМ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

Приведены результаты экспериментальных исследований частот и форм собственных колебаний неоднородных цилиндрических оболочек с отверстиями. Исследования выполнены методом голографической интерферометрии. Установлено влияние отверстий и других конструктивных особенностей на основные динамические характеристики оболочек. Описана методика проведения эксперимента. Экспериментальные данные сопоставляются с численными результатами, полученными методом конечных элементов.

***Ключевые слова:** цилиндрическая неоднородная оболочка; отверстия; собственные колебания; подкрепляющие ребра; голографическая интерферометрия; метод конечных элементов.*

Введение. Тонкостенные оболочечные элементы конструкций широко применяются в современной технике, что вызывает необходимость исследования их резонансных колебаний и определяет актуальность рассматриваемой задачи. При этом наличие отверстий и других конструктивных неоднородностей оказывает существенное влияние на амплитудно-частотные характеристики оболочек, которые отличаются неоднородными полями распределения напряжений, деформаций и перемещений поверхности, сложностью и многообразием форм колебаний.

Наряду с численно-аналитическими методами [1, 4, 5, 7, 11 – 13, 15] определения частот и форм собственных колебаний оболочек особое значение имеют надежные экспериментальные методы [3, 5, 6, 8 – 10, 12, 14], которые не только дают реальную картину поведения конструкций под действием динамических нагрузок, но и позволяют оценить границы применимости теоретических моделей.

Колебаниям оболочек с отверстиями посвящено сравнительно небольшое количество публикаций, обзор которых и полученные результаты приведены в [3 – 5, 7, 13]. В основном рассматривались гладкие шарнирно опертые оболочки с одним отверстием. Анализ данных исследований показывает, что для неоднородных оболочечных систем удается определить с приемлемой точностью только низшие частоты и

формы колебаний. На практике этого недостаточно, поскольку для тонкостенных конструкций, в силу их повышенной чувствительности к вибрациям и в связи с ростом динамичности действующих нагрузок, предусматривается определение более широкой части спектра собственных частот и форм. Для анализа амплитудных полей поверхностных перемещений и повышения достоверности результатов применительно к задачам резонансных колебаний неоднородных оболочек наиболее эффективными являются методы голографической интерферометрии [2, 3, 6, 8 – 10, 12, 14], которые продолжают развиваться и совершенствоваться, находят новые практические приложения.

Целью данной работы является разработка методики экспериментального исследования с помощью голографической интерферометрии амплитудно-частотных характеристик тонкостенных конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек с отверстиями, подкрепляющими ребрами, и анализ полученных результатов.

Изложение основного материала. Исследования резонансных колебаний проводились для консольно закрепленных тонкостенных цилиндрических оболочек, изготовленных из стали 20Х, с двумя диаметрально расположенными отверстиями 36×36 мм при $\theta_0 = 2\pi/3$ рад. Относительные геометрические характеристики моделей составляют: $L/R = 2,3$; $R/h = 115$; $R = 75$ мм, где R , L , h – радиус, длина и толщина оболочки, θ_0 – угол в радианах между центрами отверстий.

Собственные частоты и формы колебаний определялись в режиме резонансного возбуждения методом голографической интерферометрии, который при установившихся гармонических колебаниях позволяет регистрировать распределения виброперемещений поверхности оболочки при амплитуде порядка длины световой волны. Эксперименты выполнялись по методике, изложенной в [6, 12] на вибростенде, функциональная схема которого представлена на рис. 1. Оптическая схема вибростенда аналогична [12].

Модель оболочки 7 устанавливалась в специальном зажимном устройстве 6, реализующем необходимые условия закрепления контура. Гармонические колебания возбуждались контактным пьезоэлектрическим вибратором 8, жестко связанным с зажимным устройством. Частоты вынужденных колебаний регулировались в диапазоне 20...20000 Гц звуковым генератором 11 при варьировании силы тока переменной частоты в электрической цепи вибратора через низкочастотный вибросилитель 9. Для этого звуковой генератор формировал электрические синусоидальные импульсы перестраиваемой длительности с регулируемой задержкой.

Состояние резонанса определялось двухлучевым осциллографом 4, на горизонтальный вход которого подавались электрические сигналы со звукового генератора 11, а на вертикальный вход – электрические сигналы, генерируемые индукционным датчиком 5, пропорциональные величине амплитуды колебаний модели и совпадающие по фазе с ее

виброперемещениями. Частоты колебаний измерялись электронным частотомером 10 с точностью 1 Гц.

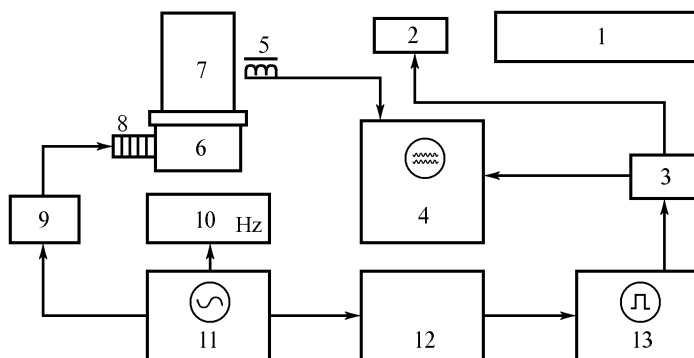


Рис. 1 – Функциональная схема вибростенда:

- 1 – гелий-неоновый оптический лазер; 2 – электрооптический модулятор;
- 3 – высокочастотный усилитель; 4 – двухлучевой осциллограф;
- 5 – индукционный датчик; 6 – зажимное устройство; 7 – модель оболочки;
- 8 – контактный вибратор; 9 – низкочастотный виброусилитель;
- 10 – частотомер; 11 – звуковой генератор; 12 – фазовращатель;
- 13 – импульсный генератор

Момент наступления резонанса также контролировался визуально по установившейся системе интерференционных полос при наблюдении колеблющейся модели через опорную голограмму в реальном времени, что исключало пропуски частот и форм резонансных колебаний. Формы колебаний, соответствующие резонансным частотам и характеризующиеся в окружающем направлении числом окружных волн n , а в осевом направлении совокупностью полуволн m , определялись с помощью осциллографа путем сканирования количества узловых линий между знакопеременными радиальными и продольными амплитудными прогибами оболочки при перемещении индукционного датчика 5 параллельно ее поверхности вдоль линий главных кривизн.

Интерферограммы резонансных форм колебаний регистрировались на заданной частоте методом голографической интерферометрии усреднения по времени с использованием двухлучевой оптической схемы [2, 3, 9, 14]. Наблюдаемые на фотоизображении интерференционные полосы указывают границы полей виброперемещений поверхности модели равных амплитуд пропорционально периоду времени существования каждого из них. Наружные светлые зоны соответствуют неподвижным участкам колеблющейся поверхности.

С целью повышения контрастности интерферограмм для последующей их расшифровки применялось стробирование генерируемого луча лазера 1 электрооптическим модулятором 2 [3, 6, 9, 12]. Для синхронизации стробоимпульсов с определенной фазой колебаний оболочки

электрический сигнал звукового генератора 11 через фазовращатель 12 поступал на импульсный генератор 13, генерирующий прямоугольные импульсы, и после усиления высокочастотным усилителем 3 подавался на электрооптический модулятор 2. Частота стробирования задавалась кратной частоте колебаний модели. Контроль синхронизации стробоимпульсов с частотой колебаний модели осуществлялся двухлучевым осциллографом 4. Уровень возбуждения подбирался таким, чтобы амплитудные прогибы не превышали $1/20$ толщины оболочки и обеспечивалась нормальная разрешимость интерференционных полос на интерферограммах.

Результаты исследований. С использованием изложенной методики голографической интерферометрии выполнено исследование влияния квадратных вырезов и подкрепляющих элементов на нижний и средний диапазоны спектра частот и форм резонансных колебаний консольно закрепленных цилиндрических оболочек.

Зависимость нижней части спектра частот f от волновых чисел n при фиксированном значении $m = 1$ для исследуемых моделей с двумя центральными отверстиями, расположенными симметрично относительно торцов, приведена на рис. 2, где f – частота колебаний; n – количество волн в окружном направлении; m – количество полуволн вдоль образующей.

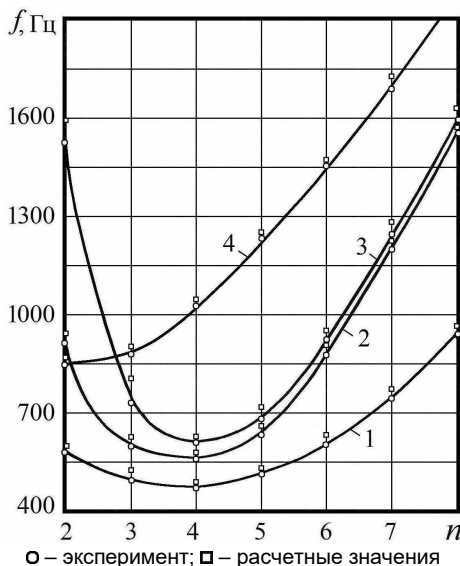


Рис. 2 – Зависимость частот собственных колебаний от волновых чисел n

Кривая 1 соответствует сплошной оболочке без вырезов, кривая 2 – оболочке с двумя квадратными отверстиями 36×36 мм со свободными кромками, кривая 3 – оболочке с подкрепленными кромками отверстий ребрами прямоугольного сечения 4×1 мм, кривая 4 – оболочке с подкрепленными отверстиями и шпангоутом 7×1 мм в верхнем торце. Численные значения частот определялись методом конечных элементов [7]. При этом отверстия, как всякая неоднородность, вызывают расщепление спектра собственных колебаний, полученных в результате расчетов, на парные частоты, для которых формы колебаний совпадают по общей изменяемости, но сдвинуты одна относительно другой в окружном направлении на угол $\varphi = \pi/2n$. Большинство форм колебаний нижней части спектра представляет собой простые формы, то есть описываются соответственно функциями $\cos(nx)$ или $\sin(nx)$, за исключением окрестности отверстия.

Из приведенных результатов видно, что отверстия со свободными кромками даже сравнительно небольших размеров приводят к понижению спектра частот, и особенно низшей частоты. При этом частоты располагаются настолько плотно, что формы колебаний при незначительном плавном изменении частоты переходят одна в другую и происходит наложение различных формообразований.

Подкрепление контуров отверстий увеличивает локальную жесткость конструкции и приводит к повышению спектра частот колебаний до значений, соответствующих однородным сплошным оболочкам. При этом плотность нижней части спектра снижается, а также уменьшаются амплитуды виброперемещений вдоль контуров отверстий.

При подкреплении верхнего торца оболочки шпангоутом влияние вырезов на частоты колебаний сказывается значительно меньше.

Интерферограммы характерных низших резонансных форм колебаний исследуемых оболочек представлены на рис. 3.

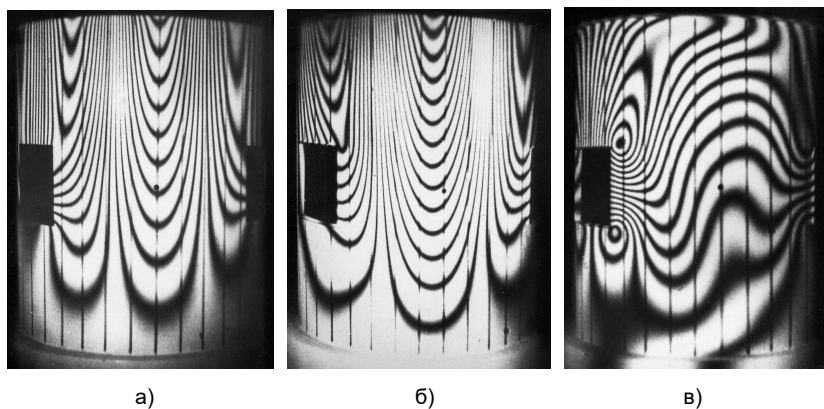


Рис. 3 – Низшие резонансные формы колебаний оболочек с отверстиями

Особенностью приведенных формообразований является локальная концентрация узловых линий в окрестности отверстий. Это хорошо видно на интерферограмме основной формы колебаний ($n = 4$) оболочки с неподкрепленными отверстиями на низшей частоте 465 Гц (рис. 3,а). На представленном изображении четко выделяются колебания верхней части модели и в углах отверстий, которые являются концентраторами напряжений. Амплитуды колебаний узловых линий равны нулю, а точки поверхности, расположенные по обеим сторонам узловых линий, совершают колебания в противофазе. Данное формообразование отличается от низшей формы колебаний сплошной однородной оболочки [12] и характеризуется локализацией перемещений поверхности в области вырезов. Наибольшие прогибы образуются вдоль кромок отверстия, что согласуется с результатами, полученными для оболочек с различными профилями отверстий [3, 7]. Формы колебаний при удалении от отверстия носят регулярный характер, свойственный оболочкам без вырезов. Понижение низшей собственной частоты вызвано локальными колебаниями участков поверхности у краев отверстия. На средних частотах и в верхней части спектра образуются сложные формы колебаний, характерной особенностью которых является повышенная изменчивость перемещений поверхности модели в зоне расположения отверстия. Экспериментальные результаты, в отличие от расчетных, не содержат сопряженных форм.

Подкрепление контуров отверстий ребрами локализует амплитуды полей виброперемещений. Низшая форма колебаний оболочки с частотой 517 Гц ($n = 4$) представлена на рис. 3,б.

Интерферограмма основной формы колебаний оболочки с подкрепленными контурами отверстий и шпангоутом, расположенным в верхнем торце, приведена на рис.3,в. На ней наблюдается характерная структура прогибов поверхности. Оболочка колеблется на частоте 848 Гц с волновыми числами $n = 2$ и $m = 1$. Влияние отверстий на формообразование более локализовано.

Анализ полученных результатов показывает, что отверстия создают локальную инерционную неоднородность оболочечных конструкций, оказывая существенное влияние на их основные динамические характеристики, распределение внутренних напряжений и деформаций, что вызывает необходимость осуществления мероприятий по отстройке от нежелательных резонансов. При подкреплении отверстий и оболочек ребрами жесткости резонансные частоты значительно возрастают, а волновые числа в окружном направлении уменьшаются, внося локальные искажения в амплитудные поля виброперемещений поверхности и изменяя формы колебаний, что подтверждается результатами [7].

Полученные результаты в целом соответствуют известным экспериментальным и теоретическим данным для неподкрепленных оболочек [3, 4]. Характеристики резонансных колебаний, полученные экспериментально (рис. 2), достаточно хорошо согласуются с результатами расчета конструкции методом конечных элементов. Расчетные и экспе-

риментальные значения собственных частот для большинства форм колебаний отличаются меньше чем на 6%, а сами формы, включая высокочастотные, совпадают по параметру n .

Выводы. Разработан эффективный подход к исследованию резонансных колебаний тонкостенных оболочечных конструкций с помощью голографической интерферометрии. Получены новые экспериментальные результаты, характеризующие влияние отверстий и подкрепляющих ребер на собственные частоты и формы колебаний конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек вращения. Результаты работы могут быть полезными при разработке новых расчетных моделей для модального анализа неоднородных оболочек с отверстиями.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Басов К.А.** ANSYS: Справочник пользователя. М.: ДМК Пресс, 2005. 640 с.
2. **Вест Ч.** Голографическая интерферометрия. М.: Мир, 1982. 504 с.
3. **Гудрамович В.С., Дзюба А.П., Селиванов Ю.М.** Методы голографической интерферометрии в механике неоднородных тонкостенных конструкций: монография. Д.: Лира, 2017. 288 с.
4. **Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н.** Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / Методы расчета оболочек: в 5 т. Т.1. К.: Наукова думка, 1980. 636 с.
5. **Заруцкий В.А.** О комплексных экспериментальных исследованиях устойчивости и колебаний конструктивно-неоднородных оболочек // Прикл. механика. 2001. Т. 37, № 8. С. 38–67.
6. **Каиров А.С., Латанская Л.А., Каиров В.А.** Экспериментальное исследование свободных колебаний подкрепленных цилиндрических оболочек с присоединенными твердыми телами // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Д.: ІМА-прес, 2009. Вип 13. С. 107–113.
7. **Каиров А.С., Латанская Л.А., Каиров В.А.** Собственные колебания ребристых цилиндрических оболочек с отверстиями // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Д.: Лира, 2019. Вип. 30. С. 96–104.
8. **Ларіонова О.О., Рожковський В.Ф., Сохач Ю.В.** Голографічні технології в авіаційно-космічній техніці: навч. посіб./ під ред. В. П. Малайчука. Д.: ДНУ, 2003. 272 с.
9. **Островский Ю.И., Щепинов В.П., Яковлев В.В.** Голографические интерференционные методы измерения деформаций. М.: Наука, 1988. 248 с.
10. Экспериментальная механика: в 2 кн. Кн.1 / под. ред. А. Кабаяси; пер. с англ. М.: Мир, 1990. 616 с.
11. **Bathe K.J.** Numerical methods in finite element analysis. Englewood Cliffs: Prentice-Hall. 2006. 564 p.
12. **Kairov A.S., Zolotoi Y.G.** Determination of the vibration displacements and stresses in the vibrations of structurally inhomogeneous shells using the method of holographic interferometry // Jour. of mathematical sciences. 1998. Vol. 92, No. 5. P. 4193–4195.
13. **Kairov A.S.** Effect of holes of the eigenmodes of reinforced shells of rotations // Journal of Mathematical Sciences. 2001. Vol. 103, No. 3. P. 393–397.
14. **Kreis T.** Handbook of Holographic Interferometry: Optical and Digital Methods. New York: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co, 2005. 542 p.
15. **Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.** The finite element method for solid and structural mechanics. New York: Elsevier, 2005. 632 p.

О. С. Каіров, д-р техн. наук, Л. О. Латанська, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Каіров, канд. техн. наук

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАНЬ НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ОТВОРАМИ МЕТОДОМ ГОЛОГРАФІЧНОЇ ІНТЕРФЕРОМЕТРІЇ

Наведено результати експериментальних досліджень частот і форм власних коливань неоднорідних циліндричних оболонок з отворами. Дослідження виконані методом голографічної інтерферометрії. Встановлено вплив отворів та інших конструктивних особливостей на основні динамічні характеристики оболонок. Описана методика проведення експерименту. Експериментальні дані порівнюються з числовими результатами, отриманими методом скінченних елементів.

Ключові слова: циліндрична неоднорідна оболонка; власні коливання; отвори; підкріплюючі ребра; голографічна інтерферометрія; метод скінченних елементів.

Тонкостінні оболонкові елементи конструкцій широко використовуються у сучасній техніці, що викликає необхідність дослідження їх резонансних коливань і визначає актуальність даної задачі. Наявність отворів та інших конструктивних неоднорідностей оказує істотний вплив на амплітудно-частотні характеристики оболонок, які відрізняються неоднорідними полями розподілу напружень, деформацій і переміщень поверхні, складністю і різноманіттям форм коливань.

Разом з чисельно-аналітичними методами [1, 4, 5, 7, 11 – 13, 15] визначення частот і форм власних коливань особливе значення мають надійні експериментальні методи [3, 5, 6, 8 – 10, 12, 14], які не тільки дають реальну картину поведінки конструкцій під дією динамічних навантажень, але і дозволяють оцінити межі застосовності теоретичних моделей.

Коливанням оболонок з отворами присвячено порівняно невелика кількість публікацій, огляд яких та отримані результати наведені в [3 – 5, 7, 13]. В основному розглядалися гладкі шарнірно обперті оболонки з одним отвором. Аналіз досліджень показує, що для неоднорідних оболонкових систем вдається визначити з прийнятною точністю тільки нижчі частоти і форми коливань. Для аналізу амплітудних полів поверхневих переміщень і підвищення достовірності результатів стосовно до задач резонансних коливань неоднорідних оболонок найбільш ефективними є методи голографічної інтерферометрії [2, 3, 6, 8 – 10, 12, 14], які продовжують розвиватися і вдосконалюватися, знаходять нові практичні застосування.

Метою даної роботи є розробка методики експериментального дослідження за допомогою голографічної інтерферометрії амплітудно-частотних характеристик тонкостінних конструктивно неоднорідних циліндричних оболонок з отворами, підкріплювальними ребрами та аналіз отриманих результатів.

A. S. Kairov, Dr. Sci. (Tech.), L. A. Latanskaya, PhD (Phys.-Math),
V. A. Kairov, PhD (Tech.)

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF RESONANT VIBRATIONS OF NON-HOMOGENEOUS CYLINDRICAL SHELLS WITH HOLES BY HOLOGRAPHIC INTERFEROMETRY

The results of the experimental studies of natural frequencies and waveforms of natural vibrations of non-homogeneous cylindrical shells with holes are presented. The investigations have been carried out by holographic interferometry method. The influence of holes and other design features on the main dynamic characteristics of shells is established. The method of conducting the experiment is described. The experimental data are compared with the numerical results obtained by the finite element method.

Keywords: *non-homogeneous cylindrical shell; free vibrations; holes; reinforced ribs; holographic interferometry; finite element method.*

The non-homogeneous shells constructions with cutouts are widespread in modern technique. Therefore, the problems which deal with resonant vibrations of the structurally non-homogeneous shells are very relevant actual. To determine the amplitude-frequency characteristics, together with numerical and analytical methods, experimental methods are used, which are of particular importance. They give a real picture of the behavior of thin-walled constructions under the influence of dynamic loads and allow us to assess the limits of applicability of computational models.

Relatively few publications are devoted to the vibrations of shells with holes, a review of which and the results obtained are given in [3–5, 10]. Analysis of the research data shows that for non-homogeneous shell systems it is possible to determine with acceptable accuracy only the lowest frequencies and forms of natural vibrations. In practice, this is not enough, since it is necessary to know a wider part of the spectrum of natural frequencies and waveforms. Holographic interferometry methods [2, 3, 6–8, 11] are the most effective for analyzing the amplitude fields of displacements due to their high accuracy and increasing the reliability of the results of resonant vibrations.

The main aim of this work is to investigate the natural frequencies and waveforms of vibration of the cylindrical shell with holes and stiffening ribs by holographic interferometry and to compare the results obtained with the calculations performed.

The investigations were performed by holographic interferometry method. The method of conducting the experiment is developed. The interference patterns of the waveforms of the research object and new dependences of the influence of its structural non-homogeneity on the resonant vibrations were obtained. It is found that the presence of cutouts, reinforcing ribs and their discrete arrangement create a local inertial inhomogeneity and significantly affect the amplitude-frequency characteristics of the structure. Such dependencies have a great practical value. The experimental data are compared with the numerical results obtained by the finite element method and show good convergence.

REFERENCES

1. **Basov K. A.** ANSIS: User reference. Moscow: DMK Press, 2005. 640 p. (in Russian).
2. **West Ch.** Holographic Interferometry. Moscow: Mir, 1982. 504 p. (in Russian).
3. **Gudramovych V. S., Dzyuba A. P., Selivanov Yu. M.** Methods of holographic interferometry in the mechanics of heterogeneous thin-walled structures. Dnepr: Lyra, 2017. 288 p. (in Russian).
4. **Guz A. N., Chernyshenko I. S., Chekhov V. N.** Theory of thin shells weakened by holes / Methods of calculation of shells: In 5 vol. Vol.1. Kyiv: Naukova dumka, 1980. 636 p. (in Russian).
5. **Zarutckiy V. A.** The constructional non-homogeneous shells stability and oscillations experimental complex // Applied mechanics. 2001. Vol. 37, № 8. P.38–67. (in Russian).
6. **Kairov A. S., Latanskaya L. A., Kairov V. A.** Experimental study of free vibrations of the reinforced cylindrical shells with attached solid bodies // Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures: Col. of sci. art. 2009. Vol. 13. P. 107–113. (in Russian).
7. **Kairov A. S., Latanskaya L. A., Kairov V. A.** Natural vibrations of ribbed cylindrical shells with cutouts // Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures: Col. of sci. art. 2019. Vol. 30. P. 96–104. (in Russian).
8. **Larionova O. O., Rozhkovsky V. F., Sohach Yu. V.** Holographic technologies in aerospace engineering: textbook. Tool / Ed. V. P. Malaychuk. Dnepropetrovsk: RVV DNU, 2003. 272 p. (in Ukrainian).
9. **Ostrovsky Yu. I., Shchepinov V. P., Yakovlev V. V.** Holographic interference methods of deformation measurement. Moscow: Nauka. 248. p. (in Russian).
10. Experimental mechanics: In 2 vol. Vol.1 / Ed. A. Kabayashi. Moscow: Mir, 1990. 616 p. (in Russian)
11. **Bathe K. J.** Numerical methods in finite element analysis. Englewood Cliffs: Prentice-Hall. 2006. 564 p.
12. **Kairov A. S., Zolotoi Y. G.** Determination of the vibration displacements and stresses in the vibrations of structurally inhomogeneous shells using the method of holographic interferometry // Jour. of mathematical sciences. 1998. Vol. 92, No. 5. P. 4193–4195.
13. **Kairov A. S.** Effect of holes of the eigenmodes of reinforced shells of rotations // Journal of Mathematical Sciences. 2001. Vol. 103, No. 3. P. 393–397.
14. **Kreis T.** Handbook of Holographic Interferometry: Optical and Digital Methods. New York: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co, 2005. 542 p.
15. **Zienkiewicz O. C., Teylor R. L.** The finite element method for solid and structural mechanics. New York: Elsevier, 2005. 632 p.

*Національний університет
кораблебудування імені адмірала Макарова
Николаев, Україна*

Надійшла до редколегії 19.10.2020

DOI 10.15421/4220015
УДК 539.3

О. В. Михайл, В. В. Лобода, д-р фіз.-мат. наук

ПРО СПОСІБ ЗНАХОДЖЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РУЙНУВАННЯ ДЛЯ ТРІЩИН МІЖ ДВОМА МАТЕРІАЛАМИ

Запропонована модель для визначення параметрів руйнування тріщини зсуву, що виникає біля кутових точок області, складеної із двох різнорідних прямокутників різного розміру. Модель основана на введенні зон пластичності на продовженні тріщини та знаходженні локальної та глобальної складових швидкості звільнення енергії. Комбінація цих складових дозволяє без знаходження довжини пластичної зони знайти необхідний критичний параметр, що визначає розвиток тріщини. Підтвердження запропонованої методики продемонстровано шляхом застосування аналогічної моделі для тріщини типу I в однорідному матеріалі.

Ключові слова: біматеріал, тріщина між двома матеріалами; зона передруйнування.

Вступ. Дослідження внутрішніх та міжфазних тріщин є першочергово важливими для практики, оскільки такі дефекти часто є причиною механічних руйнувань конструкцій. Існує кілька критеріїв руйнування, що визначають можливість розвитку тріщини, серед яких відзначимо енергетичний критерій Гріффітса [6] та деформаційний критерій Леонова – Панасюка – Дагдейла [2, 4]. Детальне обговорення деформаційного критерію проведено в [3], а для тріщини між двома матеріалами можливості його використання проаналізовані в [1]. Реалізація енергетичного критерію для тіл скінченних розмірів зараз найчастіше проводиться з використанням інваріантного інтеграла Черепанова – Райса та методу скінченних елементів (МСЕ). В даній роботі продемонстровано спільне використання вказаних вище критеріїв та вказані способи знаходження швидкості звільнення енергії з їх використанням.

Тріщина типу I. Для ілюстрації методики, що пропонується, розглянемо модель, аналогічну до моделі Леонова – Панасюка – Дагдейла [2, 4], яка була розвинута при дослідженні плоского напруженого стану тонкої пластини з тріщиною. Відомо, що в цьому випадку на продовженнях тріщини розвиваються тонкі зони пластичності і значить фактично задача стає пружно-пластичною. Але метод, запропонований в [2, 4] дозволяє звести пружно-пластичну задачу до задачі лінійної механіки руйнування з невідомою довжиною зони ослаблених міжчастинних зв'язків (передруйнування), якою моделюється зона пластичності.

Для опису цієї моделі, розглянемо спочатку нескінченну однорідну ізотропну пластину послаблену ізольованою прямолінійною тріщиною

$2l_0$ (рис. 1). Нехай у нескінченно віддалених точках пластини прикладені зовнішні розтягувальні напруження p , направлені перпендикулярно до лінії розміщення тріщини.

Віднесемо цю пластину до прямокутної системи декартових координат xOy , вважаючи, що товщина пластини дорівнює одиниці, а тріщина розташована вздовж осі x на відрізку $|x| \leq l_0$ (рис. 1). Зазначимо, що якими б малими не були напруження p , в околі кінців реальної тріщини напруження $\sigma_y(x, 0)$, визначені методами лінійної теорії пружності, перевищують межі крихкої міцності матеріалу, тобто в цій частині тіла виникають області послаблених зв'язків. З симетрії задачі та властивостей δ_c -моделі [3], ці області можна розглядати як розрізи вздовж осі x при $l_0 \leq |x| \leq l$, протилежні береги яких притягуються з напруженням σ_0 . Значення параметра l є невідомим.

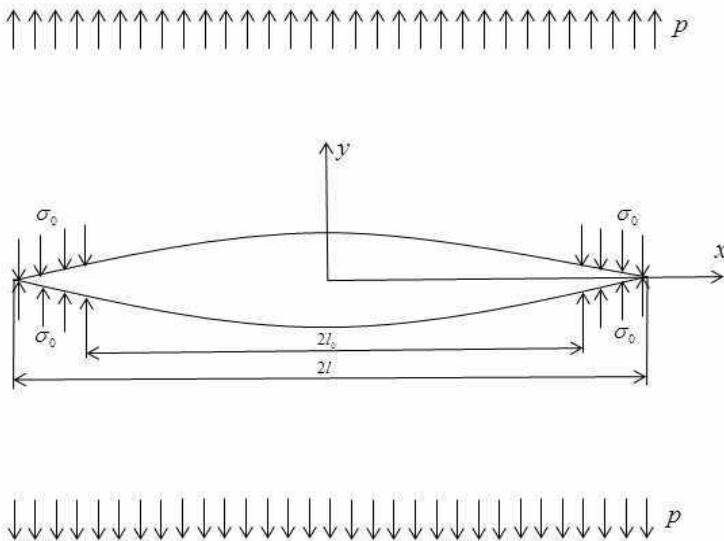


Рис. 1 — Тріщина в однорідному матеріалі з областями послаблених міжчастинних зв'язків

Таким чином, задача про напружено-деформований стан в пластині з тріщиною зводиться до наступної задачі математичної теорії пружності. В пружній площині xOy (рис. 1) маємо розріз довжиною $2l$ ($-l \leq x \leq l$). На поверхні цього розрізу діє напруження

$$\tau_{xy}(x,0)=0; \quad \sigma_y(x,0)=\begin{cases} 0, & |x| \leq l_0; \\ \sigma_0, & l_0 \leq |x| \leq l, \end{cases} \quad (1)$$

а в нескінченно віддалених точках площини $\sigma_y(x,\infty)=p$. Віднімаючи від напруженого стану, який при цьому виникає, однорідний напружений стан $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$, $\sigma_y(x,y)=p$, отримаємо деякий допоміжний напружений стан, зникаючий на нескінченості. На поверхні розрізу цей стан визначається граничними умовами

$$\tau_{xy}(x,0)=0; \quad \sigma_y(x,0)=\begin{cases} -p, & |x| \leq l_0; \\ \sigma_0 - p, & l_0 \leq |x| \leq l, \end{cases} \quad (2)$$

а на нескінченності всі компоненти допоміжного напруженого стану прямують до нуля.

Розв'язок сформульованої задачі лінійної механіки руйнування наведений в [2, 3]. Зокрема, переміщення верхнього берега тріщини та нормальне напруження на її продовженні визначаються формулами

$$v(x,0)=2\pi p\sqrt{l^2-x^2}+c\sigma_0 \times \\ \times \left\{ (x-l_0)\Gamma(l,x,l_0)-(x+l_0)\Gamma(l,x,-l_0)-4\sqrt{l^2-x^2} \arccos \frac{l_0}{l} \right\}, \quad (3) \\ |x| \leq l;$$

$$\sigma_y(x,0)=\frac{1}{\pi\sqrt{x^2-l^2}} \left\{ \pi(p-\sigma_0)(x-\sqrt{x^2-l^2})+2\sigma_0 x \arcsin \frac{l_0}{l} + \right. \\ \left. + \sigma_0 \sqrt{x^2-l^2} \times \left[\arcsin \frac{l^2-xl}{l(x-l_0)} - \arcsin \frac{l^2+xl}{l(x+l_0)} \right] \right\}, \quad |x| \geq l, \quad (4)$$

де

$$c=\frac{1}{\pi E}, \quad \Gamma(l,x,\xi)=\ln \frac{l^2-x\xi-\sqrt{(l^2-x^2)(l^2-\xi^2)}}{l^2-x\xi+\sqrt{(l^2-x^2)(l^2-\xi^2)}} \quad (|x| \leq l) \quad (5)$$

На основі формули (4) коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН)

$$K_I = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x_1-l_0)} \sigma_y(x_1,0)$$

визначається формулою

$$K_I = \sqrt{\pi l} \left(p - \frac{2\sigma_0}{\pi} \arccos \frac{l_0}{l} \right), \quad (6)$$

а на основі формули (3) переміщення верхнього берега тріщини в її початковій вершині наступне

$$v(l_0, 0) = 2\pi c p \sqrt{l^2 - l_0^2} + c\sigma_0 \left\{ -2l_0 \Gamma(l, x, -l_0) - 4\sqrt{l^2 - x^2} \arccos \frac{l_0}{l} \right\},$$

що після перетворень приводить до виразу

$$v(l_0, 0) = 2c \left\{ \pi \sqrt{l^2 - l_0^2} \left(p - \frac{2\sigma_0}{\pi} \arccos \frac{l_0}{l} \right) - 2l_0 \sigma_0 \ln \frac{l_0}{l} \right\}. \quad (7)$$

Враховуючи, що при $x \rightarrow l + 0$

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi(x-l)}} = \left(p - \frac{2\sigma_0}{\pi} \arccos \frac{l_0}{l} \right) \sqrt{\frac{l}{2(x-l)}},$$

а при $x \rightarrow l - 0$

$$v'(x, 0) = 2c \left(2\sigma_0 \arccos \frac{l_0}{l} - \pi p \right) \sqrt{\frac{l}{2(l-x)}},$$

одержуємо, що швидкість звільнення енергії (ШЗЕ), пов'язаної з КІН K_1 визначається формулою:

$$G_1 = \pi c K_1^2.$$

Згідно з термінологією роботи [5] ця складова називається локальною ШЗЕ. Складова ж ШЗЕ, що пов'язана з напруженням σ_0 , наступна:

$$G_2 = 2\sigma_0 v(l_0, 0) = 4c\sigma_0 \sqrt{\pi \frac{l^2 - l_0^2}{l}} K_1 - 8cl_0 \sigma_0^2 \ln \frac{l_0}{l}.$$

Ця ШЗЕ визначається роботою, виконаною напруженням σ_0 при розриві матеріалу на проміжку (l_0, l) . Згідно з [5] ця складова називається глобальною ШЗЕ.

Повна величина ШЗЕ визначається формулою:

$$G = G_1 + G_2. \quad (8)$$

Напруження $\sigma_y(x, 0)$, представлені формулою (4), при довільному значенні параметру l є необмеженим, якщо $x \rightarrow l$. Але вважаючи, що $x = l$ і прирівнюючи отриманий в цьому випадку вираз в фігурних дужках (4) до нуля, отримуємо наступну формули для визначення параметра l_* , при якому $\sigma_y(x, 0)$ є обмеженим:

$$l_* = l_0 \sec \frac{p\pi}{2\sigma_0}. \quad (9)$$

В табл.1 наведені значення G_1 , G_2 та G , отримані для різних значень l , що вибирались з проміжку $[l_0, l_*]$, при $l_0 = 1\text{ м}$, $p = 10^6\text{ Па}$, $\sigma_0 = 20\text{ п}$. В цьому випадку $l_* = 1.00309\text{ м}$, $G = G_1 = 157.24\text{ Н/м}$ при $l = l_0$ і $G = G_2 = 157.08\text{ Н/м}$ при $l = l_*$.

Таблиця 1 – Зміна локальної та глобальної ШЗЕ
при $l_0 = 1\text{ м}$, $p = 10^6\text{ Па}$, $\sigma_0 = 20\text{ п}$ та різних положеннях точки $l \in [l_0, l_*]$

$10^3(l-l_0)/l_0$	$G_1, \text{ Н/м}$	$G_2, \text{ Н/м}$	$G, \text{ Н/м}$
0	157.08	0	157.08
0.31	73.3857	83.7322	157.118
0.62	47.949	109.199	157.148
0.93	32.091	125.081	157.172
1.24	21.189	136.002	157.192
1.55	13.4543	143.754	157.208
1.86	7.96726	149.253	157.22
2.16	4.18337	153.046	157.23
2.47	1.74744	155.489	157.236
2.78	0.412837	156.827	157.24
3.09	0	157.241	157.241

Як видно з табл. 1 значення G , отримані для значень l , що знаходяться в проміжку $[l_0, l_*]$ практично не відрізняються від значень G в крайніх точках вказаного відрізка, тобто G є практично інваріантним по відношенню до положення точки l .

Слід також відзначити, що для різних значень σ_0 величини l_* , що визначаються формулою (9), також будуть різними, але величина $G_2 = 2\sigma_0\delta_2$, де $\delta_2 = 2\nu(l_0, 0)$, є глобальною ШЗЕ і є величиною постійною. Вона дорівнює локальній ШЗЕ для відповідної тріщини Гріффітса.

Зсувна тріщина. Аналогічний аналіз можна провести для тріщини, при деформації якої визначальними є зсувні напруження. Розглянемо для цього задачу, схема якої зображена на рис. 2. Тобто має місце контакт двох ізотропних прямокутників з механічними характеристиками E_1, ν_1 (верхній) і E_2, ν_2 (нижній). Нижній прямокутник жорстко закріплений знизу, а на сторони верхнього діють нормальні напруження q_1 і q_2 . Вважається, що на частинах $a < |x| < b$ інтерфейсу виникло розшарування, тобто утворились тріщини, які при $q_1 < 0$ відносяться до зсувного

типу. Таке розшарування може виникати у зв'язку з високою концентрацією напружень у кутових точках з'єднання, що розглядається.

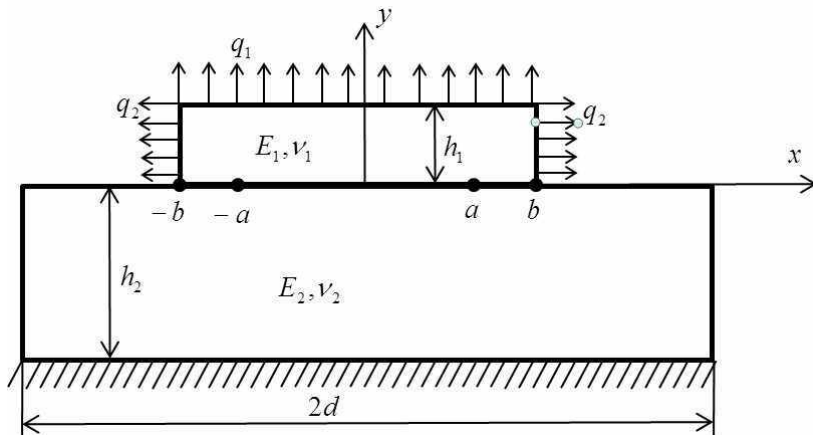


Рис. 2 – Біматеріальна область з тріщинами зсуву біля кутових точок

Застосуємо для аналізу цих тріщин модель, аналогічну моделі Леонова – Панасюка – Дагдейла, але в її зсувному варіанті. Введемо на продовженнях тріщин $-c < x < a$ зони пластичності. Ці зони будемо моделювати розрізами, в яких діють зсувні напруження величини τ_0 . Положення точок $-c$ і c вибирається довільним (Рис. 3).

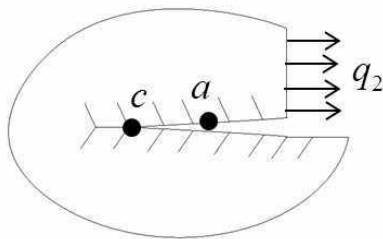


Рис.3 – Конфігурація привершинної зони тріщини

Розв'язок цієї задачі будемо розшукувати методом скінченних елементів. На рис. 4 показана скінченно-елементна сітка, яка згущується при підході до вершин тріщин (рис. 5). Для аналізу використані восьми-вузлові елементи.

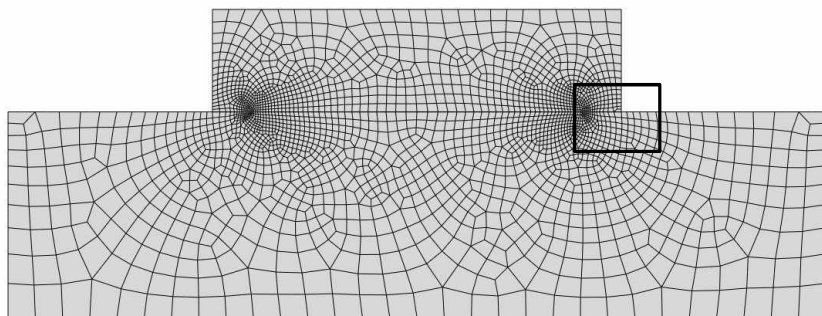


Рис. 4 – Розбиття області на скінченні елементи

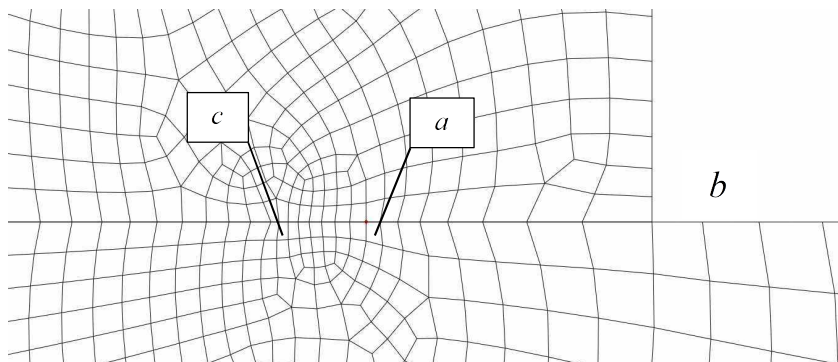


Рис. 5 – Скінченно-елементна сітка в околі вершини тріщини

Вибирались $d=0,20$ м; $b=0,1$ м; $a=0,085$ м; $c=0,08$ м; $h_1 = 0,02$ м;
 $h_2 = 0,04$ м; $E_1 = 10^9$ Н / м²; $\nu_1 = 0,3$; $E_2 = 10^{12}$ Н / м²; $\nu_2 = 0,3$;
 $q_1 = -2 \times 10^5$ Н / м²; $q_2 = 5 \times 10^5$ Н / м².

Значення τ_0 варіювалось. Обчислювались значення інваріантного інтегралу J в новій вершині тріщини (с,0), горизонтальне переміщення $u_1(a,0)$ початкової вершини тріщини, значення глобальної ШЗЕ $G_{gl} = \tau_0 u(a,0)$, а також сумарне значення ШЗЕ

$$G = J + G_{gl} . \quad (9)$$

Результати розрахунків наведені у табл. 2.

Таблиця 2 – Значення J -інтегралу в новій вершині тріщини, переміщення $u_1(a, 0)$, глобальної ШЗЕ $G_{gl} = \tau_0 u(a, 0)$ та сумарної ШЗЕ G для різних значень τ_0 .

$10^{-4} \tau_0$, H / M^2	0	20	40	60	75	90	102
J , H / M	5,36	3,40	1,91	0,89	0,45	0,27	≈ 0
$10 \cdot u_1(a, 0)$, М		9,69	8,47	7,25	6,34	5,43	5,11
G_{gl} , H / M	0	1,93	3,39	4,35	4,76	4,88	5,22
G , H / M	5,36	5,33	5,30	5,24	5,21	5,16	5,22

З результатів табл. 2 видно, що сумарне значення ШЗЕ є практично незалежним від величини τ_0 (максимальна розбіжність значень складає 2,6%). Зокрема, при $\tau_0 = 1,02 \times 10^6 \text{ H / M}^2$ локальна ШЗЕ в точці а обертається в нуль, тобто напруження в цій точці стає скінченним, а значення глобальної ШЗЕ добре узгоджується з відповідним значенням локальної ШЗЕ при відсутності пластичної зони. Отримане значення τ_0 являє собою межу текучості такого матеріалу інтерфейсу на зсув, для якого при вибраному значенні s напруження в цій точці є скінченним. Проведений аналіз показує, що при використанні запропонованої моделі не обов'язково заздалегідь визначати положення точки s , а достатньо для кожного конкретного τ_0 і s визначити J і G_{gl} . Сума цих величин з високим ступенем точності буде рівна ШЗЕ для заданої тріщини.

Висновки. Для тріщини типу I в однорідному матеріалі розглянуті зони ослаблених міжчастинних зв'язків на продовженнях тріщини довільної довжини. Обчислено локальну та глобальну швидкості звільнення енергії. Для конкретного матеріалу та зовнішнього навантаження показано, що сума цих значень практично не змінюється. Розглянуто також тріщину зсуву, що виникає біля кутових точок області, складеної із двох різнорідних прямокутників різного розміру. Введенні зони пластичності на продовженні тріщини та знайдені локальна і глобальна складові швидкості звільнення енергії для різних значень зсувного напруження в цих зонах, величина якого визначається характеристиками адгезійного шару. Показано, що комбінація складових швидкості звільнення енергії дозволяє без знаходження довжини пластичної зони знайти необхідний критичний параметр, який визначає можливість розвитку тріщини.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А. О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред, // Прикл. механика. 1999. Т. 35. № 1. С. 63–68.

2. **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Розвиток найдрібніших тріщин в твердому тілі // Прикл. механіка. 1959. Т. 5. С. 391–401.
3. **Панасюк В. В.** Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. К.: Наука думка, 1968. 248 с.
4. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. 1960. Vol. 8. No 2. P. 100–104.
5. **Gao, H., Zhang, T.Y., Tong, P.,** Local and global energy release rates for an electrically yielded crack in a piezoelectric ceramic // J. Mech. and Phys. 1997. Solids 45. P. 491–510.
6. **Griffith A. A.** The phenomenon of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. 1920. Vol. A221. P. 163–198.

УДК 539.3

А. В. Михаил, В. В. Лобода, д-р физ.-мат. наук
**О СПОСОБЕ НАХОЖДЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ РАЗРУШЕНИЯ
 ДЛЯ ТРЕЩИН МЕЖДУ ДВУМЯ МАТЕРИАЛАМИ**

Предложена модель для определения параметров разрушения трещины сдвига, которая возникает возле угловых точек области, составленной из двух разнородных прямоугольников разного размера. Модель основана на введении зон пластичности на продолжении трещины и нахождении локальной и глобальной составляющих скорости освобождения энергии. Комбинация этих составляющих позволяет без нахождения длины пластической зоны найти необходимый критический параметр, определяющий развитие трещины. Подтверждение предложенной методики продемонстрировано путем применения аналогичной модели для трещины типа I в однородном материале.

Ключевые слова: биматериал; трещина между двумя материалами; зона предразрушения.

UDC 539.3

O. V. Mikhail, V. V. Loboda, Dr. Sci. (Phys.-Math.)
**ON THE WAY
 OF THE FRACTURE PARAMETERS DETERMINATION
 FOR CRACKS BETWEEN TWO MATERIALS**

A model is proposed to determine the parameters of shear crack failure that occurs near the corner points of an area composed of two dissimilar rectangles of different sizes. The model is based on the introduction of zones of plasticity on the continuation of the crack and finding the local and global components of the energy release rate. The combination of these components allows to find the necessary critical parameter that determines the development of the crack without finding the length of the plastic zone. Confirmation of the proposed technique is demonstrated by applying a similar model for type I cracks in a homogeneous material.

Keywords: biomaterial; crack between two materials; pre-fracture zone.

Introduction. Investigations of internal and interfacial cracks are of paramount importance for practice, as such defects are often the cause of me-

chanical failure of structures. There are several failure criteria that determine the possibility of crack development, among which we note the Griffiths energy criterion [5] and the Leonov – Panasyuk – Dagdale deformation criterion [1, 2]. A detailed discussion of the deformation criterion was conducted in [3], and for the gap between two materials, the possibilities of its use were analyzed in [4]. The realization of the energy criterion for bodies of finite dimensions is now most often carried out using the invariant Cherepanov-Rice integral and the finite element method (FEM). This paper demonstrates the joint use of the above criteria and the methods of finding the energy release rate by using them.

The crack mode I. A crack $|x| \leq l_0, y = 0$ in an infinite homogeneous isotropic plate under remote external tensile stresses is considered in this section. The zones $l_0 \leq |x| \leq l$ of weakened interparticular links with prescribed normal stresses in these zones are introduced at the crack continuations. Analytical solution of the correspondent problem is found for any value of l and local and global energy release rates are found. The variation of these energy release rates with respect to l is analyzed and the results are presented in table form.

Sliding crack. A similar analysis was performed for a crack, the deformation of which is determined mostly by shear stresses. The contact of two isotropic rectangles with mechanical characteristics E_1, ν_1 (upper one) and E_2, ν_2 (lower) is considered. The lower rectangle is rigidly fixed by the lower side, and normal stresses q_1 and q_2 act on the sides of the upper one. It is believed that stratification occurred on parts $a < |x| < b$ of the interface, i.e., the cracks were formed, which for $q_1 < 0$ belong to the shear type. We use a model similar to the Leonov – Panasyuk – Dagdale model for the analysis of these cracks, but in its shear version. We enter the plasticity zones on extensions $c < |x| < a$ of the cracks. These zones will be modeled by sections in which shear stresses of magnitude τ_0 act. The position of the points $-c$ and c was chosen arbitrarily. The solution of this problem was found by means of finite element method.

Conclusions. For a crack type I in a homogeneous material, the zones of weakened interconnections on the crack extensions of arbitrary length are considered. Local and global energy release rates are calculated. For a specific material and external load, it is shown that the sum of these values does not change. Also a shear crack that occurs near the corner points of an area composed of two dissimilar rectangles of different sizes is considered. The zones of plasticity on the continuation of the cracks are introduced. The local and global components of the energy release rate are found for different values of shear stress in these zones, the value of which is determined by the characteristics of the adhesive layer. It is shown that the combination of the energy release rate components allows to find the required critical

parameter that determines the possibility of the crack development without finding the length of the plastic zone.

REFERENCES

1. **Kaminskii A.A., Kipnis L.A., Kolmakova V.A.** On the Dugdaill model for a crack at the interface of different media // International Applied Mechanics. 1999. Vol. 35. No. 1. P. 58–63. (in Russian).
2. **Leonov M.Ya., Panasyuk V.V.** Development of the smallest cracks in a rigid body.// Appl. Mechanics. 1959. No. 4. P. 391–401. (in Russian).
3. **Panasyuk V.V.** Limited equilibrium of brittle bodies with cracks., Kiev: Naukova Dumka 1968 (translation in English: Detroit. Michigan Inform. Serv. 1971). (in Russian).
4. **Dugdale D.S.** Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. 1960. Vol. 8. No 2. P. 100–104.
5. **Gao H., Zhang T.Y., Tong P.** Local and global energy release rates for an electrically yielded crack in a piezoelectric ceramic // J. Mech. and Phys. 1997. Solids 45. P. 491–510.
6. **Griffith A.A.** The phenomenon of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. 1920. Vol. A221. P. 163–198.

*Дніпровський національний університет
Імені Олеся Гончара,
Дніпро, Україна*

Надійшла до редколегії 05.10.2020

DOI 10.15421/4220016
УДК 539.3

К. В. Панін, канд. фіз.-мат. наук, Я. В. Шуміхін

СКЛАДНИЙ ЗСУВ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО БРУСА З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ

Розглянуто задачу про визначення напружено-деформованого стану пружно-пластичного бруса з міжфазною крайовою тріщиною в умовах складного зсуву. Запропоновано числовий алгоритм розв'язання задачі, заснований на застосуванні методу скінченних елементів і диференціально-нелінійного варіанту теорії пластичності, що враховує мікродеформації (Новожилова, Кадашевича, Чернякова). При різних схемах навантаження побудовані зони пластичності в перерізі бруса. Досліджено вплив історії навантаження та фізико-механічних властивостей матеріалів бруса на конфігурацію зон пластичності в околі вершини тріщини.

Ключові слова: складений брус; міжфазна тріщина; складний зсув; теорія пластичності, що враховує мікродеформації; метод скінченних елементів; зона пластичності.

Вступ. У зв'язку з широким застосуванням в техніці композиційних матеріалів досить актуальною є задача дослідження поведінки тріщини в області поділу двох середовищ. Багато робіт цього напрямку присвячено задачам про тріщину на границі розділу двох пружних областей. Значно менша кількість робіт присвячена дослідженню зазначеної проблеми в пружно-пластичній постановці.

Постановка задачі. Розглядається рівновага призматичного складеного бруса квадратного перерізу ($a \times a$), який послаблений крайовою тріщиною довжиною $l = a/2$, що проходить вздовж лінії розділу двох матеріалів (рис. 1).

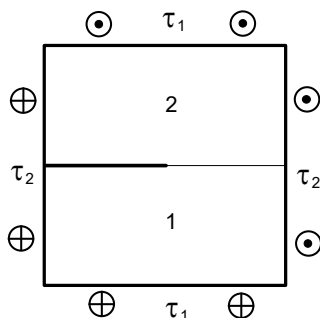


Рис.1 – Переріз складеного бруса

Брус знаходиться під дією постійних дотичних зусиль $\tau_1 = \tau_1(t)$ и $\tau_2 = \tau_2(t)$, що діють по його гранях. Навантаження бруса – квазістатичне. Його матеріал – пружно-пластичний та такий, що зміцнюється. Потрібно визначити компоненти напружено-деформованого стану бруса в будь-який момент навантаження.

Для опису процесів складного пружно-пластичного деформування бруса використовуються рівняння стану теорії пластичності, що враховує мікродеформації [1]. У [2] показано, що цей диференційно-нелінійний варіант теорії пластичності досить добре описує складне пружно-пластичне деформування полікристалічних тіл.

З урахуванням того, що у разі складного зсуву траєкторії навантаження і деформування є плоскими, то визначальні співвідношення теорії пластичності, що враховує мікродеформації, приймають такий вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{S}_k &= 2G(\delta_{km} - G_{km}^{(1)})\dot{\Theta}_m \quad (k, m = 1, 2); \\ G_{km}^{(1)} &= (\delta_{kn} + B_2 G_{kn}^{(2)})^{-1} G_{nm}^{(2)}; \\ G_{nm}^{(2)} &= \frac{1}{B_1} \left(G_{nm} - \frac{\mu_1}{1 + \mu_1 \Omega} F_n F_m \right); \\ F_k &= \int \lambda'_k d\Omega'; \quad G_{km} = \int \lambda'_k \lambda'_m d\Omega'; \quad \Omega = \int d\Omega',\end{aligned}\tag{1}$$

де $\dot{S}_k = \dot{\sigma}_{k3}$, $\dot{\Theta}_k = \dot{\varepsilon}_{k3}$ – компоненти векторів швидкостей напружень та деформацій; G – модуль зсуву; $\mu_1 = B_3/B_1$; B_i – універсальні функції матеріалу; $\lambda'_1 = \cos \theta_1$, $\lambda'_2 = \sin \theta_1 \cos \theta_2$ – напрямки активного мікропластичного деформування; $d\Omega' = \sin^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_1 d\theta_2$ – диференціальна форма “тілесний кут”.

Область напрямків активного мікропластичного деформування Ω' будується за допомогою співвідношень

$$E(\lambda'_k, t) \leq \mathcal{E}_k \lambda'_k, \quad \dot{\lambda}'_k \lambda'_k - \frac{\mu}{1 + \mu \Omega} F_k \dot{\lambda}'_k > 0,\tag{2}$$

де $\dot{\lambda}'_k = \dot{S}_k - B_2 G_{km}^{(1)} \dot{\Theta}_m$ – компоненти вектору активних деформацій.

Інтенсивність деформацій $E(\lambda'_k, t)$ визначається за допомогою формул

$$E(\lambda'_k, 0) = \varepsilon_o, \quad \dot{E}(\lambda'_k, t) = \begin{cases} \dot{\Theta}_k \lambda'_k, & \lambda'_k \lambda'_k = 1; \\ B_2 \dot{\Theta}_k^p \lambda'_k + \dot{\chi}, & \lambda'_k \lambda'_k = \pm 1; \\ \eta \dot{\Theta}_k \lambda'_k + B_2 \dot{\Theta}_k^p \lambda'_k + (1 + \eta) \dot{\chi}, & \lambda'_k \lambda'_k = -1; \end{cases}\tag{3}$$

де $\dot{\chi} = \frac{\mu}{1 + \mu \Delta \Omega} F_k \dot{r}_k$; η – універсальна функція матеріалу; ε_o – початкова границя течії.

С урахуванням того, що визначальні співвідношення обраного варіанту теорії пластичності записуються у швидкостях, крайова задача записується також у швидкостях. Вона зводиться до побудови полів зміни напружень $\dot{\sigma}_{13}$, $\dot{\sigma}_{23}$, деформацій $\dot{\varepsilon}_{13}$, $\dot{\varepsilon}_{23}$ і переміщень v_3 з наступної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{\sigma}_{23}}{\partial x_2} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \quad \dot{\varepsilon}_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial x_2}, \quad (4)$$

до якої необхідно додати визначальні співвідношення теорії пластичності, що враховує мікродеформації (1) – (3), та крайові умови

$$\dot{\sigma}_{k3} = \dot{p}_k \text{ на } S_p; v_3 = v_{30} \text{ на } S_v. \quad (5)$$

Метод розв'язування. Пружно-пластична крайова задача (1) – (5) розв'язується у приростах. Задається траєкторія навантаження в просторі зовнішнього навантаження. Далі дається приріст навантаження, і на кожному кроці приросту розшукується розв'язок задачі. Знайдені на кожному кроці розв'язки підсумовуються до тих пір, поки навантаження не досягне заданого значення. У результаті знаходяться шукані поля. Таким чином, можна записати:

$$\begin{aligned} \{P\}_i &= \{P\}_{i-1} + \{\Delta P\}_i, \quad \{u\}_i = \{u\}_{i-1} + \{\Delta u\}_i, \\ \{\sigma\}_i &= \{\sigma\}_{i-1} + \{\Delta \sigma\}_i, \quad \{\varepsilon\}_i = \{\varepsilon\}_{i-1} + \{\Delta \varepsilon\}_i. \end{aligned}$$

Тут нижні індекси відповідають номерам кроків; $\{P\}$, $\{u\}$, $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$ – навантаження, переміщення, напруження та деформації, відповідно; $\{\Delta P\}$, $\{\Delta u\}$, $\{\Delta \sigma\}$, $\{\Delta \varepsilon\}$ – їх прирости.

Вектори $\{\Delta P\}$, $\{\Delta u\}$, $\{\Delta \sigma\}$ та $\{\Delta \varepsilon\}$ можуть бути представлені у вигляді

$$\begin{aligned} \{\Delta P\} &= \{\dot{P}\} \cdot \Delta t, \quad \{\Delta u\} = \{\dot{v}\} \cdot \Delta t, \\ \{\Delta \sigma\} &= \{\dot{\sigma}\} \cdot \Delta t, \quad \{\Delta \varepsilon\} = \{\dot{\varepsilon}\} \cdot \Delta t, \end{aligned}$$

де t – параметр, що монотонно змінюється.

Для розв'язування задачі на кожному кроці використовується принцип максимуму для швидкостей переміщень [3]

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int_V (\dot{\sigma}_{13} \delta \dot{\varepsilon}_{13} + \dot{\sigma}_{23} \delta \dot{\varepsilon}_{23}) dV + \int_{S_{p1}} p_1 \delta v_3 dS + \int_{S_{p2}} p_2 \delta v_3 dS = 0. \quad (6)$$

Для знаходження поля $\{v\}$, що задовольняє (6), застосовується метод скінченних елементів. На i -му кроці процесу послідовних наближень розв'язання пружно-пластичної задачі зводиться до визначення

швидкості переміщень з глобальної системи алгебричних рівнянь вигляду

$$[K(\{u_{i-1}\}, \{v_i\})]\{v_i\} = \{\dot{P}_i\}.$$

Для розв'язання цієї системи використовується метод простої ітерації, що описується формулою

$$\{v_i^n\} = [K_{n-1}]^{-1} \{\dot{P}_i\}.$$

Для обчислення матриць жорсткості скінченних елементів використовується алгоритм [4], який дозволяє знизити число кратних інтегралів у визначальних співвідношеннях теорії пластичності, що враховує мікродеформації, з п'яти до двох.

Результати числового моделювання. Проведені розрахунки напружено-деформованого стану бруса з тріщиною на границі розділу двох матеріалів (рис. 1). Для першого матеріалу прийнята діаграма деформування 3, а для другого – діаграми 1–3 для різних розрахунків (рис. 2).

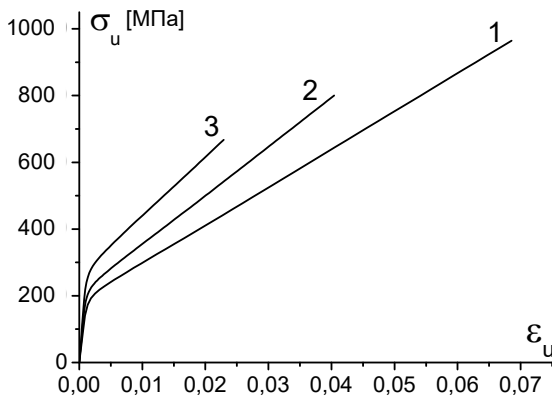


Рис. 2 – Діаграми деформування матеріалів бруса

При цьому для діаграми 1 в рамках теорії пластичності, що враховує мікродеформації, прийняті наступні константи: $G=80$ ГПа; $\tau_s=70$ МПа; $\varepsilon_s=1,31 \cdot 10^{-3}$; $B_1=2,74$; $B_2=B_3=0$; $\eta=1$. Для діаграм 2 та 3 прийняті $\tau_s=90$ МПа та $\tau_s=110$ МПа відповідно.

На рис. 3,а представлені результати розрахунку напружено-деформованого стану в перерізі бруса в залежності від властивостей другого матеріалу. Прийнята схема навантаження бруса – ОВА. При цьому в точках перетину бруса реалізується складне навантаження [4]. Для зручності порівняння показані тільки ізолінії $\sigma_u/\tau_s=1$. Суцільна лінія відповідає випадку, коли механічні властивості обох матеріалів

описуються діаграмою деформування 3, а штрихова і пунктирні лінії – коли властивості матеріалу 2 описуються діаграмами 2 і 1 відповідно.

На рис. 3,б представлені результати розрахунку напружено-деформованого стану в перерізі бруса в залежності від виду траєкторії навантаження в просторі зовнішнього навантаження. Властивості першого і другого матеріалів описуються діаграмами 3 і 2 відповідно. Форма подання така ж, як на рис. 3,а. Суцільна лінія відповідає траєкторії ОСА, штрихова – ОДА, пунктирна – ОВА.

На рис. 3,в представлені результати розрахунку напружено-деформованого стану в перерізі бруса в залежності від застосовуваного варіанта теорії пластичності. Прийнята схема навантаження бруса – ОВА. Тут також показані тільки ізолінії $\sigma_u/\tau_s = 1$. Матеріали – як в попередньому розрахунку. Суцільна лінія відповідає теорії пластичності, що враховує мікродоформації, штрихова – теорії течії з ізотропним зміцненням, а пунктирна лінія – деформаційній теорії.

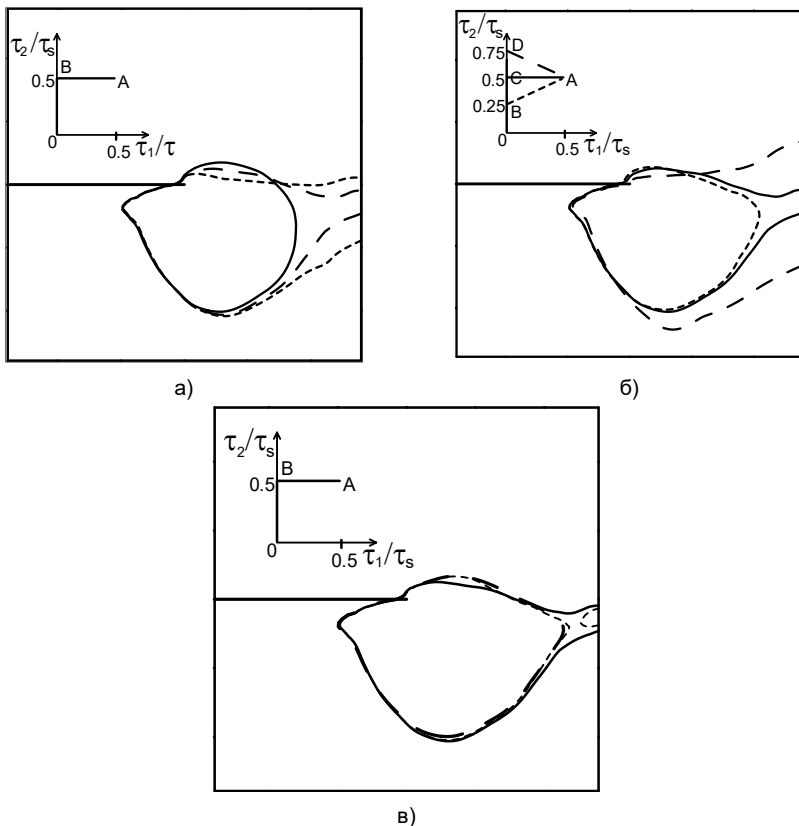


Рис. 3 – Розрахунки напружено-деформованого стану у перерізі бруса

Висновки. Отримані результати свідчать про те, що напружено-деформований стан бруса істотно залежить як від траєкторії навантаження, так і від фізико-механічних властивостей матеріалів. Різниця в результатах, отриманих з використанням теорії пластичності, що враховує мікрODEФОРМАЦІЇ і теорії течії, пов'язана з тим, що остання не завжди може задовільно описати процеси складного деформування. Що стосується деформаційної теорії, то рамки її використання обмежені простими та близькими до простих процесами навантаження. Тому спроба застосувати її для опису складного пружно-пластичного деформування також призводить до незадовільних результатів.

Перспективним напрямком подальших досліджень є застосування диференційно-нелінійних варіантів теорії пластичності для визначення напружено-деформованого стану пружно-пластичних тіл з міжфазними тріщинами, які знаходяться в умовах складного навантаження.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **КадашевИч Ю.И., Новожилов В.В., Черняков Ю.А.** Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации // ПММ. 1986. Т. 50. № 6. С. 821–823.
2. **Kadashevich Yu.I., Chernyakov Yu.A.** Theory of plasticity taking into account micro stresses // Advanced in Mechanics. 1992. Vol.15. № 3–4. P. 3–39.
3. **Черняков Ю.А.** Вариационные принципы решения граничных задач теории микродеформации // Вопросы прочности и пластичности. Днепропетровск: 1997. С. 5–13.
4. **Панин К.В., Черняков Ю.А.** Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины продольного сдвига при сложном нагружении // Вопросы механики деформирования и разрушения твердых тел. Днепропетровск: 1992. С. 39–45.

УДК 539.3

К. В. Панин, канд. физ.-мат. наук, Я. В. Шумихин

СЛОЖНЫЙ СДВИГ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО БРУСА С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния составного упругопластического бруса с межфазной краевой трещиной в условиях сложного сдвига. Предложен численный алгоритм решения задачи, основанный на применении метода конечных элементов и дифференциально-нелинейного варианта теории пластичности, учитывающей микродеформации (Новожилова, КадашевИча, Чернякова). При различных схемах внешней нагрузки построены зоны пластичности в сечении бруса. Исследовано влияние истории нагружения и физико-механических свойств бруса на конфигурацию зон пластичности в окрестности вершины межфазной трещины.

Ключевые слова: составной брус; межфазная трещина; сложный сдвиг; теория пластичности; учитывающая микродеформации; метод конечных элементов; зона пластичности.

UDC 539.3

K. V. Panin, PhD (Phys.-Math.), Y. V. Shumikhin

ELASTIC-PLASTIC BEAM WITH INTERFACIAL CRACK UNDER LONGITUDINAL SHEAR

The problem of determining the stress-strain state of a composite elastic-plastic beam with an interfacial edge crack under complex shear conditions is considered. A numerical algorithm for solving the problem is proposed, based on the application of the finite element method and a differential-nonlinear version of the theory of plasticity, taking into account microstrains (Novozhilov, Kadashevich, Chernyakov). For various schemes of external loading, plastic zones are constructed in the section of the beam. The influence of the history of loading and the physical and mechanical properties of a beam on the configuration of plastic zones in the vicinity of the tip of an interfacial crack is investigated.

Keywords: composite beam, interfacial crack, complex shear, plasticity theory, taking into account microstrains, finite element method, plastic zone.

The equilibrium of a prismatic composite beam of square cross-section, which is weakened by an edge crack running along the line of separation of two materials, is considered.

The beam is under the action of constant tangential forces acting on its faces. The load of the beam is quasi-static. Its material is elastic-plastic and reinforcing. It is necessary to determine the components of the stress-strain state of the beam at any time during loading.

To describe the processes of complex elastic-plastic deformation of the beam, the equations of state of the theory of plasticity, which takes into account microdeformations [1], are used. In [2] it was shown that this differential-nonlinear variant of the plasticity theory describes well the complex elastic-plastic deformation of polycrystalline bodies. In it, the non-uniformity of plastic deformation due to the structure of the material is approximately taken into account by representing the tensor of plastic deformation as a sum (or in the limit as an integral) of elementary plastic deformations, each of which has its own yield surface and a system of internal microelastic forces.

Given that the defining relations of the selected variant of the theory of plasticity are written in velocities, the considered boundary problem is also written in velocities.

The trajectory of loading in space of external loading is set. Next, the load is increased, and at each step of the increase, the solution of the problem is sought. The solutions found at each step are summed until the load reaches the specified value. As a result, we obtain the required fields.

To solve the problem at each step, the principle of maximum for velocity of displacements is used [3].

To find a field of velocity of displacements that satisfies the principle, the finite element method is used. After assembling in the i -th step, the solution of the elastic-plastic problem is reduced to determining the velocity of displacements from the global system of nonlinear algebraic equations. To linearize this system, the method of simple iteration is used. At each step of the simple iteration method, the linear system of algebraic equations is solved using the Gaussian method.

Calculations of the stress-strain state of a beam with a crack at the interface between the two materials were performed. The calculations were carried out within the framework of the chosen version of the theory of plasticity. For comparison, similar calculations were performed using deformation theory and flow theory with isotropic hardening.

The results obtained indicate that the stress-strain state of the beam depends significantly both on the loading trajectory and on the physical and mechanical properties of materials.

The difference in the results obtained using the theory of plasticity, taking into account microstrains, and the indicated theory of flow is due to the fact that the latter cannot satisfactorily describe the processes of complex loading. As for the deformation theory, the scope of its applicability is limited to simple and close to simple loading processes. Therefore, an attempt to apply it to describe complex elastic-plastic loading also leads to unsatisfactory results.

The research results indicate that a promising area of further research is the use of differential-nonlinear variants of the theory of plasticity to determine the stress-strain state of bodies with interfacial cracks under conditions of complex loading.

REFERENCES

1. **Kadashevich Yu.I., Novozhilov V.V., Chernyakov Yu.A.** Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации // Applied Mechanics and Mathematics. 1986. Vol. 50. No 6. P. 821–823. (in Russian).
2. **Kadashevich Yu.I., Chernyakov Yu.A.** Theory of plasticity taking into account micro stresses // Advanced in Mechanics. 1992. Vol.15. No 3–4. P.3–39.
3. **Chernyakov Yu.A.** Variational principles for solving boundary value problems of the theory of microdeformation // Problems of strength and plasticity. Dnepropetrovsk, 1997, P. 5–13. (in Russian).
4. **Panin K.V., Chernyakov Yu.A.** Stress-strain state in the vicinity of the tip of a longitudinal shear crack under complex loading // Questions of mechanics of deformation and destruction of solids. Dnepropetrovsk, 1992. P.39–45. (in Russian).

*Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара,
Дніпро, Україна*

Надійшла до редколегії 10.10.2020

DOI 10.15421/4220017
УДК 539.3

Х. І. Середницька, канд. фіз.-мат. наук

ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ЗАКРИТОЇ МІЖФАЗНОЇ ТЕПЛОІЗОЛЬОВАНОЇ ЩІЛИНИ В РІЗНОРІДНОМУ БІМАТЕРІАЛІ

Досліджено поведінку різнорідного біматеріалу з міжфазною теплоізолюваною щілиною, береги якої контактують по усій довжині під дією стискальних зусиль і однорідного теплового потоку. Задачу термопружності зведено до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибка температури та зсувних переміщень берегів щілини. Отриману систему розв'язано для біматеріалу, складеного з сплаву нікелю та неіржавіючої сталі. Визначено контактний тиск берегів щілини і порогові значення стискальних зусиль, для яких відбувається повне закриття щілини. Проаналізовано вплив теплового потоку на коефіцієнт інтенсивності дотичних напружень.

Ключові слова: термопружність; різнорідний біматеріал; міжфазна щілина; закриття щілини; стискальні зусилля; тепловий потік.

Вступ. В реальних матеріалах внаслідок різних фізико-механічних та хімічних процесів відбувається зміна структури поверхонь тіл та поява різного роду дефектів. Врахування мікроструктури поверхонь є важливим при дослідженні механічної поведінки матеріалів, оскільки мікронерівності у вигляді тріщин чи нерівностей поверхонь самих тріщин зумовлюють дискретність контакту, фактична площа якого залежить від контактного тиску і змінюється зі зміною навантаження [11]. Контактні задачі для тріщин вивчено з врахуванням шорсткості поверхонь [8, 13], наявності тонких шарів [12, 15, 16] і заповнювача зазорів [10] під дією механічного навантаження. Вплив термічного навантаження на контакт берегів дефектів має місце для композитних матеріалів [9]. Тут мікроструктура поверхні врахована у термічній провідності або термоопорі дефекту. Термопружність кусково-однорідного тіла із закритою міжфазною тріщиною при наявності контактного термоопору між її берегами вивчено у [2]. Закриття тріщини під дією зосередженої сили проаналізовано для однорідного матеріалу [3]. Закриття тріщини під дією рівномірно розподіленого стискального навантаження і однорідного теплового потоку вивчено для біматеріалу, компоненти якого відрізняються лише модулями зсуву [4]. В останніх працях враховано залежність контактного теплообміну від шорсткості поверхонь. У [1, 5] враховано вплив тонких плівок і заповнювача тріщини на частковий контакт її берегів під дією теплового потоку і розтягувального навантаження у біматеріалі з нульовим параметром Дандерса. У

наведених працях дослідження в основному проведені для таких біматеріалів, характеристики яких були частково змінними, зокрема відрізнялися лише модулями зсуву, коефіцієнтами Пуассона або механічні характеристики однакові і т. п. Контактні задачі для різно-рідних тіл, що містять міжфазні тріщини досліджено у постановці контакту берегів на привершинних ділянках під дією механічного і електричного навантаження [7, 14].

В даній статті на прикладі біматеріалу, в якому поєднано сплав нікелю та неіржавіюча сталь, досліджено термомеханічну поведінку різнорідного біматеріалу з міжфазною теплоізолюваною щілиною, що повністю закривається під дією стискального навантаження та стаціонарного однорідного теплового потоку.

Постановка задачі та методика розв'язування. Розглядаємо біматеріал, складений з двох півплощин D_1 і D_2 , матеріали яких різні і характеризуються різними термомеханічними сталими: коефіцієнтами Пуассона (ν_1, ν_2), модулями зсуву (G_1, G_2), коефіцієнтами лінійного теплового розширення (α_1, α_2) та коефіцієнтами теплопровідності (λ_1, λ_2). На межі з'єднання півплощин розташована міжфазна щілина (рис. 1) завдовжки $2a$ з початковою висотою $h_0(x)$, яка значно менша від довжини щілини ($h_0(x)/a \ll 1, |x| \leq a$).

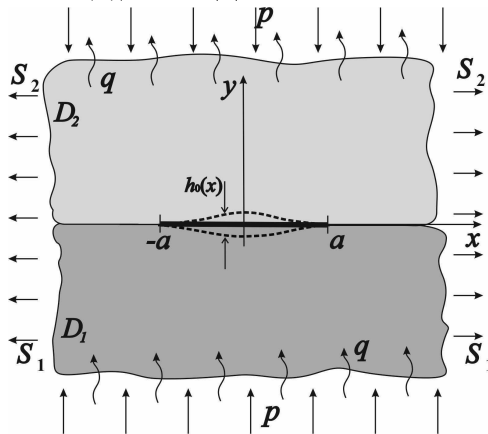


Рис. 1 – Схема біматеріалу з міжфазною щілиною, що закривається під дією навантаження

На нескінченності до біматеріалу прикладено рівномірно розподілене стискальне навантаження p та стаціонарний тепловий потік q , а також лінійно розподілені по координаті y напруги S_1 і S_2 , які усувають глобальне видовження і викривлення півплощин під дією стискального навантаження і теплового потоку. Вважаємо, що береги щілини

теплоізолювані і під дією стискальних зусиль контактують по всій її довжині $[-a, a]$ без тертя (рис. 1).

На ділянках з'єднання півплощин поза щілиною виконуються умови ідеального теплового і механічного контакту.

Контактно-крайові умови сформульованої задачі матимуть вигляд:

- на ділянках контакту півплощин

$$T^+ = T^-, q_y^+ = q_y^-, \sigma_y^+ = \sigma_y^-, \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-, u^+ = u^-, v^+ = v^-, \quad (1)$$

- на ділянці щілини

$$q_y^+ = q_y^-, q_y^- = 0, \sigma_y^+ = \sigma_y^-, \sigma_y^- = -P(x), \tau_{xy}^+ = 0, \tau_{xy}^- = 0, \quad (2)$$

де T – температура; q_y – компонента вектора теплового потоку; u, v – компоненти вектора переміщень; σ_y, τ_{xy} – компоненти тензора напружень; $P(x)$ – контактний тиск берегів щілини; індексами „+”, „-” – позначено граничні значення величин у верхній і нижній півплощині відповідно.

Використовуючи викладену у [6] методику, температурне поле і напружено-деформований стан в біматеріалі подано через розкриття щілини $h(x)$ та стрибок температури між її берегами $\gamma(x)$ та стрибок дотичних переміщень $U(x)$:

$$q_y^+ = q_y^- = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t) dt}{t-x} + q, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^+ = \sigma_y^- = & p + \lambda G_1 G_2 \left(\frac{\eta_2}{G_2 + G_1 \kappa_2} - \frac{\eta_1}{G_1 + G_2 \kappa_1} \right) \gamma(x) + \\ & + G_1 G_2 \left(\frac{G_2 (1 - \kappa_1) - G_1 (1 - \kappa_2)}{(G_2 + G_1 \kappa_2)(G_1 + G_2 \kappa_1)} \right) U'(x) + \\ & + \frac{G_1 G_2}{\pi} \left(\frac{G_2 (1 + \kappa_1) + G_1 (1 + \kappa_2)}{(G_2 + G_1 \kappa_2)(G_1 + G_2 \kappa_1)} \right) \int_{-a}^a \frac{h'(t)}{t-x} dt, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = \frac{\lambda G_1 G_2}{\pi} \left(\frac{\eta_2}{G_2 + G_1 \kappa_2} + \frac{\eta_1}{G_1 + G_2 \kappa_1} \right) \int_{-a}^a \frac{\gamma(t)}{t-x} dt +$$

$$\begin{aligned}
& +G_1G_2\left(\frac{G_2(1-\kappa_1)-G_1(1-\kappa_2)}{(G_2+G_1\kappa_2)(G_1+G_2\kappa_1)}\right)h'(x)- \\
& -\frac{G_1G_2}{\pi}\left(\frac{G_2(1+\kappa_1)+G_1(1+\kappa_2)}{(G_2+G_1\kappa_2)(G_1+G_2\kappa_1)}\right)\int_{-a}^a\frac{U'(t)}{t-x}dt.
\end{aligned} \quad (5)$$

Тут $\gamma(x) = 0$; $U(x) = 0$; $h(x) = 0$, якщо $|x| \geq a$ (зовні щілини).

Задовольняючи контактні-крайові умови (1), (2) за допомогою подань (3), (4), (5), отримаємо систему сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (СІДР):

$$-\frac{\lambda}{2\pi}\int_{-a}^a\frac{\gamma'(t)}{t-x}dt = q, \quad |x| < a, \quad (6)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^a\frac{U'(t)}{t-x}dt - \lambda\eta^+ + \frac{1}{\pi}\int_{-a}^a\frac{\gamma(t)}{t-x}dt + \beta h'_0(x) = 0 \quad (7)$$

$$\text{де } \gamma(\pm a) = 0, \quad U(\pm a) = 0; \quad \lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \beta = \frac{G_2(1-\kappa_1)-G_1(1-\kappa_2)}{G_2(1+\kappa_1)+G_1(1+\kappa_2)},$$

$$\eta^+ = \frac{(G_2+G_1\kappa_2)\eta_2 + (G_1+G_2\kappa_1)\eta_1}{G_2(1+\kappa_1)+G_1(1+\kappa_2)}.$$

Систему рівнянь (6), (7) розв'язано аналітично [6], і визначено функції $\gamma(x)$ і $U'(x)$:

$$\gamma(x) = \frac{2q}{\lambda}\sqrt{a^2-x^2}, \quad |x| < a; \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
U'(x) = q\eta^+ \left(2\sqrt{a^2-x^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \right) + \frac{\beta}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2-t^2}h'_0(t)}{t-x}dt, \\
|x| < a. \quad (9)
\end{aligned}$$

Враховуючи співвідношення (8), (9) у виразі (4), визначено контактний тиск берегів щілини $P(x)$ ($P(x) = -\sigma_y^+$):

$$P(x) = p + \frac{q}{G^*} \left[\frac{\beta\eta^+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} - 2(\eta^- + \beta\eta^+)\sqrt{a^2-x^2} \right] +$$

$$+ \frac{1}{G^* \pi} \int_{-a}^a \frac{\left[1 - \beta^2 \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right] h_0'(t)}{t - x} dt, \quad |x| < a, \quad (10)$$

де

$$\eta^- = \frac{(G_2 + G_1 \kappa_2) \eta_2 - (G_1 + G_2 \kappa_1) \eta_1}{G_2 (1 + \kappa_1) + G_1 (1 + \kappa_2)},$$

$$G^* = \frac{(G_2 + G_1 \kappa_2)(G_1 + G_2 \kappa_1)}{G_1 G_2 (G_2 (1 + \kappa_1) + G_1 (1 + \kappa_2))}.$$

Напружено-деформований стан біматеріалу в околі вершини щілини визначається коефіцієнтом інтенсивності дотичних міжфазних напружень:

$$K_{II} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \sqrt{2\pi(x-a)} \tau_{xy}(x) \right\}, \quad (11)$$

де

$$\tau_{xy} = \frac{qa^2 \eta^+}{G^* \sqrt{x^2 - a^2}} + \frac{\beta}{\pi G^*} \int_{-a}^a \frac{F(t)}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - x)} dt, \quad |x| > a,$$

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2} h_0'(\xi)}{\xi - t} d\xi.$$

Аналіз результатів. На основі співвідношень (10), (11) проаналізовано розподіл контактного тиску берегів щілини та залежність коефіцієнта інтенсивності дотичних напружень від теплового потоку.

Зауважимо, що значення стискальних зусиль при яких береги щілини контактують на всій її ділянці є наперед невідомими. Відомо, що для того щоб щілина не розкривалася необхідно, щоб контактний тиск був додатнім $P(x) > 0$. З цієї умови знайдемо діапазон зміни стискальних зусиль $p > p_{cr}$ при яких щілина буде закриватися на усій ділянці. Порогові значення зусиль p_{cr} відповідно визначатимемо з умови коли найменше значення контактного тиску дорівнює нулю ($P(0) = 0$).

Розрахунки проведено для біматеріалу з компонентами D_1 – сплав нікелю Ni 200 та D_2 – неіржавіюча сталь AISI 304. Основні термомеханічні характеристики матеріалів наведені у табл. 1.

Довжина і початкова висота щілини відповідно $2a = 2\text{ мм}$,
 $h_0(x) = 0.001 \left(1 - (x/a)^2\right)^{3/2}$. Розглянуто два напрями теплового потоку:
 перший – коли тепловий потік скерований від матеріалу D_1 до
 матеріалу D_2 , другий – від матеріалу D_2 до матеріалу D_1 .

Таблиця 1 – Характеристики матеріалів

Матеріал	D_1 – сплав нікелю <i>Ni 200</i>	D_2 – неіржавіюча сталь <i>AISI 304</i>
Коефіцієнт Пуассона ν	0,264	0,2532
Модуль зсуву $G, \text{МПа}$	$80 \cdot 10^3$	$86 \cdot 10^3$
Коефіцієнт лінійного теплового розширення $\alpha, 1/K$	$1,33 \cdot 10^{-5}$	$1,73 \cdot 10^{-5}$
Коефіцієнт теплопровідності $\lambda, \text{Вт} \cdot \text{мм}/K$	$6,71 \cdot 10^{-2}$	$1,63 \cdot 10^{-2}$
Коефіцієнт термічної дистортивності $\eta, \text{мм}/K$	$0,2505 \cdot 10^{-3}$	$1,3301 \cdot 10^{-3}$

Графічна ілюстрація результатів наведена на рис. 2 – рис. 4, де
 суцільні криві відображають випадок, коли тепловий потік скерований
 від сплаву нікелю до неіржавіючої сталі, а пунктирні – навпаки.

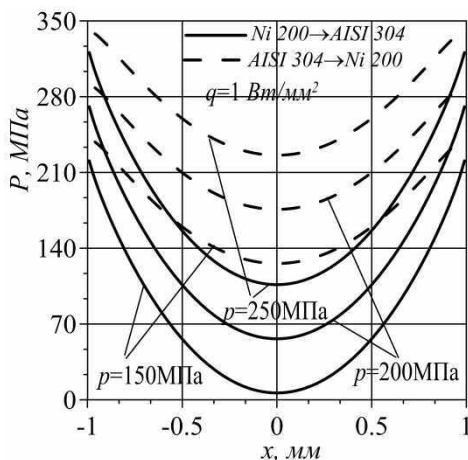


Рис. 2 – Розподіл контактного тиску $P(x)$ для різних значень інтенсивності
 стискальних зусиль p та двох напрямів теплового потоку q

На рис. 2 зображено розподіл контактної тиску $P(x)$ вздовж щілини для різних значень інтенсивності стискальних зусиль p та протилежних напрямів потоку q . Бачимо, що для фіксованого теплового потоку зі збільшенням силового навантаження контактний тиск зростає і є більший у випадку, коли тепловий потік скерований від неіржавіючої сталі до сплаву нікелю. Посередині щілини контактний тиск набуває локального мінімуму, що визначає порогове значення стискальних зусиль, за яких реалізується повне закриття щілини.

На рис. 3 побудовано залежність порогових значень стискальних зусиль p_{cr} від густини та напрямку теплового потоку. У випадку теплового потоку, скерованого від сплаву нікелю до неіржавіючої сталі, порогові значення зусиль зростають зі збільшенням густини теплового потоку. Для протилежного напрямку теплового потоку збільшення густини потоку призводить до зменшення порогових значень стискальних зусиль. Зі збільшенням густини теплового потоку збільшується різниця у діапазоні зміни стискальних зусиль для двох протилежних напрямів потоку.

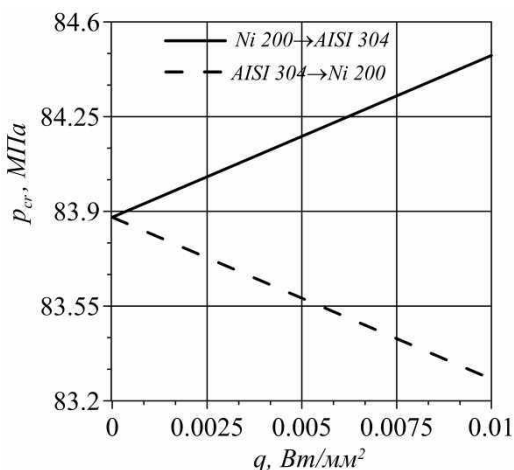


Рис. 3 – Залежність порогових значень стискальних зусиль p_{cr} від густини теплового потоку q для двох напрямів потоку

На рис. 4 проілюстровано залежність абсолютного значення коефіцієнта інтенсивності міжфазних дотичних напружень $|K_{II}|$ від густини та напрямку теплового потоку q . Бачимо, що коефіцієнт інтенсивності зростає зі збільшенням густини теплового потоку і набуває більших значень для потоку, скерованого від сплаву нікелю до неіржавіючої сталі. Це підтверджується тим, що термічна

дистортивність неіржавіючої сталі є більшою, і в дослідженнях, пов'язаних з міжфазною щілиною, було показано [6], що коефіцієнт інтенсивності дотичних міжфазних напружень завжди більший у випадку теплового потоку, скерованого до матеріалу з більшою термічною дистортивністю.

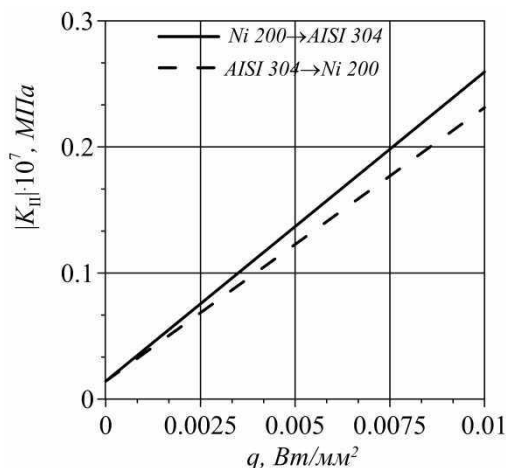


Рис. 4 – Залежність коефіцієнта інтенсивності міжфазних дотичних напружень $|K_{II}|$ від теплового потоку q

Висновки. Досліджено термопружну поведінку біматеріалу, складеного зі сплаву нікелю і неіржавіючої сталі за наявності міжфазної теплоізолюваної щілини, береги якої контактують на всій її ділянці під дією рівномірно розподілених стискальних зусиль та стаціонарного однорідного теплового потоку. Сформульовано задачу термопружності для такого біматеріалу, яку зведено до системи сингулярних інтегродиференціальних рівнянь відносно зсувних переміщень берегів щілини і стрибка температури між її берегами. Побудовано аналітичний розв'язок системи і визначено функції стрибків у явному вигляді. Проаналізовано розподіл контактного тиску берегів щілини та залежність коефіцієнта інтенсивності дотичних напружень від теплового потоку. Визначено порогові значення і діапазон зміни стискальних зусиль, за яких щілина буде цілком закрита. Встановлено залежність інтенсивності зусиль від густини та напрямку теплового потоку. Показано, що збільшення густини теплового потоку призводить до суттєво різних діапазонів зміни стискальних зусиль для двох протилежних напрямів потоку. Досліджено вплив зміни напрямку теплового потоку на розподіл контактного тиску та коефіцієнт інтенсивності міжфазних дотичних напружень. Встановлено, що контактний тиск берегів щілини буде більший у

випадку теплового потоку, скерованого від неіржавіючої сталі до сплаву нікелю, а коефіцієнт інтенсивності дотичних міжфазних напружень є більшим для протилежного напрямку теплового потоку.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Гольдштейн Р.В., Кім Г.С., Мартиняк Р.М., Середницька Х.І.** Ефект часткового закриття міжфазної тріщини з теплопровідним заповнювачем і поверхневими плівками при дії на біматеріал термічного навантаження // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2012. Т. 55. № 4. С. 64–73.
2. **Кім Г.С., Мартиняк Р.М.** Термопружність кусково-однорідного тіла із закритою міжфазною тріщиною при наявності контактного термоопору між її берегами // *Доп. НАН України*. 1996. № 10. С. 84–88.
3. **Кім Г.С., Мартиняк Р.М., Нагалка С.П.** Термопружні ефекти в тілі з тріщиною, закритою зосередженими силами // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 1999. Т. 42. № 2. С. 101–107.
4. **Мартиняк Р.М.** Термопружний стан біматеріалу із закритою міжфазною тріщиною з шорсткими поверхнями // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2010. Т. 53, № 1. С. 71–80.
5. **Мартиняк Р.М., Середницька Х.І.** Термонапружений стан біматеріалу з періодичною системою міжфазних тріщин, заповнених теплопровідною речовиною // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*. 2014. Вип. 19. С. 168–175.
6. **Мартиняк Р.М., Середницька Х.І.** Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. Львів: Растр-7, 2017. 168 с.
7. **Харун І.В., Лобода В.В.** Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил і моментів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2002. Т. 45. № 2. С. 103–113.
8. **Andreikiv A.O.** Generalized Griffith problem of shear with regard for the roughness of the crack surfaces // *Mater. Sci.* 2000. Vol. 36. No. 2. P. 210–217.
9. **Barber J.R., Comninou M.** The penny-shaped interface crack with heat flow. Part 2: Imperfect contact // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1983. Vol. 50. No. 4a. P. 770–776.
10. **Feraïlle-Fresnet A., Bui H.-D., Ehrlacher A.** Hydrostatic interaction of a wetting fluid and a circular crack in an elastic material // *Mech. Mater.* 2003. Vol. 35. P. 581–586.
11. **Garsia A.M., Sehitoglu H.** Contact of crack surfaces during fatigue: Part 1. Formulation of the model // *Metallurgical and Materials Transactions. A*. 1997. 28.A. No. 11. P. 2263–2275.
12. **Gilbert C.J., Ritchie R.O.** Mechanisms of cyclic fatigue crack propagation in a fine-grained alumina ceramic: the role of cracks closure // *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* 1997. Vol. 20. No 10. P. 1453–1466.
13. **Gross T.S., Mendelsohn D.A.** On the effect of crack face contact and friction due to fracture surface roughness in edge crack subjected to external shear // *Eng. Fract. Mech.* 1988. Vol. 31. No 3. P. 405–420.
14. **Loboda V., Lapusta Y., Sheveleva A.** Limited permeable crack in an interlayer between piezoelectric materials with different zones of electrical saturation and mechanical yielding // *Int. J. Solids Struct.* 2010. No 47. P. 1795–1806.
15. **Newman J.A., Piascik R.S.** Interactions of plasticity and oxide crack closure mechanisms near the fatigue crack growth threshold // *Int. J. Fatigue*. 2004. Vol. 26. No 9. P. 923–927.
16. **Riemmoser F.O., Pippan R.** Crack closure: a concept of fatigue crack growth under examination // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 1997. Vol. 20. No. 11. P. 1529–1540.

ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЗАКРЫТОЙ МЕЖФАЗНОЙ ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОЙ ЩЕЛИ В РАЗНОРОДНОМ БИМАТЕРИАЛЕ

Исследовано поведение разнородного биматериала с межфазной теплоизолированной щелью, берега которой контактируют по всей длине под действием сжимающих усилий и однородного теплового потока. Задача термоупругости сведена к системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений относительно скачка температуры и сдвиговых перемещений берегов щели. Полученная система решена для биматериала, составленного из сплава никеля и нержавеющей стали. Определено контактное давление берегов щели и пороговые значения сжимающих усилий, для которых происходит полное закрытие щели. Проанализировано влияние теплового потока на коэффициент интенсивности касательных напряжений.

Ключевые слова: термоупругость; разнородный биматериал; межфазная щель; закрытие щели; сжимающие усилия; тепловой поток.

THERMAL ELASTIC PROBLEM FOR CLOSED INTERFACE THERMO-INSULATED CRACK IN DISSIMILAR BIMATERIAL

The behavior of a dissimilar bimaterial with an interface thermo-insulated crack, the edges of which are in contact along its length under the action of compressive loads and a uniform heat flow, has been studied. The thermoelasticity problem is reduced to a system of singular integro-differential equations for the temperature jump and shear displacements of the crack edges. The resulting system is solved for a bimaterial composed of an alloy of nickel and stainless steel. The contact pressure of the edges of the crack and critical value of compressive loads, for which the crack is closed, are determined. The influence of heat flow on the Mode-II stress intensity factor is analyzed.

Keywords: thermo-elasticity; dissimilar biomaterial; interface crack; crack closure; compressive loads; heat flow.

In real materials, due to various physical, mechanical and chemical processes, the structure of body surfaces changes and various defects appear. The microstructure of the surfaces of bodies or defects determines the contact discreteness of the surfaces. The actual contact area depends on the contact pressure and changes with the load [11]. Contact problems for cracks have been studied taking into account surface roughness, the thin layers and the gaps filler [8, 13, 12, 15, 16, 10]. In the article [9] takes into account the microstructure of the surface in case of imperfect thermal contact with the thermal resistance. The thermo-elasticity of a piecewise homogeneous body with a closed interfacial crack in the presence of contact thermal resistance between its faces was studied in [2]. The crack closure under the action of concentrated force was analyzed for a homogeneous material [3]. The crack closure under the action of a uniformly distributed

compressive loads and a uniform heat flow has been studied for a bimaterial whose components differ in shear modules [4]. In recent works, the dependence of contact heat transfer on surface roughness is taken into account. In papers [1, 5], the influence of thin films and crack filler on the partial contact of its faces under the action of heat flow and tensile load in a bimaterial with a zero Dandera parameter is taken into account. In the above works, studies were mainly conducted for such bimaterials, the characteristics of which were partially variable, in particular, differed only in shear modules or Poisson's ratios or mechanical characteristics are the same and the like. Contact problems for heterogeneous bodies with interface cracks, the faces of which are in contact at the apical zones, have been investigated under the action of mechanical and electrical loads [7, 14]. In this article, the thermo-mechanical behavior of a heterogeneous bimaterial with an interface heat-insulated crack, which is completely closed under the action of compressive load and heat flow, is investigated. The bimaterial components consist of an alloy of nickel and stainless steel. We believe that the gap is initially open, but its shores may close completely under the action of compressive loads and heat flow. The range of change of the applied loading remains unknown. The thermo-elasticity problem is reduced to a system of singular integro-differential equations for the jump of temperature and jump of tangential displacements of the faces crack. To determine the critical loads, we use the condition of smooth contact of the crack faces. The system of equations is solved analytically and the temperature jump and shear displacements are explicitly defined. The contact pressure of the faces crack and the tangential interface stresses are determined. The distribution of contact pressure along the crack is analyzed. Contact pressure increases with increasing compressive loads at a fixed value of heat flow density. It is also shown that changing the direction of heat flow affects the distribution of contact pressure. The critical load values at which the crack is completely closed are determined. The dependence of compressive loads on the density and direction of heat flow is established. As the heat flow density increases, the difference between the compressive loads values for the two opposite flow directions increases. The influence of the density and direction heat flow on the Mode-II stress intensity factor is analyzed. The intensity factor is higher when the heat flow is directed from the alloy of nickel to stainless steel. The latter phenomenon can be explained by the fact that the heat flowing into the material with bigger thermal distortivity.

REFERENCES

1. **Goldstein R.V., Kit H.S., Martynyak R.M., Serednytska Kh.I.** Effect of Partial Closure of an Interface Crack with Heat-conducting Filler and Surface Films in the Case of Thermal Loading of a Bimaterial // *Mathematical Methods and Physico-mechanical Fields*. 2012. Vol. 55. No 4. P. 64–73. (in Ukrainian).
2. **Kit H.S., Martynyak R.M.** Thermoelasticity of a piecewise homogeneous body with a closed interface crack in the presence of contact thermal resistance between its faces // *Reports of the NAS of Ukraine*. 1996. No 10. P. 84–88. (in Ukrainian).

3. **Kit H.S., Martynyak R.M., Nagalka S.P.** Thermoelastic effects in a body with a crack closed by concentrated forces // *Mathematical Methods and Physico-mechanical Filds.* 1999. Vol. 42. No 2. P. 101–107. (in Ukrainian).
4. **Martynyak R.M.** Thermal stressed state in bimaterial with a closed interface crack with rough surfaces // *Mathematical Methods and Physico-mechanical Filds.* 2010. Vol. 53. No1. P.71–80. (in Ukrainian).
5. **Martynyak R.M., Serednytska Kh.I.** Thermoelastic state of bimaterial with periodic system of interfacial cracks filled heat-conductive medium // *Physical-mathematical modeling and information technologies.* 2014. Vol. 19. P. 168–175. (in Ukrainian).
6. **Martynyak R.M., Serednytska Kh.I.** Contact problems of thermoelasticity for interface cracks in bimaterials. Lviv : Rastr-7, 2017. 168 p. (in Ukrainian).
7. **Kharun I.V., Loboda V.V.** Interface cracks with contact zones in a field of concentrated forces and torques // *Mathematical Methods and Physico-mechanical Filds.* 2002. Vol. 45. No 2. P. 103–113.
8. **Andreikiv A.O.** Generalized Griffith problem of shear with regard for the roughness of the crack surfaces // *Mater. Sci.* 2000. Vol. 36. No 2. P. 210–217.
9. **Barber J.R., Comninou M.** The penny-shaped interface crack with heat flow. Part 2: Imperfect contact // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1983. Vol.50. No 4a. P. 770–776.
10. **Feraille-Fresnet A., Bui H.-D., Ehrlacher A.** Hydrostatic interaction of a wetting fluid and a circular crack in an elastic material // *Mech. Mater.* 2003. Vol. 35. P. 581–586.
11. **Garsia A.M., Sehitoglu H.** Contact of crack surfaces during fatigue: Part 1. Formulation of the model // *Metallurgical and Materials Transactions. A.* 1997. 28A. No. 11. P. 2263–2275.
12. **Gilbert C.J., Ritchie R.O.** Mechanisms of cyclic fatigue crack propagation in a fine-grained alumina ceramic: the role of cracks closure // *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* 1997. Vol. 20. No 10. P. 1453–1466.
13. **Gross T.S., Mendelsohn D.A.** On the effect of crack face contact and friction due to fracture surface roughness in edge crack subjected to external shear // *Eng. Fract. Mech.* 1988. Vol. 31. No 3. P. 405–420.
14. **Loboda V., Lapusta Y., Sheveleva A.** Limited permeable crack in an interlayer between piezoelectric materials with different zones of electrical saturation and mechanical yielding // *Int. J. Solids Struct.* 2010. No 47. P. 1795–1806.
15. **Newman J.A., Piascik R.S.** Interactions of plasticity and oxide crack closure mechanisms near the fatigue crack growth threshold // *Int. J. Fatigue.* 2004. Vol. 26. No 9. P. 923–927.
16. **Riemelmoser F.O., Pippin R.** Crack closure: a concept of fatigue crack growth under examination // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 1997. Vol. 20. No 11. P. 1529–1540.

*Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Львів, Україна*

Надійшла до редколегії 05.10.2020

DOI 10.15421/4220018
УДК 693.3

П. О. Стеблянко¹, д-р фіз.-мат. наук,
К. Е. Дьомічев², канд. техн. наук, О. Д. Петров³, PhD

МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕДІНКИ ЕЛЕМЕНТІВ, ВИГОТОВЛЕНИХ ІЗ МАТЕРІАЛІВ З ПАМ'ЯТТЮ ФОРМИ ПРИ ЗНАЧНИХ ДЕФОРМАЦІЯХ

Досліджено поведінку функціонально-неоднорідних матеріалів на прикладі матеріалів з пам'яттю форми при значних деформаціях (до 15%). Для розв'язання задач моделювання поведінки тіл із функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях обов'язковою умовою є врахування нелінійності. При побудові фізичних співвідношень передбачається, що деформація в точці представлена як сума пружної складової, стрибка деформації при фазовому переході, пластичної деформації та деформації, яка викликана змінами температури. Задача розглядається в геометрично нелінійній постановці. При розв'язанні задачі пружно-пластичності враховується нелінійність в рівняннях руху (при деформаціях від 7% до 15%).

Ключові слова: функціонально-неоднорідні матеріали; математичне моделювання; геометрична не лінійність; матеріали з пам'яттю форми.

Вступ. Останнім часом важливі деталі елементів конструкцій і пристроїв виготовляються з матеріалів, які мають властивість пам'яті форми і ведуть себе псевдо-пружно-пластично [7]. У процесі виготовлення вони можуть отримувати великі пластичні деформації, перебувати під впливом складного нестационарного силового і температурного навантажень. До складних процесів деформування може призводити їх нерівномірне нагрівання разом з силовими чинниками. Для моделювання поведінки таких елементів конструкцій потрібно визначати нестационарний термомеханічний стан не тільки на псевдо-пружній стадії деформування, а й за межею пружності. Тому розробка методів розв'язання таких нестационарних задач термомеханіки для просторових тіл з пам'яттю форми та термо-псевдо-пружно-пластичністю є актуальною задачею.

Псевдо-пружно-пластичність – це здатність матеріалу при активному навантаженні накопичувати деформації певного значення в режимі більш високої температури, а потім після розвантаження (через петлю гістерезису) повертатися до початкового стану. Основним механізмом є зворотна мартенситна трансформація між фазами твердого тіла, яка може відбуватися при кімнатній температурі. Така трансформація може бути викликана зміною температури або за допомогою силових факто-

рів. Матеріал також характеризується нелінійною механічною поведінкою та великими деформаціями.

Сплавами, які демонструють пам'ять форми та псевдо-пружно-пластичність, є такі: NiTiAuCd, CuAlNi, CuSn, CuZn, NiFeGa, NiTiNb, NiNiGa, NiFeGa, NiPi, NiPeGa, NiPiGi [6, 3]. Такі характеристики роблять сплави з пам'яттю форми (СПФ) придатними для використання в різних пристроях або як складові частини в деяких передових композиційних матеріалах. Сплав NiTi лідирує в більшості таких застосувань завдяки своїм структурним властивостям.

Перші СПФ були розроблені в середині минулого століття; однак не існує строгих і надійних визначальних моделей постійного рівня, необхідних для інженерних застосувань цих матеріалів. Взаємозв'язок між мікроскопічною та макроскопічною поведінкою дуже складний і досі не розроблений в тій мірі, якої вимагають такі моделі і практичні задачі. Частково це пояснюється досить сильною залежністю механічних властивостей матеріалу від температури, швидкості навантаження, діапазону деформації, геометрії досліджуваного тіла, термомеханічної історії та природи навколишнього середовища, а також взаємодії між цими параметрами.

За результатами аналізу встановлено, що в даний час існує цілий ряд моделей для опису термомеханічної поведінки СПФ, псевдо-пружністю та псевдо-пружно-пластичністю. Більшість з них будуються на підставі класичних уявлень, тобто ставлять собі за мету безпосередньо описати експериментальні дані, отримані на різних зразках при простому і складному навантаженні. Однак, як встановлено в експериментальних дослідженнях, поведінка матеріалу в точці тіла в загальному випадку відрізняється від поведінки зразка в цілому, і при цьому можуть мати місце значні деформації.

Постановка геометрично нелінійної задачі термо-пружно-пластичності при значних деформаціях. Основною задачею нестационарної теорії термо-пластичності є визначення швидкостей переміщень і компонентів тензорів напружень і деформацій, що виникають у тривимірному тілі в процесі його навантаження та нагріву, коли деякі елементи тіла працюють за межею пружності матеріалу при значних деформаціях. Процес навантаження будемо розглядати таким, який змінюється в часі, що може викликати рух окремих частин тіла.

Спочатку ізотропне однорідне тривимірне тіло, обмежене заданою поверхнею, в початковий момент часу знаходиться в природному ненапруженому стані при визначеній температурі (для кожної точки тіла). Потім тіло піддається нагріву і навантаженню зовнішніми силами. Це можуть бути: об'ємні сили, що впливають на кожен елемент тіла; поверхневі сили, що діють на одній частині поверхні тіла. На другій частині поверхні тіла, яка може бути певним чином закріплена, задаються швидкості переміщень як функції координат і часу.

Припустимо, що нагрів і навантаження тіла протікають так, що виникають деформації, які можуть суттєво впливати на зміну температури цього елемента. Будемо розглядати такі процеси навантаження і рівні

температур, при яких реологічні властивості матеріалу не виявляються. Конфігурація тіла задається рівнянням поверхні, яка обмежує його. Крім того, потрібно задати теплофізичні і механічні характеристики матеріалу тіла і умови його теплообміну з навколишнім середовищем.

Теплофізичні властивості матеріалу характеризуються коефіцієнтами теплопровідності і температуропровідності, які можуть залежати від температури. Умови теплообміну задаються у вигляді відповідних граничних умов, а механічні характеристики матеріалу при дослідженні процесів деформування по прямолінійних траєкторіях і траєкторія малої кривини задаються у вигляді миттєвих діаграм розтягування зразків, отриманих при різних фіксованих температурах. Крім цього, задаються значення коефіцієнтів Пуассона ν і лінійного теплового розширення.

Виходячи з перерахованих даних, необхідно визначити температуру, три складові вектора швидкості переміщень, шість компонент тензора напружень і шість компонент тензора деформацій. Отже, треба визначити шістнадцять невідомих функцій часу і трьох координат. Для цього необхідно скористатися рівняннями руху, геометричними і фізичними рівняннями, а також рівнянням теплопровідності. Температурне поле в довільній точці тіла при наявності в ньому джерел тепла і в разі урахування тепла, яке виділяється в процесі його деформування, визначається шляхом розв'язання рівняння теплопровідності при певних початкових і граничних умовах [7, 4].

Після визначення поля температур для різних моментів часу розшукуються складові вектора швидкості переміщень і компоненти тензорів напружень і деформацій, що задовольняють три диференціальні рівняння руху, шість геометричних рівняння і шість фізичних рівняння. Ці рівняння розв'язуються при певних початкових і граничних умовах.

Визначення невідомих здійснюється за таким алгоритмом. За основні невідомі приймаються три складові вектора швидкості переміщень і шість компонент тензора напружень, для яких безпосередньо формулюються граничні умови. При цьому з шести фізичних рівнянь за допомогою геометрично нелінійних співвідношень Коші виключаються всі компоненти тензора деформацій, які потім визначаються на підставі вже відомих складових вектора швидкості переміщень.

При розв'язанні нестационарної задачі термо-пластичності будемо користуватися визначальними рівняннями, що описують неізотермічні процеси навантаження як по прямолінійних траєкторіях, так і по траєкторіях деформування малої кривини.

Повна система рівнянь. Рівняння руху нескінченно малого об'ємного елемента суцільного середовища, що деформується, в ортогональній системі координат $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ в *геометрично нелінійній* постановці представимо у вигляді [3]

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\sigma_{ij} + \sigma_{in}^0 \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_n} \right) + B(\sigma_{mn}; \dots),$$

$$i, j, n, m=1, 2, 3, \quad (1)$$

де ρ – густина. Величини, які знаходяться в правій частині рівняння (1), наведені в [2, 4]. Швидкість переміщень визначається як похідна від переміщення за часом

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad i=1, 2, 3.$$

Зазначимо, що після визначення швидкостей зміщень визначаються і самі переміщення шляхом безпосереднього інтегрування відповідних швидкостей.

В рамках запропонованого підходу будемо використовувати лінійні рівняння руху нескінченно малого об'ємного елемента суцільного середовища, що деформується. Вони мають вигляд

$$\frac{\partial v_j^0}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial \alpha_i} + B(\sigma_{mn}^0). \quad (2)$$

В формулах (1) і (2) через σ_{ij}^0 та v_j^0 позначено невідомі, які розшукуються за допомогою геометрично лінійного підходу.

Зазначимо, що при деформаціях, менших 7%, рівняння руху (1) доцільно використовувати в геометрично лінійній постановці (2)

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \alpha_i} + B(\sigma_{mn}).$$

В загальному випадку ортогональної системи координат тензор деформацій і складові вектора переміщень пов'язані такими нелінійними співвідношеннями [6]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= e_{11} + \frac{1}{2} \left[e_{11}^2 + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right)^2 + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_{12} &= e_{12} + e_{11} \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) + e_{22} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Інші складові тензора деформацій отримуються з (3) шляхом циклічної перестановки індексів. У випадку використання ортогональної декартової системи координат

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}; e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}; e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3};$$

$$\begin{aligned}
e_{12} &= \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}; e_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_3}; e_{31} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}; \\
2\omega_1 &= \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_3}; 2\omega_2 = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}; 2\omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}.
\end{aligned}
\tag{4}$$

З урахуванням цього, після диференціювання за часом в геометрично нелінійному випадку для швидкостей деформацій можна записати

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} &= (1 + e_{11}) \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1} + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1}; \\
\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial t} &= \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} + (1 + e_{22}) \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} + \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_2}; \\
\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial t} &= \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_3} + \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_3} + (1 + e_{33}) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3}; \\
\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial t} &= \left(1 + \frac{e_{11}}{2} + \frac{e_{22}}{2} \right) \left(\frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} \right) + \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} + \\
&\quad + \frac{(e_{22} - e_{11})}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} \right) + \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1} + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_2}; \\
\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial t} &= \left(1 + \frac{e_{22}}{2} + \frac{e_{33}}{2} \right) \left(\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_3} \right) + \left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} + \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} + \\
&\quad + \frac{(e_{33} - e_{22})}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_3} \right) + \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} + \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_3}; \\
\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial t} &= \left(1 + \frac{e_{33}}{2} + \frac{e_{11}}{2} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1} \right) + \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} + \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \\
&\quad + \frac{(e_{11} - e_{33})}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1} \right) + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_3} + \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1}.
\end{aligned}
\tag{5}$$

Система рівнянь (1), (5) замикається фізичними співвідношеннями, що зв'язують напруження і деформації.

Одним з аспектів загальної проблеми розв'язання нестационарних задач для непружних тіл є вибір визначальних співвідношень зв'язку між напруженнями і деформаціями. Цей вибір обґрунтовується узгодженістю з експериментом і тісно пов'язаний з досліджуваними процесами деформування. У загальному випадку значення деформацій є функціями процесу зміни напружень і температури, які визначаються характеристиками всього попереднього процесу зміни фізичних факторів, а не тільки поточними значеннями. Докладні відомості з цього питання можна знайти в роботах Ю. М. Шевченка і його учнів [5].

Розглянемо прості або близькі до простих процеси деформування і процеси деформування по траєкторіях малої кривини. Траєкторіями деформування, близькими до прямолінійних, називають ті траєкторії, які відхиляються від прямих ліній, що проходять через початок координат і точку на траєкторії, що відповідає початку межі текучості, не більше, ніж на слід запізнювання векторних властивостей матеріалу (5 – 15 меж плинності за деформаціями). У цьому випадку найменший радіус кривизни траєкторії деформування більше сліду запізнювання. Якщо ж відхилення від прямої лінії більше сліду запізнювання, а радіус кривини траєкторії деформування менше його, то деформування відбувається по траєкторії малої кривини. При цьому вектор напружень спрямований по дотичній до траєкторії необоротних деформацій.

Запишемо фізичні співвідношення, придатні для дослідження обох процесів. Для цього розбіємо процес навантаження тіла за часом на окремі досить малі етапи, на кожному з них за допомогою постулату ізотропії і закону пружної зміни обсягу записується зв'язок між напруженнями і деформаціями [4, 5]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = a_{ijkl} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} + b_{ij}, \quad (6)$$

де

$$a_{ijkl} = 2G^* \delta_{kl} \cdot \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{kl} - (1 - \frac{\delta_{kl}}{3})(G^* - G_t) \frac{l_{ij} \cdot l_{kl}}{G^2},$$

$$b_{ij} = b_T \delta_{ij}, \quad b_T = - \left[K \cdot \alpha_t + (T - T_0) \frac{\partial}{\partial t} (K \cdot \alpha_t) \right] \cdot \frac{\partial T}{\partial t}.$$

До вигляду, аналогічному (6), приводяться і співвідношення теорії процесів малої кривини. Тут

$$a_{kkkk} = 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu}, a_{kknn} = 2G \frac{\nu}{1-2\nu}, a_{knkn} = 2G, a_{knrr} = a_{knrs} = a_{kkrs} = 0, \quad (7)$$

$$b_{ij} = b_T \delta_{ij} - \sqrt{2} G \frac{S_{ij}}{S} (\dot{\varepsilon}_{ij}^{(n)} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^{(n)})^{1/2}, \quad k \neq n, \quad r \neq S.$$

Для подальшого викладання матеріалу приведемо вказані рівняння системи до дещо іншого вигляду. Виконаємо виключення швидкостей деформацій в визначальних співвідношеннях (6) за допомогою геометрично нелінійних співвідношень (5). Тоді можна записати

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = & C_{ij11} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + C_{ij21} \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1} + C_{ij31} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1} + C_{ij12} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} + C_{ij22} \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} + C_{ij32} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_2} + \\ & + C_{ij13} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_3} + C_{ij23} \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_3} + C_{ij33} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} \equiv C_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial \alpha_r}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут введено додаткові позначення

$$\begin{aligned}
C_{ij11} &= a_{ij11}(1+e_{11}) + a_{ij12}\left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3\right) + a_{ij13}\left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2\right), \\
C_{ij21} &= a_{ij11}\left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3\right) + a_{ij12}(1+e_{22}) + a_{ij13}\left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1\right), \\
C_{ij31} &= a_{ij11}\left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2\right) + a_{ij12}\left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1\right) + a_{ij13}(1+e_{33}).
\end{aligned}
\tag{9}$$

Всі інші коефіцієнти отримуються з (9) шляхом циклічної перестановки індексів.

Таким чином, одержана розрахункова система рівнянь (1), (8), необхідна для розв'язання нестационарних тривимірних задач теорії термопружно-пластичності. Зазначимо, що після визначення швидкостей переміщень та складових тензора напружень, які в запропонованій постановці задачі є основними невідомими, визначаються самі переміщення (шляхом безпосереднього інтегрування відповідних швидкостей) і деформації за допомогою формул (5).

При числовому розв'язанні задач температурної пластичності матеріалів для конкретизації коефіцієнтів визначальних фізичних співвідношень (6) задається миттєва термомеханічна поверхня. Вона будується за допомогою експериментальних даних при дослідженні зразків на розтягування при різних фіксованих температурах. Ця функція для деяких класів попередньо ізотропних матеріалів з великим ступенем точності не залежить від типу напруженого стану.

На рис. 1 показаний типовий графік залежностей σ від ϵ , які визначаються в результаті експериментів для псевдо-пружно-пластичного матеріалу при сталій температурі для матеріалів з пам'яттю форми МПФ [1, 3, 7].

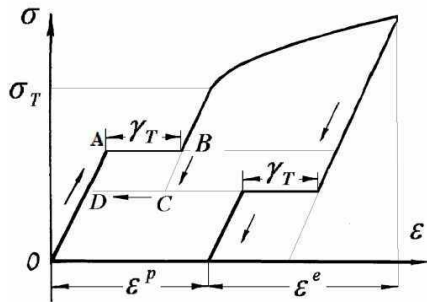


Рис. 1 – Діаграма псевдо-пружно-пластичного матеріалу

Діаграми мають початковий лінійний переріз OA. Процеси деформації на ньому зворотні. Збільшення і зменшення напружень йдуть за прямою лінією, а деформації невеликі. У точці С пружна складова загальної

деформації зразка зникає. Стрибок деформації, викликаний фазовим переходом, також зникає і залишається лише пластична деформація.

Приклади застосування матеріалів з пам'яттю форми. Найчастіше функціональні матеріали з ефектом пам'яті форми застосовуються в сучасній техніці і медицині. Проектування пристроїв з елементами з МПФ значно відрізняється від розробки деталей із конструкційних матеріалів. За особливостями застосування пристроїв з ефектом пам'яті форми їх розбивають на кілька груп [6].

За принципом роботи пристрої поділяють на надпружні, які спрацюють один раз, та такі, які спрацюють багато разів.

За умовами протидії формозміни елемента з пам'яттю форми пристрою, існують такі варіанти. Відновлення форми виробів відбувається за відсутності протидії, тобто у вільному стані. Формозміна виробу здійснюється в умовах жорсткої протидії (термомеханічні з'єднання). У процесі відновлення форми протидія незначна або може змінюватися за величиною (термосилові елементи).

Однією з найбільш затребуваних в наш час областю застосування МПФ є медицина. Існує значна кількість таких імплантів з МПФ. Важливою особливістю тут є надпружна поведінка при температурі тіла людини. У такому стані імпланти здатні до значних змін своєї форми під дією функціонального навантаження. При цьому жорсткість імпланту близька до жорсткості біологічних тканин, які він повинен замінити або зміцнити (рис. 2).

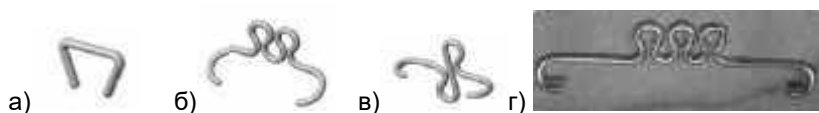


Рис. 2 – Зовнішній вигляд деяких імплантів [8]:
а) – фіксатор для з'єднання фрагментів плуєснєвої кїстки;
б) – межостїсна зв'язка;
в) – їмпланти, які застосовуютьсє в стоматологїї;
г) – фіксатор для стабілізацїї хребта

На наш погляд, характерною особливістю усіх цих деталей є наявність точок тонкого тіла зі значною зміною кривини. Це означає, що при їх виготовленні з МПФ при відповідній температурі прутков в таких точках зазнавав значні пластичні деформації.

Таким чином, конфїгурація області їнтегрування (тіла) в кожен момент часу визначається полем перемїщень. Загальна геометрично нелїнійна задача термо-пружно-пластїчностї полягає у визначенні вектора перемїщень, швидкостей перемїщень, тензорів напружень та деформацїї ї температурного поля. Усі вони задовольняють повну систему рївнянь: рївняння руху (рївноваги), визначальні спїввідношення, рївняння теплопровідностї, кїнематичні спїввідношення, граничні умови ї початкові умови.

Числові результати та їх обговорення. Розрахунок елементів конструкції, що трансформуються, в основному зводиться до вибору оптимальної схеми і ступеня деформації, які дозволяють визначити геометрію цього елемента і технологію його застосування. При виборі схеми деформації будемо керуватися такими міркуваннями. Максимальні переміщення можна реалізовувати при деформації вигином, мінімальні – при стисканні. При цьому ступінь деформації елемента, призначеного для багаторазового спрацьовування, не повинна перевищувати критичну ступінь деформації (до руйнування). В цьому випадку при нагріванні буде спостерігатися майже повне відновлення форми і після охолодження до робочої температури елемент можна повторно деформувати і нагрівати без небезпеки порушення його геометрії.

Розглянемо числових приклад: вигин прутка діаметром 0,01 м із МПФ у тривимірній постановці. Правий край затиснутий, тому радіальне переміщення дорівнює нулю. На лівому краю (10 мм від защемленого правого краю) задається швидкість радіального переміщення. Процес навантаження відбувається до моменту, коли в околі защемлення не виникають значні деформації, більше 15% при температурі 100° С. Поле інтенсивності в точці максимального вигину прутка подано на рис. 3.

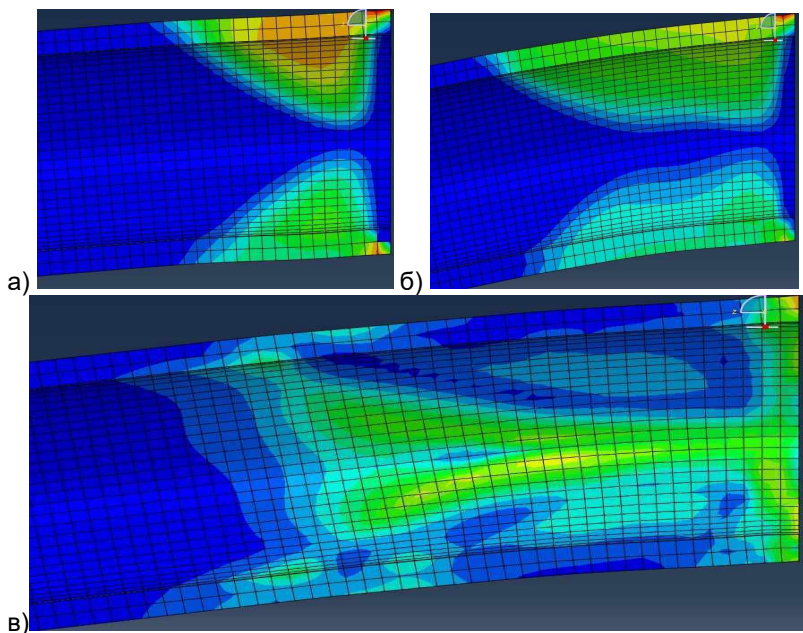


Рис. 3 – Поле інтенсивності деформації в точці максимального вигину:

- а) – деформація 15%, температура 100° С;
- б) – розподіл інтенсивності деформації після початку охолодження (80° С);
- в) – розподіл інтенсивності деформації при охолодженні до робочої температури 20° С

Висновки. Розроблено новий варіант методу дослідження поведінки елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів, який можна застосовувати в задачах термо-пружно-пластичності при наявності великих деформацій.

Розв'язано новий клас нестационарних задач теорії термopружної пластичності для псевдо-пружно-пластичних матеріалів із пам'яттю форми, в якому врахована можливість виникнення в деяких точках тіла значних пластичних деформацій.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Коллеров М.Ю., Гусев Д.Е., Гуртовая Г.В., Ручина Н.В., Гвоздева О.Н.** Функциональные материалы с эффектом памяти формы. М., 2015. 161 с.
2. **Новожилов В.В.** Теория упругости. Л: Судпромгиз, 1958. 371 с.
3. **Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.** Большие упруго-пластические деформации. Теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
4. **Стеблянко П.А.** Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности. К.: Наукова думка, 1998. 304 с.
5. **Шевченко Ю.Н. Саеченко В.Г.** Пространственные задачи термо-вязко-пластичности: фокус на украинские исследования (обзор) // Прикладная механика, 2016. Т. 52. № 3. С. 3–70.
6. **Abeyaratne R., Knowles J.K.,** Evolution of Phase Transitions: A Continuum Theory // Cambridge University Press: 2006, 242 p.
7. **Petrov A., Chernyakov Yu., Steblyanko P., Demichev K., Haydurov V.** Development of the method with enhanced accuracy for solving problems from the theory of thermopseudoelastic-plasticity // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 4/7 (94). P. 25–33.
8. **Shaw J.A., Kyriakides S.** Initiation and propagation of localized deformation in elastoplastic strips under uniaxial tension // International Journal of Plasticity. 1998. Vol.13. P. 837–871.
9. **Steblyanko P., Shevchenko Yu.** Computational methods in stationary and non-stationary thermal-plasticity problems. ETS-Encyclopedia of Thermal Stresses, Springer Verlag. 2014. N 7. P. 630–636.
10. **Steblyanko P., Chernyakov Yu., Petrov A., Loboda V.** Phenomenological Model of Pseudo-Elastic-Plastic Material Under Nonstationary Combining Loading // Structural Integrity, Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, Springer Verlag, 2019. Vol. 8. P. 205–208.

УДК 693.3

П. А. Стеблянко¹, д-р физ.-мат. наук,
К. Е. Демичев², канд. техн. наук, А. Д. Петров³, PhD

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ МАТЕРИАЛОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ПРИ ЗНАЧИТЕЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Исследовано поведение функционально-неоднородных материалов на примере материалов с памятью формы при значительных деформациях (до 15%). При построении физических соотношений предполагается, что

деформация в точке представлена как сумма упругой составляющей, скачка деформации при фазовом переходе, пластической деформации и деформации, вызванной изменениями температуры. Задача рассматривается в геометрически нелинейной постановке. При решении задачи упругопластичности учитывается и нелинейность в уравнениях движения и геометрических соотношениях (при деформациях от 7% до 15%).

Ключевые слова: функционально-неоднородные материалы; математическое моделирование; геометрическая нелинейность; материалы с памятью формы.

UDC 539.3

*P. A. Steblyanko¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
K. E. Domichev², PhD (Tech.), A. D. Petrov³, PhD*

SIMULATION OF BEHAVIOR OF ELEMENTS MADE FROM MATERIALS WITH FORM MEMORY AT SIGNIFICANT DEFORMATIONS

The work is devoted to the study of the behavior of functionally inhomogeneous materials on the example of materials with shape memory at significant deformations (up to 15%). When constructing physical relations, it is assumed that the deformation at a point is represented as the sum of the elastic component, the jump deformation during the phase transition, plastic deformation and deformation caused by changes in temperature. The problem is posed in a geometrically nonlinear formulation. When solving the problem of elastic-plasticity, nonlinearity in the equations of motion is taken into account (at deformations from 7% to 15%).

Keywords: functionally inhomogeneous materials; mathematical modeling; geometric nonlinearity of materials with shape memory.

Introduction. Modern parts and elements of structures and devices are made of materials that have the property of shape memory and behave pseudo-elastic-plastic. In the manufacturing process, they can receive large plastic deformations, be under the influence of complex non-stationary force and temperature load. Their uneven heating in combination with force factors can also lead to complex deformation processes. To model the behavior of such structural elements, it is necessary to determine the nonstationary thermo-mechanical state not only at the pseudo-spring stage of deformation, but also beyond the boundary. Existing numerical methods for solving such non-stationary problems usually lead to significant computational difficulties and are not always effective. Therefore, the development of methods for solving non-stationary problems of thermo-mechanics for spatial bodies with shape memory and pseudo-elastic-plasticity is an urgent task.

Pseudo-elastic-plasticity is the ability of a material under active load to accumulate deformations of a certain value in the mode of higher temperature, and then after unloading (through the hysteresis loop) to return to the initial state. The main mechanism is the inverse martensitic transformation between the phases of the solid, which can occur at room temperature. Such a transformation can be caused by a change in temperature or by force factors. The material is also characterized by nonlinear mechanical behavior and large deformations. Alloys that exhibit shape memory and pseudo-

elastic-plasticity are as follows: NiTiAuCd, CuAlNi, CuSn, CuZn, NiFeGa, NiTiNb, NiNiGa, NiFeGa, NiPi, NiPeGa, NiPiGi [1; 3]. Such characteristics make SPF suitable for use in various devices or as components in some advanced composite materials. NiTi alloy leads in most such applications due to its structural properties.

The first shape memory alloys (SPFs) were developed in the middle of the last century; however, there are no rigorous and reliable fixed-level defining models required for the engineering applications of these materials. The relationship between microscopic and macroscopic behavior is very complex and has not yet been developed to the extent required by such models and practical tasks. This is partly due to the strong dependence of mechanical reactions on temperature, load velocity, deformation range, geometry of the studied body, thermo-mechanical history and nature of the environment, as well as the interaction between these parameters.

The analysis shows that there are currently a number of models to describe the thermo-mechanical behavior of alloys with shape memory, pseudo-elasticity and pseudo-elastic-plasticity. Most of them are based on classical ideas, in aim to directly describe the experimental data obtained on different samples under simple and complex loads. However, as established in experimental studies, the behavior of the material at the point of the body in the General case differs from the behavior of the sample as a whole and there may be significant deformations.

Formulation of the problem. The main task of the nonstationary theory of thermo-plasticity is to determine the velocities and components of stress and strain tensors that occur in a three-dimensional body during its loading and heating, when some elements of the body work beyond the elasticity of the material at significant deformations. The process of loading will be considered as changing over time, which can cause movement of certain parts of the body.

Initially, an isotropic and homogeneous three-dimensional body bounded by a given surface is initially in a natural unstressed state at a certain temperature (for each point of the body). Then the body is subjected to heating and loading by external forces. These can be three-dimensional forces that affect each element of the body. Surface forces act on one part of the body surface. On the second part of the surface of the body, which can be fixed in some way, the velocities are set as a function of coordinates and time.

Suppose that the heating and loading of the body occur so that there are deformations that can significantly affect the temperature change of this element. We will consider such load processes and temperature levels at which the rheological properties of the material are not detected. The configuration of a body is given by the equation of the surface that limits it. In addition, you need to specify the thermophysical and mechanical characteristics of the body material and the conditions of its heat exchange with the environment.

Thermo-physical properties of the material are characterized by coefficients of thermal conductivity and thermal conductivity, which may depend on temperature. The heat transfer conditions are set in the form of appropriate

ate boundary conditions, and the mechanical characteristics of the material in the study of deformation processes on straight trajectories and the trajectory of small curvature are set in the form of instantaneous tensile diagrams of samples obtained at different fixed temperatures. In addition, the values of the Poisson's ratios and linear thermal expansion are set.

Based on these data, it is necessary to determine the temperature, the three components of the velocity vector, the six components of the stress tensor and the six components of the strain tensor. Therefore, it is necessary to determine sixteen unknown functions of time and three coordinates. To do this, use the equations of motion, geometric and physical equations, as well as the equation of thermal conductivity. The temperature field at any point of the body in the presence of heat sources and in the case of heat, which is released during its deformation, is determined by solving the equation of thermal conductivity under certain initial and boundary conditions [2; 4].

After determining the temperature field for different points in time, the components of the velocity vector and components of stress and strain tensors satisfying three differential equations of motion, six geometric equations and six physical equations are searched. These equations are solved under certain initial and boundary conditions. The initial conditions are set for all unknowns at the initial time. On the part of the body surface where the forces $b(x_i, t)$ are given, the components of the stress tensor must satisfy three boundary conditions

$$\sigma_{in}(\alpha_k, t) = \sigma_{ij} \cdot n_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Where n_j – the directing cosines of the external normal to the body surface at the appropriate point. On the other part of the surface, where the specified components of the vector of the velocity, the velocity must take the specified values

$$v_i = V_i(x_j, t).$$

Another formulation of the boundary conditions is possible, when three conditions are set on the surface of the body, taken in a certain way from the above conditions.

The definition of the unknown will be found as follows. The main unknowns are three components of the velocity vector and six components of the stress tensor, for which the boundary conditions are directly formulated. In this case, all components of the strain tensor are excluded from the six physical equations by means of geometrically nonlinear Cauchy relations, which are then determined on the basis of already known components of the velocity vector.

When solving the nonstationary thermo-plasticity problem, we will use the defining equations that describe nonisothermal loading processes along both rectilinear trajectories and small curvature deformation trajectories.

Conclusion. A new variant of the method of studying the behavior of structural elements made of functionally inhomogeneous materials has been

developed, which can be used in thermo-elastic-plasticity problems in the presence of large deformations.

A new class of nonstationary problems of the theory of thermoelastic plasticity for pseudo-elastic-plastic materials with shape memory, which takes into account the possibility of significant plastic deformations in some parts of the body, is solved

REFERENCES

1. **Kollerov M.Yu., Gusev DE, Gurtovaya GV, Ruchina NV, Gvozdeva ON.** Functional materials with shape memory effect. M., 2015. 161 p. (in Russian).
2. **Novozhilov V.V.** Elasticity theory. Leningrad: Sudpromgiz, 1958. 371 p. (in Russian).
3. **Pozdeev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I.** Large elastic-plastic deformations. Theory, algorithms, applications. Moscow: Nauka, 1986. 232 p. (in Russian).
4. **Steblyanko P.A.** Splitting methods in spatial problems of plasticity theory. Kiev: Naukova Dumka, 1998. 304 p. (in Russian).
5. **Shevchenko Y.N. Savchenko V.G.** Spatial problems of thermo-viscous-plasticity: focus on Ukrainian research (review) // Applied Mechanics. 2016. Vol. 52. No. 3. P. 3–70. (in Russian).
6. **Abeyaratne R., Knowles J.K.,** Evolution of Phase Transitions: A Continuum Theory // Cambridge University Press, 2006. 242 p.
7. **Petrov A. Chernyakov Yu., Steblyanko P., Demichev K., Haydurov V.** Development of the method with enhanced accuracy for solving problems from the theory of thermo-pseudoelastic-plasticity // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 4/7 (94). P. 25–33.
8. **Shaw J.A., Kyriakides S.** Initiation and propagation of localized deformation in elasto-plastic strips under uniaxial tension // International Journal of Plasticity. 1998. Vol.13. P. 837–871.
9. **Steblyanko P., Shevchenko Yu.,** Computational methods in stationary and non-stationary thermal-plasticity problems. ETS-Encyclopedia of Thermal Stresses, Springer Verlag. 2014. No 7. P. 630–636.
10. **Steblyanko P., Chernyakov Yu., Petrov A., Loboda V.** Phenomenological Model of Pseudo-Elastic-Plastic Material Under Nonstationary Combining Loading // Structural Integrity, Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, Springer Verlag, 2019. Vol. 8. P. 205–208.

¹ Університет митної справи і фінансів,
Дніпро, Україна,

² Київський міжнародний університет,
Київ, Україна,

³ Дніпровський національний
університет імені Олеся Гончара,
Дніпро, Україна

Надійшла до редколегії 05.10.2020

DOI 10.15421/4220019
УДК 621.01:62-251:62-762

С. С. Шевченко, канд. техн. наук

МОДЕЛЬ И РАСЧЕТ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РОТОР – ЩЕЛЕВЫЕ УПЛОТНЕНИЯ

Построены модель гидромеханической системы ротор – щелевые уплотнения, модели однодисковых роторов, расчётная схема щелевого уплотнения с подвижной втулкой. Получены аналитические зависимости для расчета динамических характеристик гидромеханической системы, описывающие радиально - угловые колебания ротора центробежной машины в щелевых уплотнениях. Получены выражения для построения амплитудных и фазовых частотных характеристик

Ключевые слова: математическая модель; гидромеханическая система; радиально – угловые колебания; частотные характеристики.

Введение. В процессе создания центробежных насосов на любые параметры, помимо отработки экономичной проточной части, первостепенными задачами являются снижение вибраций, обеспечение требуемой надежности и долговечности опор и разработка надежных и достаточно герметичных уплотнений [1]. В центробежных насосах до 10% потребляемой мощности теряется на протечки через щелевые уплотнения рабочих колес и системы авторазгрузки осевых сил [6]. Энергию объемных потерь можно превратить в полезную энергию, если щелевые уплотнения использовать одновременно как гидростатические опоры, способные обладать не только большой радиальной жесткостью, но и эффективно демпфировать колебания ротора [7]. В этом случае энергия протечек не только может обеспечить необходимую несущую способность опор, но и снизить до допустимого уровня вибрации ротора даже при наличии значительной неуровновешенности [4]. Влияние среды особенно существенно при наличии больших градиентов скоростей и давлений, что характерно для малых зазоров щелевых уплотнений, на которых дросселируются большие перепады давления, а одна из стенок принадлежит вращающемуся и вибрирующему ротору [8].

Анализ литературы. Как указано в [5], ротор и щелевые уплотнения представляют замкнутую гидромеханическую систему. Этим обусловлена основная особенность и сложность проблем динамики роторов центробежных машин. Уплотнения не только изменяют критические частоты ротора, но и существенно влияют на амплитуды его вынужденных колебаний и на границы его устойчивости [2].

Динамические характеристики щелевых уплотнений как промежуточных опор исследованы в [12]. В ней получены линеаризованные вы-

ражения радиальных гидродинамических сил и моментов, действующих на ротор со стороны потока жидкости в зазоре щелевого уплотнения. Силовые характеристики определяются геометрическими и режимными параметрами уплотнений: начальной конусностью и радиальным зазором, длиной и средним радиусом канала, дросселируемым перепадом давления, частотой вращения ротора, закруткой потока на входе в зазор, физическими свойствами жидкости. Анализ влияния щелевых уплотнений на динамику ротора позволяет выбирать их конструкцию так, чтобы во всем рабочем диапазоне уровень вибраций ротора не выходил за допустимые пределы [3].

Однако проблемы динамики роторов в щелевых уплотнениях несколько обойдены вниманием, поскольку для их решения требуется знание гидродинамических характеристик щелевых уплотнений. А это отдельная задача гидродинамики трехмерных нестационарных течений вязкой жидкости в кольцевых каналах, стенки которых вращаются и одновременно совершают радиально-угловые колебания [9].

Анализ литературы показал, что колебательные процессы, обусловленные гидродинамическими характеристиками уплотнений, и их влияние на динамику роторов недостаточно изучены.

Цель статьи. Получение аналитических зависимостей для расчета динамических характеристик гидромеханической системы ротор - щелевые уплотнения на основании построения и изучения её модели.

Постановка проблемы. Рассматриваются две типовые схемы однодискового ротора: с диском, находящимся между жесткими опорами (рис. 1,а) несимметричного (модель Р-1), симметричного $a = b$ (модель Р-1с) и консольного (рис. 1,б, модель Р-2). С обеих сторон диска (рабочего колеса) с массой m радиусом R и приведенной толщиной b_e расположены одинаковые щелевые уплотнения.

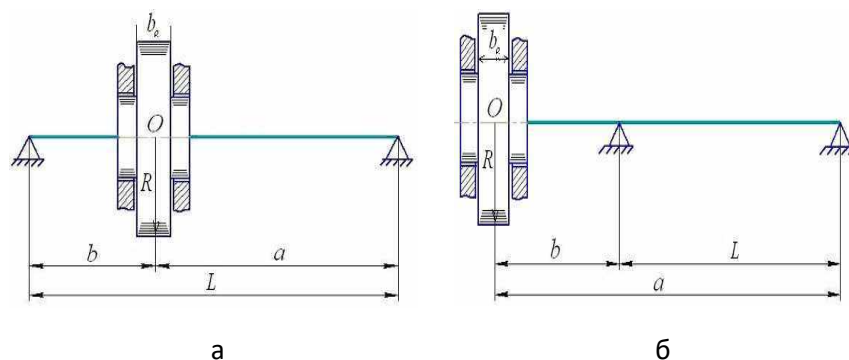


Рис. 1 – Типовые схемы однодискового ротора в щелевых уплотнениях: а – с диском между опорами (модели Р-1, Р-1с); б – консольного (модель Р-2)

Первая схема имитирует ротор одноступенчатого насоса с рабочим колесом двустороннего входа, вторая – ротор консольного насоса.

В обеих схемах радиальные смещения диска сопровождаются его поворотом в плоскости изогнутой оси вала. Инерционное сопротивление повороту характеризуется соответствующим гироскопическим моментом диска. Масса ротора сосредоточена в центре масс диска, а невесомый упругий вал вращается в жестких опорах.

Ротор статически и динамически неуравновешен: центр масс смещен относительно геометрического центра на величину эксцентриситета $\vec{a}(a_x, a_y)$, который представляет статическую неуравновешенность.

Главные центральные оси инерции диска из-за перекоса посадки или других технологических погрешностей отклонены от главных осей сечения вала (главных осей жесткости вала) на углы γ_x, γ_y , характеризующие динамическую неуравновешенность ротора. Параметры неуравновешенности считаются заданными малыми величинами.

Модель динамической системы ротор – щелевые уплотнения.

Упрощенная структурная схема системы ротор – щелевые уплотнения, показана на рис. 2. Радиальные (x, y) и угловые (ϑ_x, ϑ_y) колебания ротора во многом определяются гидродинамическими силами (F) и моментами (M), возникающими в уплотняющих зазорах (в кольцевых дросселях), а сами силы и моменты зависят от характера движения ротора и эксцентриситета его центра масс a . Еще одна обратная связь существует между геометрической формой зазора (средний радиальный зазор H и конусность ϑ_2) и давлением в зазоре $p(z, \varphi)$: деформации уплотнительных колец определяются распределением давления, которое очень чувствительно к изменению величины и формы зазора. От скорости потока жидкости в зазоре w зависит также величина расхода через уплотнение Q .

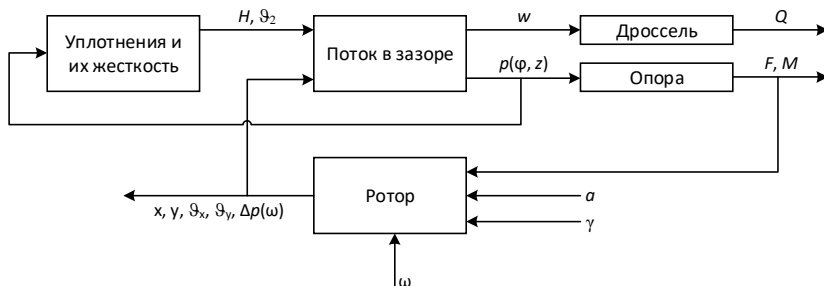


Рис.2 – Структурная схема гидромеханической системы ротор – щелевые уплотнения

Таким образом, при выборе конструкции щелевых уплотнений нужно учитывать не только их прямое назначение – уменьшать объемные по-

тери, но и не менее важную их функцию – обеспечивать необходимые вибрационные характеристики ротора.

Радиальные силы и моменты в щелевых уплотнениях. На рис. 3 показана модель щелевого уплотнения, которая представляет собой кольцевой дроссель, образованный внутренним цилиндром (валом) с малым углом конусности ϑ_A и внешним цилиндром (втулкой) с углом конусности ϑ_B ; суммарный угол конусности канала $\vartheta_0 = \vartheta_B - \vartheta_A$. Параметр конусности канала $\theta_0 = \vartheta_0 l / 2H$, $|\theta_0| \leq 1$.

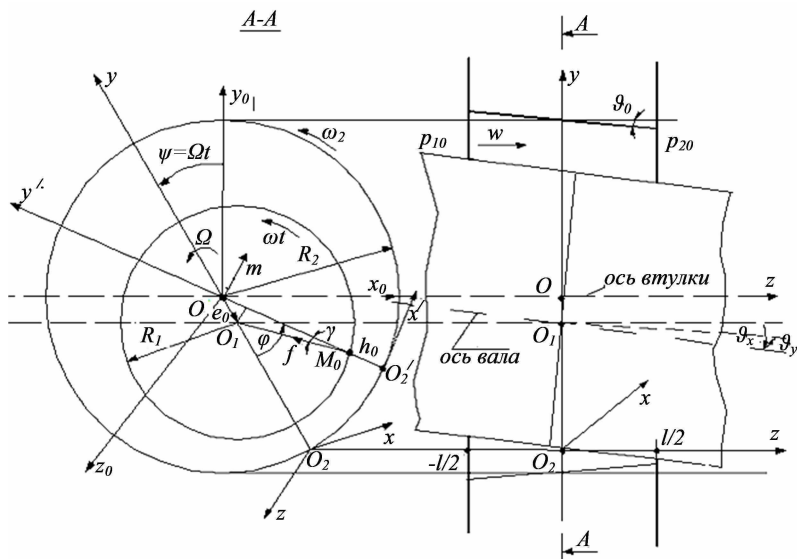


Рис. 3 – Модель щелевого уплотнения с подвижной втулкой

Вал и втулка вращаются вокруг собственных осей с частотами собственного вращения ω_1, ω_2 . Сами оси вращаются вокруг неподвижного центра O с частотами прецессии Ω_1, Ω_2 , а также совершают радиальные и угловые колебания. Оценка силовых характеристик для ламинарных и турбулентных режимов течения с учетом местных сопротивлений и с учетом закрутки потока на входе в зазор была проведена в [11].

Проекции на неподвижные оси координат отдельных составляющих гидродинамических сил и моментов

$$F_{s(x,y)} = F_{g(x,y)} + F_{d(x,y)} + F_{p(x,y)}, \quad M_{s(x,y)} = M_{g(x,y)} + M_{d(x,y)} + M_{p(x,y)},$$

возникающих в одном щелевом уплотнении и отнесенных к массе ротора, имеют вид:

- силы и моменты, обусловленные инерцией жидкости:

$$\begin{aligned}\frac{F_{gx}}{m} &= -k_g \left[\ddot{x} - \frac{12\theta_0 q_0}{Hl(2-n)} \dot{x} + \kappa\omega_a \dot{y} - \frac{2}{15} \kappa\omega_a \theta_0 \frac{l}{2} \dot{\vartheta}_x \right], \\ \frac{F_{gy}}{m} &= -k_g \left[\ddot{y} - \frac{12\theta_0 q_0}{Hl(2-n)} \dot{y} - \kappa\omega_a \dot{x} - \frac{2}{15} \kappa\omega_a \theta_0 \frac{l}{2} \dot{\vartheta}_y \right],\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\frac{M_{gx}}{m} &= -k_g \frac{l}{30} \left(\frac{l}{2} \ddot{\vartheta}_x + 2\kappa\omega_a \theta_0 \dot{x} + \kappa\omega_a \frac{l}{2} \dot{\vartheta}_y \right), \\ \frac{M_{gy}}{m} &= -k_g \frac{l}{30} \left(\frac{l}{2} \ddot{\vartheta}_y + 2\kappa\omega_a \theta_0 \dot{y} - \kappa\omega_a \frac{l}{2} \dot{\vartheta}_x \right);\end{aligned}\quad (2)$$

- силы и моменты, обусловленные потоком вытеснения:

$$\begin{aligned}\frac{F_{dx}}{m} &= -k_d \left[\dot{x} + \kappa\omega_a y - \frac{l}{5} \theta_0 (\kappa\omega_a \vartheta_x - \dot{\vartheta}_y) \right], \\ \frac{F_{dy}}{m} &= -k_d \left[\dot{y} - \kappa\omega_a x - \frac{l}{5} \theta_0 (\kappa\omega_a \vartheta_y + \dot{\vartheta}_x) \right],\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned}\frac{M_{dx}}{m} &= -k_d \frac{l}{5} \left[\theta_0 (\dot{y} - \kappa\omega_a x) + \frac{l}{12} (\kappa\omega_a \vartheta_y + \dot{\vartheta}_x) \right], \\ \frac{M_{dy}}{m} &= k_d \frac{l}{5} \left[\theta_0 (\dot{x} + \kappa\omega_a y) + \frac{l}{12} (\kappa\omega_a \vartheta_x - \dot{\vartheta}_y) \right];\end{aligned}\quad (4)$$

- силы и моменты, обусловленные дросселируемым на щелевом уплотнении перепадом давления Δp_0 (напорным течением):

$$\begin{aligned}\frac{F_{px}}{m} &= -k_p \left[(\theta_0 + N\chi_m)x + (1 + 2\Delta\chi) \frac{l}{2} \vartheta_y \right], \\ \frac{F_{py}}{m} &= -k_p \left[(\theta_0 + N\chi_m)y - (1 + 2\Delta\chi) \frac{l}{2} \vartheta_x \right],\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}\frac{M_{px}}{m} &= -k_p \frac{l}{6} \left[N\Delta\chi y - 2\chi_m \frac{l}{2} \vartheta_x \right], \\ \frac{M_{py}}{m} &= k_p \frac{l}{6} \left[N\Delta\chi x + 2\chi_m \frac{l}{2} \vartheta_y \right].\end{aligned}\quad (6)$$

Перейдем в формулах (1) – (6) к безразмерным координатам и приведенным силам и моментам, а также введем дополнительные обозначения

$$K_i = \frac{12q_0}{Hl(2-n)}, \quad j = \frac{ml^2}{60I}$$

где K_i – параметр, учитывающий локальную составляющую силы инерции жидкости; j – безразмерный параметр, характеризующий гидродинамические моменты в щелевом уплотнении: он преобразует коэффициенты радиальной жесткости k_g, k_d, k_p в соответствующие коэффициенты угловой жесткости $k_g j, k_d j, k_p j$. Выражения для вычисления силовых коэффициентов, входящих в формулы (1) – (6), были получены в [1] табл. 8.1.

Радиально-угловые колебания ротора в щелевых уплотнениях.

Рассматривается ротор, вращающийся в двух симметрично расположенных щелевых уплотнениях с неподвижными внешними обоймами.

Значения сил и моментов будем удваивать по числу уплотнений. Для удобства дальнейших преобразований будем группировать составляющие по их зависимости от обобщенных координат (F_3^*, M_3^*) , обобщенных скоростей (F_2^*, M_2^*) и обобщенных ускорений (F_1^*, M_1^*) :

$$\begin{aligned} -F_{1x}^* &= 2k_g \ddot{u}_x, \quad -F_{1y}^* = 2k_g \ddot{u}_y, \quad -M_{1x}^* = -2k_g j \ddot{\theta}_x, \quad -M_{1y}^* = 2k_g j \ddot{\theta}_y; \\ -F_{2x}^* &= 2(k_d + k_g K_i \theta_0) \dot{u}_x + k_g \kappa \omega \dot{u}_y - \frac{2}{15} k_g \kappa \omega \theta_0 \dot{\theta}_x + \frac{4}{5} k_d \theta_0 \dot{\theta}_y; \\ -F_{2y}^* &= -k_g \kappa \omega \dot{u}_x + 2(k_d + k_g K_i \theta_0) \dot{u}_y - \frac{4}{5} k_d \theta_0 \dot{\theta}_x - \frac{2}{15} k_g \kappa \omega \theta_0 \dot{\theta}_y; \\ -M_{2x}^* &= j(2k_g \kappa \omega \theta_0 \dot{u}_x + 12k_d \theta_0 \dot{u}_y + 2k_d \dot{\theta}_x + k_g \kappa \omega \dot{\theta}_y); \\ -M_{2y}^* &= j(-12k_d \theta_0 \dot{u}_x + 2k_g \kappa \omega \theta_0 \dot{u}_y - k_g \kappa \omega \dot{\theta}_x + 2k_d \dot{\theta}_y); \\ -F_{3x}^* &= 2k_p(\theta_0 + N\chi_m)u_x + k_d \kappa \omega u_y - \frac{2}{5} k_d \kappa \omega \theta_0 \theta_x + 2k_p(1 + 2\Delta\chi)\theta_y; \\ -F_{3y}^* &= -k_d \kappa \omega u_x + 2k_p(\theta_0 + N\chi_m)u_y - 2k_p(1 + 2\Delta\chi)\theta_x - \frac{2}{5} k_d \kappa \omega \theta_0 \theta_y; \\ -M_{3x}^* &= j(-6k_d \kappa \omega \theta_0 u_x + 10k_p N\Delta\chi u_y - 20k_p \chi_m \theta_x + k_d \kappa \omega \theta_y); \\ -M_{3y}^* &= j(-10k_p N\Delta\chi u_x - 6k_d \kappa \omega \theta_0 u_y - k_d \kappa \omega \theta_x - 20k_p \chi_m \theta_y). \end{aligned}$$

Введем обозначения удвоенных коэффициентов сил

$$\begin{aligned} a_{31} &= 2k_g; a_{21} = 2(k_d + k_g K_i \theta_0); a_{41} = k_g \kappa \omega; \alpha_2 = \frac{2}{15} k_g \kappa \omega \theta_0; \alpha_4 = \frac{4}{5} k_d \theta_0; \\ a_{31} &= 2k_p(\theta_0 + N\chi_m); a_{51} = k_d \kappa \omega; \alpha_3 = \frac{2}{5} k_d \kappa \omega \theta_0; \alpha_5 = 2k_p(1 + 2\Delta\chi). \end{aligned}$$

Теперь выражения относительных сил и моментов для двух щелевых уплотнений принимают вид:

$$-F_{1x}^* = a_{31}\ddot{u}_x; \quad -F_{1y}^* = a_{11}\ddot{u}_y; \quad -M_{1x}^* = a_{11}j\ddot{\theta}_x; \quad -M_{1y}^* = a_{11}j\ddot{\theta}_y; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} -F_{2x}^* &= a_{21}\dot{u}_x + a_{41}\dot{u}_y - \alpha_2\dot{\theta}_x + \alpha_4\dot{\theta}_y; \\ -F_{2y}^* &= -a_{41}\dot{u}_x + a_{21}\dot{u}_y - \alpha_4\dot{\theta}_x - \alpha_2\dot{\theta}_y; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} -M_{2x}^* &= j[15\alpha_2\dot{u}_x + 15\alpha_4\dot{u}_y + 2k_d\dot{\theta}_x + a_{41}\dot{\theta}_y]; \\ -M_{2y}^* &= j[-15\alpha_4\dot{u}_x + 15\alpha_2\dot{u}_y - a_{41}\dot{\theta}_x + 2k_d\dot{\theta}_y]; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} -F_{3x}^* &= a_{31}u_x + a_{51}u_y - \alpha_3\theta_x + \alpha_5\theta_y; \\ -F_{3y}^* &= -a_{51}u_x + a_{31}u_y - \alpha_5\theta_x - \alpha_3\theta_y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -M_{3x}^* &= j\left(-15\alpha_3u_x + 5\alpha_5\frac{N\Delta\chi}{1+2\Delta\chi}u_y - 10a_{31}\frac{\chi_m}{\theta_0 + N\chi_m}\theta_x + a_{51}\theta_y\right); \\ -M_{3y}^* &= j\left(-5\alpha_5\frac{N\Delta\chi}{1+2\Delta\chi}u_x - 15\alpha_3u_y - a_{51}\theta_x - 10a_{31}\frac{\chi_m}{\theta_0 + N\chi_m}\theta_y\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Для симметричных статически неуравновешенных роторов преобладающими являются радиальные колебания. Незначительные угловые колебания вызываются неизбежной динамической неуравновешенностью и возможными нарушениями симметрии ротора относительно поперечной вертикальной плоскости, проходящей через центр масс. Коэффициенты гидродинамических сил при этом нужно удваивать (по числу уплотнений).

Другой крайний случай преимущественно угловых колебаний возможен для симметричного статически уравновешенного ротора под действием динамической неуравновешенности. В этом случае необходимо удваивать гидродинамические моменты. Кроме того, возникающие при перекосах оси ротора относительно оси уплотнений радиальные гидродинамические силы отличаются по величине из-за отличия эксцентриситетов, радиальных скоростей и ускорений. Поэтому они создают дополнительный момент относительно центра рабочего колеса. Углы перекоса в обоих уплотнениях при одинаково расположенных втулках остаются одинаковыми, следовательно, составляющие сил, обусловленные угловыми колебаниями (с коэффициентами α_i), дополнительные моменты не создают.

Подробно дополнительные моменты от упругих сил рассмотрены в [7]. Для правого и левого уплотнений безразмерные обобщенные координаты, скорости и ускорения центра вала, которые понадобятся для вычисления моментов инерционных, диссипативных и гироскопических сил:

$$\begin{aligned}
u'_x &= u_x + \Delta u_x; \quad u''_x = u_x - \Delta u_x; \quad \Delta u_x = \frac{1}{H} l_c \vartheta_y = 2 \frac{l_c}{l} \theta_y; \\
u'_y &= u_y - \Delta u_y; \quad u''_y = u_y + \Delta u_y; \quad \Delta u_y = \frac{1}{H} l_c \vartheta_x = 2 \frac{l_c}{l} \theta_x; \\
\ddot{u}'_x &= \ddot{u}_x + \Delta \ddot{u}_x; \quad \ddot{u}''_x = \ddot{u}_x - \Delta \ddot{u}_x; \quad \Delta \ddot{u}_x = 2 \frac{l_c}{l} \ddot{\theta}_y; \\
\ddot{u}'_y &= \ddot{u}_y - \Delta \ddot{u}_y; \quad \ddot{u}''_y = \ddot{u}_y + \Delta \ddot{u}_y; \quad \Delta \ddot{u}_y = 2 \frac{l_c}{l} \ddot{\theta}_x.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь использовано соотношение $\theta_{x,y} = \vartheta_{x,y} l / 2H$. В формулах для ускорений не указаны центростремительные составляющие, так как они направлены по оси ротора и не влияют на его радиально-угловые колебания.

На основании (5) размерные силы в правом F'_{3x} и левом F''_{3x} уплотнениях следующие:

$$\begin{aligned}
F'_{3x} &= -mH \frac{a_{31}}{2} (u_x + \Delta u_x) = -F_{3x} - \Delta F_{3x}; \\
F''_{3x} &= -\frac{a_{31}}{2} mH (u_x - \Delta u_x) = -F_{3x} + \Delta F_{3x}; \\
F'_{3y} &= -mH \frac{a_{31}}{2} (u_y - \Delta u_y) = -F_{3y} + \Delta F_{3y}; \\
F''_{3y} &= -\frac{a_{31}}{2} mH (u_y + \Delta u_y) = -F_{3y} - \Delta F_{3y}; \\
\Delta F_{3x} &= a_{31} H m \frac{l_c}{l} \theta_y, \quad \Delta F_{3y} = a_{31} H m \frac{l_c}{l} \theta_x.
\end{aligned}$$

Дополнительные моменты от упругих сил следующие:

$$\Delta M_{3x} = -2l_c \Delta F_{3y} = -2a_{31} H m \frac{l_c^2}{l} \theta_x; \quad \Delta M_{3y} = -2l_c \Delta F_{3x} = -2a_{31} H m \frac{l_c^2}{l} \theta_y,$$

а после деления на экваториальный момент инерции и умножения на $l/2H$

$$\begin{aligned}
\Delta M_{3x}^* &= \frac{\Delta M_{3x} l}{2Hl} = -a_{31} j_c \theta_x; \quad j_c = \frac{m l_c^2}{I}; \\
\Delta M_{3y}^* &= \frac{\Delta M_{3y} l}{2Hl} = -a_{31} j_c \theta_y.
\end{aligned}$$

Подобным образом вычисляются дополнительные моменты других составляющих радиальной силы, обусловленные различием обобщен-

ных координат, скоростей и ускорений (11) центров вала в правом и левом уплотнениях:

$$\begin{aligned}\Delta M_{1x}^* &= -a_{11}j_c\ddot{\theta}_x, \quad \Delta M_{1y}^* = -a_{11}j_c\ddot{\theta}_y; \\ \Delta M_{2x}^* &= -a_{21}j_c\dot{\theta}_x, \quad \Delta M_{2y}^* = -a_{21}j_c\dot{\theta}_y; \\ \Delta M_{4x}^* &= -a_{41}j_c\dot{\theta}_y, \quad \Delta M_{4y}^* = a_{41}j_c\dot{\theta}_x; \\ \Delta M_{5x}^* &= -a_{51}j_c\theta_y, \quad \Delta M_{5y}^* = a_{51}j_c\theta_x.\end{aligned}$$

Приведенные добавки зависят от угловых координат, поэтому их нужно вводить в составляющие момента, определяемые углами поворота диска, угловыми скоростями и ускорениями. Обозначив суммарные составляющие гидродинамического момента в двух уплотнениях

$$M_{i(x,y)} = M_{i(x,y)}^* + \Delta M_{i(x,y)}^*, \quad i = 1, 2, 3,$$

с учетом (7) – (10) получим:

$$\begin{aligned}-M_{1x} &= a_{11}(j + j_c)\ddot{\theta}_x, \quad -M_{1y} = a_{11}(j + j_c)\ddot{\theta}_y; \\ -M_{2x} &= 15j(\alpha_2\dot{u}_x + \alpha_4\dot{u}_y) + (2k_d j + a_{21}j_c)\dot{\theta}_x + a_{41}(j + j_c)\dot{\theta}_y; \\ -M_{2y} &= 15j(-\alpha_4\dot{u}_x + \alpha_2\dot{u}_y) - a_{41}(j + j_c)\dot{\theta}_x + (2k_d j + a_{21}j_c)\dot{\theta}_y; \\ -M_{3x} &= j\left(-15\alpha_3 u_x + 5\alpha_5 \frac{N\Delta\chi}{1 + 2\Delta\chi} u_y\right) - \\ &- a_{31}\left(\frac{10\chi_m}{\theta_0 + N\chi_m} j - j_c\right)\theta_x + a_{51}(j + j_c)\theta_y; \\ -M_{3y} &= j\left(-5\alpha_5 \frac{N\Delta\chi}{1 + 2\Delta\chi} u_x - 15\alpha_3 u_y\right) - \\ &- a_{51}(j + j_c)\theta_x - a_{31}\left(\frac{10\chi_m}{\theta_0 + N\chi_m} j - j_c\right)\theta_y.\end{aligned}$$

Следует иметь в виду, что дополнительные моменты найдены для симметрично расположенных относительно центра масс колеса уплотнений. При нарушении такой симметрии несколько изменятся значения $\Delta u_{x,y}$ (11), что приведет к изменению численного коэффициента в выражении параметра j_c .

Рассматриваемый ротор в щелевых уплотнениях является колебательной системой восьмого порядка с четырьмя обобщенными координатами: $u_x, u_y, \theta_x, \theta_y$. Система колеблется относительно устойчивого

положения равновесия, поэтому корни характеристического уравнения – четыре пары комплексно сопряженных чисел. На переднем щелевом уплотнении центробежной ступени дросселируется давление, развиваемое ступенью. Это давление пропорционально квадрату частоты вращения рабочего колеса. Именно такие условия характерны для центробежных машин. Это отражается на форме частотных характеристик – зависимостей собственных частот от частоты вращения ротора. В этом случае перепад давления перестает быть независимым внешним воздействием, он связан дополнительным соотношением $\Delta p_0 = B\omega^2$. В результате, внешним воздействием является только частота вращения, а эффект самоужесточения ротора усиливается.

Вынужденные совместные радиально-угловые колебания ротора при постоянном перепаде давления на уплотнениях описываются уравнениями [10]

$$\begin{aligned} a_1\ddot{u} + a_2\dot{u} + a_3u \mp i(a'_4\dot{u} + a'_5u)\omega - (\alpha'_2\dot{\theta} + \alpha'_3\theta)\omega \mp \\ \mp i(\alpha_4\dot{\theta} + \alpha_5\theta - \alpha_0\theta) = \omega^2 a^* = \omega^2 |a^*| e^{\pm i\omega t}; \\ b_1\ddot{\theta} + b_2\dot{\theta} + b_3\theta \mp i(b'_4\dot{u} + b'_5u)\omega + (\beta'_2\dot{u} - \beta'_3u)\omega \mp \\ \mp i(\beta_4\dot{u} + \beta_5u + \beta_0u) = (1-j_0)\omega^2 \gamma^* = (1-j_0)\omega^2 |\gamma^*| e^{\pm i\omega t}. \end{aligned}$$

Пользуясь стандартными программами, можно сразу находить численное решение этих уравнений. После перехода к безразмерным частотам $\bar{\omega} = \omega/\Omega_{u0}$ и ввода ряда обозначений, уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} (U_{11} + iV_{11})\ddot{u} + (U_{12} + iV_{12})\ddot{\theta} = A\bar{\omega}^2; \\ (U_{21} + iV_{21})\ddot{u} + (U_{22} + iV_{22})\ddot{\theta} = \Gamma\bar{\omega}^2. \end{aligned}$$

Здесь $U_{11} + iV_{11}$, $U_{22} + iV_{22}$ – собственные операторы независимых радиальных и угловых колебаний соответственно. Перекрестные операторы $U_{12} + iV_{12}$, $U_{21} + iV_{21}$ характеризуют влияние угловых колебаний на радиальные и наоборот, т.е. взаимосвязанность этих колебаний.

Из системы неоднородных алгебраических уравнений после ряда преобразований получим амплитуды и фазы, выраженные через внешние возмущения:

$$\begin{aligned} u_a = \bar{\omega}^2 \sqrt{\frac{(AU_{22} - \Gamma U_{12})^2 + (AV_{22} - \Gamma V_{12})^2}{U_0^2 + V_0^2}}; \\ \theta_a = \bar{\omega}^2 \sqrt{\frac{(\Gamma U_{11} - AU_{21})^2 + (\Gamma V_{11} - AV_{21})^2}{U_0^2 + V_0^2}}; \end{aligned}$$

$$\varphi_u = -\arctg \frac{(AU_{22} - \Gamma U_{12})V_0 - (AV_{22} - \Gamma V_{12})U_0}{(AU_{22} - \Gamma U_{12})U_0 + (AV_{22} - \Gamma V_{12})V_0};$$

$$\varphi_g = -\arctg \frac{(\Gamma U_{11} - AU_{21})V_0 - (\Gamma V_{11} - AV_{21})U_0}{(\Gamma U_{11} - AU_{21})U_0 + (\Gamma V_{11} - AV_{21})V_0}.$$

Пользуясь полученными формулами, можно построить амплитудные частотные характеристики как отношения амплитуд соответствующих колебаний к амплитудам внешних возбуждений.

Отличия закономерностей колебаний ротора в щелевых уплотнениях от его колебаний в воздухе обусловлены действием гидродинамических сил, возникающих в щелевых уплотнениях. Сила инерции и сила вязкого сопротивления уменьшают, а гироскопическая сила и сила гидростатической жесткости увеличивают модули собственных частот.

Увеличение собственных частот пропорционально корню квадратному из дросселируемого на уплотнениях перепада давления и зависит от конусности кольцевого дросселирующего зазора. Для типовых конструкций центробежных насосов собственные частоты роторов в уплотнениях с конфузорным ($\theta_0 = 0,3$) каналом в 2 – 4 раза больше, чем в диффузорных ($\theta_0 = -0,3$) уплотнениях. Перепад давления 1,5 МПа на конфузорных уплотнениях обеспечивает почти трехкратное увеличение собственной частоты ротора. Этим подтверждается возможность и эффективность одновременного использования щелевых уплотнений в качестве гидростатических опор, а значит, перспективность конструкций насосов без выносных масляных подшипников.

Циркуляционная сила, зависящая от частоты вращения, не влияет на величину собственных частот, но уменьшает модуль удельного коэффициента демпфирования и является основным дестабилизирующим фактором, приводит к потере устойчивости свободных колебаний. Циркуляционная сила пропорциональна коэффициенту закрутки потока в кольцевом канале, поэтому подавление закрутки расширяет область устойчивости ротора.

Гидродинамическая диссипативная сила зависит от конусности канала и в диффузорном канале может менять знак, превращаясь в силу отрицательного сопротивления, т.е. является еще одним дестабилизирующим фактором. В отличие от циркуляционной силы, обусловленной собственным вращением ротора, диссипативная сила не зависит от частоты вращения и может становиться отрицательной в отсутствие вращения. Таким образом, в уплотнениях с диффузорными каналами даже невращающийся ротор может выходить за границу колебательной устойчивости.

Выводы. На основании исследования гидромеханической модели ротор – щелевые уплотнения получены аналитические зависимости, описывающие радиально - угловые колебания ротора.

Силовые коэффициенты щелевых уплотнений определяются геометрическими (зазор, радиус, длина, конусность, форма входных кро-

мок) и эксплуатационными (перепад давления, диапазон рабочих частот вращения, физические свойства перекачиваемой среды) параметрами. Целенаправленным выбором этих параметров можно влиять на вибрационное состояние ротора и машины в целом.

Важной особенностью центробежных машин является то, что дроселируемые на щелевых уплотнениях перепады давления пропорциональны частоте вращения ротора. Этим обусловлен эффект самоужесточения ротора, приводящий к тому, что в большинстве случаев критические частоты отсутствуют. Самоужесточение усиливается гироскопическими моментами щелевых уплотнений, а для роторов дисковой конструкции – гироскопическим моментом диска.

Это особенно важно для машин с высокими параметрами. Например, в космической технике, где высокие частоты вращения вала и уплотняемое давление необходимо обеспечивать в сочетании с требованием минимизировать массу и габариты агрегата. То есть изначально «гибкий» в динамическом смысле ротор в сочетании с правильно спроектированными уплотнениями становится «жестким».

Для решения задач о совместных радиально-угловых колебаниях ротора с учетом всех гидродинамических сил и моментов, возникающих в щелевых уплотнениях, перспективным является использование численных методов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Марцинковский В.А., Шевченко С.С.** Насосы атомных электростанций: расчет, конструирование, эксплуатация: монография / под общ. ред. С.С. Шевченко. Сумы: ЧФ «Изд-во «Университетская книга», 2018. 472 с.
2. **Bai C., Zhang, H., Xu, Q.** Subharmonic resonance of a symmetric ball bearing-rotor system // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2013. Vol. 50. P. 1–10.
3. **Djaidir B., Hafaifa A., Kouzou A.** Faults detection in gas turbine rotor using vibration analysis under varying conditions // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2017. Vol. 55(2). P. 393–406. doi: 10.15632/jtam-pl.55.2.393.
4. **Ishida Y., Yamamoto T.** Linear and nonlinear rotordynamics. A modern treatment with applications. Verlag, Wiley-VCH. 2012.
5. **in C., Xu Y., Zhou J., et al.** Active magnetic bearings stiffness and damping identification from frequency characteristics of control systems. Cairo, Hindawi Publishing Corporation. 2016.
6. **Korczak A., Marcinkowski W., Peczkis G.** Wpływ szczelin uszczelniających na dynamikę zespołu wirującego pompy odśrodkowej. Politechnika śląska. Prace naukowe, 2007.Z.18. P. 161-170.
7. **Kundera Cz, Marcinkowski W.** The effect of the annular seal parameters on the dynamics of the rotor system. - Int. Journal of Applied Mechanics and Engineering. 2010, Vol.15. No 3. P. 719-730.
8. **Pavlenk I. V., Simonovskiy V. I., Demianenko M. M.** Dynamic analysis of centrifugal machines rotors supported on ball bearings by combined application of 3D and beam finite element models // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 233(1), 012053 2017, doi: 10.1088/1757-899X/233/1/012053

9. **Pavlenko I., Simonovskiy V., Pitel' J., Demianenko M.** Dynamic analysis of centrifugal machines rotors with com-bined using 3D and 2D finite element models. Lüdenscheid, RAM-VERLAG. 2018.

10. **Pavlenko I., Trojanowska J., Ivanov V., Liaposhchenko O.** Scientific and methodological approach for the identification of mathematical models of mechanical systems by using artificial neural networks. // 3-rd Conference on Innovation, Engineering and Entrepreneurship, Regional HELIX 2018, Lecture Notes in Electrical Engineering 505, P. 299–306 (2019), doi: 10.1007/978-3-319-91334-6_41.

11. **Yashchenko A. S., Rudenko A. A., Simonovskiy V. I., Kozlov O. M.** Effect of bearing housings on centrifugal pump rotor dynamics // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 233(1), 012054 (2017), doi: 10.1088/1757-899X/233/1/012054.

12. **Zhang K., Yang Z.** Identification of load categories in rotor system based on vibration analysis. Sensors 17(7), 1676 (2017), doi: 10.3390/s17071676.

УДК 621.01:62-251:62-762

С.С. Шевченко, канд. техн. наук

МОДЕЛЬ І РОЗРАХУНОК ГІДРОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ РОТОР – ЩІЛИННІ УЩІЛЬНЕННЯ

Побудовано модель гідромеханічної системи ротор - щілинні ущільнення, моделі однодискових роторів, розрахункова схема щілинного ущільнення з рухомою втулкою. Отримано аналітичні залежності для розрахунку динамічних характеристик гідромеханічної системи, що описують радіально - кутові коливання ротора відцентрової машини в щілинних ущільненнях. Отримані вирази для побудови амплітудних і фазових частотних характеристик.

Ключові слова: математична модель; гідромеханічна система; радіально – кутові коливання; частотні характеристики.

У відцентрових машинах енергію об'ємних втрат через щілинні ущільнення можна перетворити в корисну енергію, якщо їх використовувати одночасно як гідростатичні опори, здатні створювати не тільки велику радіальну жорсткість, а й ефективно демпфювати коливання ротора. Модель динамічної системи ротор – щілинні ущільнення показана на рис. 1.

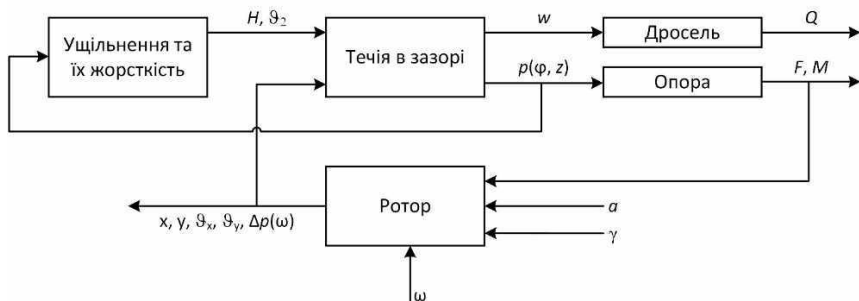


Рис. 1 – Модель динамічної системи ротор – щілинні ущільнення

Розглянутий ротор в щільних ущільненнях є коливальною системою восьмого порядку з чотирма узагальненими координатами: $u_x, u_y, \theta_x, \theta_y$

Вимушені спільні радіально-кутові коливання ротора при постійному перепаді тиску на ущільненнях описуються рівняннями:

$$\begin{aligned} a_1 \ddot{u} + a_2 \dot{u} + a_3 u \mp i(a_4 \dot{u} + a_5 u) \omega - (\alpha_2 \dot{\theta} + \alpha_3 \theta) \omega \mp \\ \mp i(\alpha_4 \dot{\theta} + \alpha_5 \theta - \alpha_0 \theta) = \omega^2 a^* = \omega^2 |a^*| e^{\pm i \omega t}; \\ b_1 \ddot{\theta} + b_2 \dot{\theta} + b_3 \theta \mp i(b_4 \dot{\theta} + b_5 \theta) \omega + (\beta_2 \dot{u} - \beta_3 u) \omega \mp \\ \mp i(\beta_4 \dot{u} + \beta_5 u + \beta_0 u) = (1-j_0) \omega^2 \gamma^* = (1-j_0) \omega^2 |\gamma^*| e^{\pm i \omega t}. \end{aligned}$$

Користуючись стандартними програмами, можна відразу знаходити числові розв'язки цих рівнянь. Після переходу до безрозмірних частот $\bar{\omega} = \omega/\Omega_{u0}$ і введення ряду позначень, рівняння приймають вигляд:

$$\begin{aligned} (U_{11} + iV_{11})\ddot{u} + (U_{12} + iV_{12})\ddot{\theta} = A\bar{\omega}^2; \\ (U_{21} + iV_{21})\ddot{u} + (U_{22} + iV_{22})\ddot{\theta} = \Gamma\bar{\omega}^2. \end{aligned}$$

Тут $U_{11} + iV_{11}, U_{22} + iV_{22}$ – власні оператори незалежних радіальних і кутових коливань відповідно.

Перехресні оператори $U_{12} + iV_{12}, U_{21} + iV_{21}$ характеризують вплив кутових коливань на радіальні і радіальних на кутові, тобто взаємопов'язаність цих коливань. Із системи неоднорідних рівнянь після низки перетворень отримаємо амплітуди і фази, виражені через зовнішні збудження:

$$\begin{aligned} u_a = \bar{\omega}^2 \sqrt{\frac{(AU_{22} - \Gamma U_{12})^2 + (AV_{22} - \Gamma V_{12})^2}{U_0^2 + V_0^2}}; \\ \theta_a = \bar{\omega}^2 \sqrt{\frac{(\Gamma U_{11} - AU_{21})^2 + (\Gamma V_{11} - AV_{21})^2}{U_0^2 + V_0^2}}; \\ \varphi_u = -\arctg \frac{(AU_{22} - \Gamma U_{12})V_0 - (AV_{22} - \Gamma V_{12})U_0}{(AU_{22} - \Gamma U_{12})U_0 + (AV_{22} - \Gamma V_{12})V_0}; \\ \varphi_\theta = -\arctg \frac{(\Gamma U_{11} - AU_{21})V_0 - (\Gamma V_{11} - AV_{21})U_0}{(\Gamma U_{11} - AU_{21})U_0 + (\Gamma V_{11} - AV_{21})V_0}. \end{aligned}$$

Користуючись отриманими формулами, можна побудувати амплітудні частотні характеристики як відношення амплітуд відповідних коливань до амплітуд зовнішніх збуджень. Відмінності закономірностей коливань ротора в щілинних ущільненнях від його коливань в повітрі обумовлені дією гідродинамічних сил, що виникають в щілинних ущільненнях. Силкові коефіцієнти щілинних ущільнень визначаються геометричними (зазор, радіус, довжина, конусність, форма вхідних кромek) і експлуатаційними (перепад тиску, діапазон робочих частот обертання, фізичні властивості середовища, що перекачується) параметрами. Цілеспрямованим вибором цих параметрів можна впливати на вібраційний стан ротора і машини в цілому.

UDC 621.01:62-251:62-762

S.S. Shevchenko, PhD (Tech.)

MODEL AND CALCULATION OF THE HYDROMECHANICAL SYSTEM ROTOR – GROOVE SEALS

A model of a hydromechanical system rotor – groove seals, models of single-disk rotors and a design diagram of groove seal with a movable sleeve have been built. Analytical relationships are obtained for computing the dynamic characteristics of the hydromechanical system, describing the radial - angular vibrations of the centrifugal machine rotor in groove seals. Expressions for computing amplitude and phase frequency characteristics are obtained.

Keywords: mathematical model; hydromechanical system; radial - angular vibrations; frequency characteristics.

In centrifugal machines, the energy of leakages through groove seals can be converted into useful energy if they are used simultaneously as hydrostatic bearings capable of not only having high radial stiffness, but also effectively damping rotor vibrations. A simplified block diagram of the rotor – groove seals system is shown in the Fig. 1.

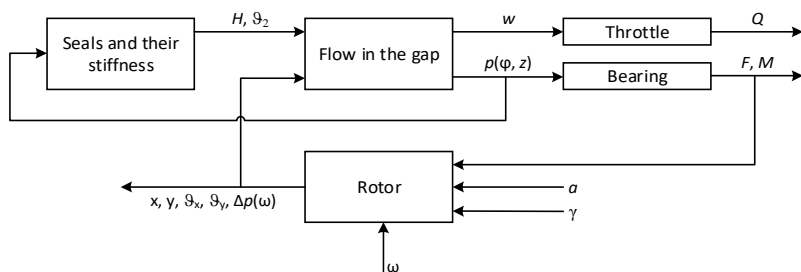


Fig.1 – Model of hydromechanical system rotor – groove seals

The considered rotor in groove seals is an oscillatory system of the eighth order with four generalized coordinates $u_x, u_y, \theta_x, \theta_y$. Forced joint

radial-angular oscillations of the rotor at a constant pressure drop across the seals are described by the equations:

$$\begin{aligned}
 & a_1 \ddot{u} + a_2 \dot{u} + a_3 u \mp i(a_4 \dot{u} + a_5 u) \omega - (\alpha_2' \dot{\theta} + \alpha_3' \theta) \omega \mp \\
 & \mp i(\alpha_4 \dot{\theta} + \alpha_5 \theta - \alpha_0 \theta) = \omega^2 a^* = \omega^2 |a^*| e^{\pm i \omega t}; \\
 & b_1 \ddot{\theta} + b_2 \dot{\theta} + b_3 \theta \mp i(b_4 \dot{\theta} + b_5 \theta) \omega + (\beta_2' \dot{u} - \beta_3' u) \omega \mp \\
 & \mp i(\beta_4 \dot{u} + \beta_5 u + \beta_0 u) = (1 - j_0) \omega^2 \gamma^* = (1 - j_0) \omega^2 |\gamma^*| e^{\pm i \omega t}.
 \end{aligned}$$

Using standard programs, we can immediately find a numerical solution to these equations. After switching to dimensionless frequencies $\bar{\omega} = \omega / \Omega_{u0}$ and introducing a number of designations, the equations take the form:

$$\begin{aligned}
 (U_{11} + iV_{11})\tilde{u} + (U_{12} + iV_{12})\tilde{\theta} &= A\bar{\omega}^2; \\
 (U_{21} + iV_{21})\tilde{u} + (U_{22} + iV_{22})\tilde{\theta} &= \Gamma\bar{\omega}^2.
 \end{aligned}$$

Here $U_{11} + iV_{11}$, $U_{22} + iV_{22}$ are the eigenoperators of independent radial and angular vibrations, respectively. Cross operators $U_{12} + iV_{12}$, $U_{21} + iV_{21}$ characterize the effect of angular vibrations on radial ones and radial vibrations on angular ones respectively, i.e. the interconnectedness of these fluctuations. From the system of inhomogeneous algebraic equations, after a series of transformations, we obtain the amplitudes and phases expressed through external perturbations:

$$\begin{aligned}
 u_a &= \bar{\omega}^2 \sqrt{\frac{(AU_{22} - \Gamma U_{12})^2 + (AV_{22} - \Gamma V_{12})^2}{U_0^2 + V_0^2}}; \\
 \theta_a &= \bar{\omega}^2 \sqrt{\frac{(\Gamma U_{11} - AU_{21})^2 + (\Gamma V_{11} - AV_{21})^2}{U_0^2 + V_0^2}}; \\
 \phi_u &= -\arctg \frac{(AU_{22} - \Gamma U_{12})V_0 - (AV_{22} - \Gamma V_{12})U_0}{(AU_{22} - \Gamma U_{12})U_0 + (AV_{22} - \Gamma V_{12})V_0}; \\
 \phi_\theta &= -\arctg \frac{(\Gamma U_{11} - AU_{21})V_0 - (\Gamma V_{11} - AV_{21})U_0}{(\Gamma U_{11} - AU_{21})U_0 + (\Gamma V_{11} - AV_{21})V_0}.
 \end{aligned}$$

Using the obtained formulas, it is possible to construct the amplitude frequency characteristics as the ratio of the amplitudes of the corresponding

oscillations to the amplitudes of external excitations. Differences in the patterns of rotor oscillations in groove seals from its oscillations in air are due to the action of hydrodynamic forces arising in groove seals. Force coefficients of groove seals are determined by geometric (clearance, radius, length, taper, shape of the input edges) and operational (pressure drop, operating speed range, physical properties of the pumped medium) parameters. A purposeful choice of these parameters can influence the vibration state of the rotor and the machine as a whole.

REFERENCES

1. **Martsinkovsky V. A., Shevchenko S. S.** Pumps of nuclear power plants: calculation, design, operation: / за ред. S. S. Shevchenko. Sumy: Private Fund «University Book Publishing House», 2018. 472c. (in Russian).
2. **Bai C., Zhang, H., Xu, Q.** Subharmonic resonance of a symmetric ball bearing-rotor system // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2013. Vol. 50. P. 1–10.
3. **Djaidir B., Hafaiifa, A., Kouzou, A.:** Faults detection in gas turbine rotor using vibration analysis under varying conditions // Journal of Theoretical and Applied Mechanics 2017. Vol. 55(2). P. 393–406. doi: 10.15632/jtam-pl.55.2.393.
4. **Ishida Y., Yamamoto T.** Linear and nonlinear rotordynamics. A modern treatment with applications. Verlag, Willey-VCH. 2012.
5. **Jin C., Xu Y., Zhou J., et al. ().** Active magnetic bearings stiffness and damping identification from frequency characteristics of control systems. Cairo, Hindawi Publishing Corporation, 2016.
6. **Korczak A., Marcinkowski W., Peczkis G.** Wpływ szczelin uszczelniających na dynamikę zespołu wirującego pompy odśrodkowej. Politechnika śląska. Prace naukowe, 2007, Z.18. P. 161–170. (in Poland).
7. **Kundera Cz, Marcinkowski W.** The effect of the annular seal parameters on the dynamics of the rotor system. - Int. Journal of Applied Mechanics and Engineering. 2010, Vol.15. No 3 P. 719–730.
8. **Pavlenko I. V., Simonovskiy V. I., Demianenko M. M.:** Dynamic analysis of centrifugal machines rotors supported on ball bearings by combined application of 3D and beam finite element models. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 233(1), 012053 (2017), doi: 10.1088/1757-899X/233/1/012053
9. **Pavlenko I., Simonovskiy V., Pitel J., Demianenko M.** Dynamic analysis of centrifugal machines rotors with com-bined using 3D and 2D finite element models. Lüdenscheid, RAM-VERLAG. 2018.
10. **Pavlenko I., Trojanowska J., Ivanov V., Liaposhchenko O.** Scientific and methodological approach for the identification of mathematical models of mechanical systems by using artificial neural networks // 3rd Conference on Innovation, Engineering and Entrepreneurship, Regional HELIX 2018, Lecture Notes in Electrical Engineering 505, 299–306 (2019), doi: 10.1007/978-3-319-91334-6_41.
11. **Yashchenko A.S., Rudenko A.A., Simonovskiy V.I., Kozlov O.M.** Effect of bearing housings on centrifugal pump rotor dynamics. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 233(1), 012054 (2017), doi: 10.1088/1757-899X/233/1/012054.
12. **Zhang K., Yang Z.** Identification of load categories in rotor system based on vibration analysis. Sensors 17(7), 1676 (2017), doi: 10.3390/s17071676.

DOI 10.15421/4220020
UDC 539.3

N. I. Alizadeh

VIBRATIONS OF A LONGITUDINALLY STIFFENED, LIQUID-FILLED CYLINDRICAL SHELL IN LIQUID

In the paper we study free vibrations of a longitudinally stiffened, viscous liquid-filled orthotropic cylindrical shell in ideal liquid. The Navier – Stokes linearized equation is used to describe the motion of the internal viscous liquid, the motion of the external liquid is described by a wave equation written in the potential by perturbed velocity. Frequency equation of a longitudinally stiffened orthotropic, viscous liquid-contacting cylindrical shell is obtained on the basis of the Hamilton – Ostrogradsky principle of stationarity of action. Characteristic curves of dependence are constructed.

Keywords: *free vibrations; shell; ideal liquid; viscous liquid; stress; stiffening; variational principle.*

Introduction. In [1], free vibration of an orthotropic, soil-contacting cylindrical shell inhomogeneous in thickness and stiffened with annular ribs, is studied. Using the Hamilton – Ostrogradsky variational principle, a system of equations of motion of a soil-contacting orthotropic cylindrical shell inhomogeneous in thickness and stiffened with annular ribs, is constructed. To account for heterogeneity of the shell material in thickness it is accepted that the Young modulus and the shell material density are the functions of normal coordinate. Using the Hamilton – Ostrogradsky variational principle the frequency equations are structured and implemented numerically. In the calculation process, linear and parabolic laws are accepted for the heterogeneity function. The characteristic curves of dependence are constructed.

The paper [5] was devoted to investigation of one of the dynamical strength characteristics, the frequency of natural vibrations of an inhomogeneous orthotropic, flowing liquid-filled cylindrical shell made of a fiberglass and stiffened with annular ribs under Navier conditions. The results of calculations of natural frequency of vibrations were represented in the form of dependence of the speed of flowing liquid on the amount of stiffening elements for different values of wave formation parameters and different ratios of elasticity module.

The paper [6] represents the results of finding the frequencies of free vibrations of a structurally anisotropic flowing liquid-filled cylindrical shell made of a fiberglass and stiffened with annular ribs under Navier boundary conditions. The results of calculations of natural frequencies of vibrations are given in the form of dependences on the winging angle of the fiberglass for a shell made of a tissue fiberglass and on the speed of flowing liquid for

different values of wave formation parameters and various ratios between the parameters characterizing geometrical sizes of the shell.

The supports formed by the combination of cylindrical panels are used in bridge construction [4]. To save the material, the interior area of the support is filled with soil. Such supports are exposed to different nature forces. One of such forces is a force generated on the surface of cylindrical panels that form supports during flood flow. Under the action of these forces the support is exposed to forced vibration. Therefore, to study the supports formed from combination of cylindrical panels with regard to viscosity and heterogeneity of soil, orthotropic character of panels is of great practical importance. In the paper, based on the Hamilton – Ostrogradsky variational principle, we study forced vibrations of a vertical retaining wall consisting of three orthotropic cylindrical panels contacting with viscous-elastic, heterogeneous soil, obtain analytic expressions to calculate the displacements of the points of cylindrical panels and structure characteristically curves. Account of heterogeneity of soil is performed by accepting its rigidity coefficients as a function of coordinate. It is assumed that the Poisson ratio is constant.

In the paper [9] natural vibrations frequency of the system that consisting of a solid medium-filled elastic-plastic orthotropic cylindrical shell strengthened with discretely distributed rings established on a plane perpendicular to its axis are studied. Utilizing the Hamilton – Ostrogradsky principle, a frequency equation for determining vibration frequencies of the system the following consideration was created; its roots were obtained by mathematical method.

In the paper [3] free vibrations of an orthotropic, laterally stiffened, ideal fluid-filled cylindrical shell inhomogeneous in thickness and in circumferential direction is studied. Using the Hamilton – Ostrogradsky variational principle, the systems of equations of the motion of an orthotropic, ideal fluid filled cylindrical shell stiffened in thickness and circumference, are constructed.

Problem definition. We consider free vibrations of a longitudinally stiffened viscous liquid-filled cylindrical shell in infinite ideal liquid (Fig. 1).

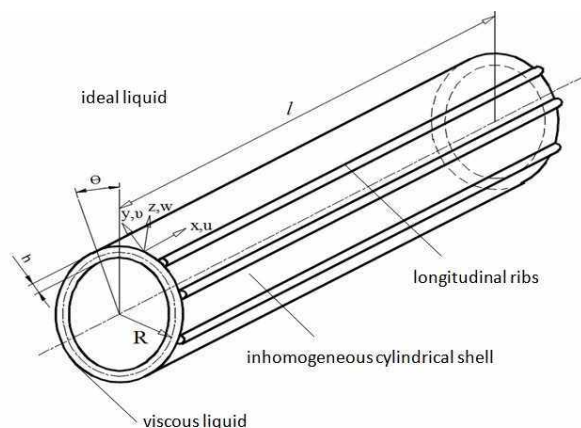


Fig.1 – Longitudinally stiffened inhomogeneous cylindrical shell

The equation of motion of a longitudinally stiffened orthotropic, liquid-filled cylindrical shell in liquid, is obtained on the basis of Hamilton – Ostrogradsky principle of stationarity of action

$$\delta W = 0, \quad (1)$$

where $W = \int_{t'}^{t''} \Pi dt$ is Hamilton's action, t' and t'' are the given arbitrary moments of time. Here

$$\Pi = A_0 + \sum_{i=1}^{k_1} A_n + A_m + A_j. \quad (2)$$

where A_0 is the total energy of the cylindrical shell, A_n is the total energy of the i -th longitudinal bar, k_1 is the moment of longitudinal ribs, A_m and A_j are potential energies of external surface loads acting as viewed from ideal and viscous liquids and applied to the shell and are determined as a work performed by these loads when taking the system from the deformed state to the initial undeformed one and is represented in the form:

$$A_m = -R \int_0^l \int_0^{2\pi} q_{zm} w dx d\theta \quad (3)$$

$$A_j = -R \int_0^L \int_0^{2\pi} (q_x u + q_y v + q_z w) dx d\theta. \quad (4)$$

Here q_x, q_y, q_z are the load intensity acting on the shell as viewed from the viscous liquid, q_{zm} is the load intensity acting on the shell as viewed from ideal liquid.

The expressions for A_0 and A_n are of the form [2]:

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} f_1(z) dz \iint \left\{ \tilde{b}_{11} \varepsilon_{11}^2 + 2\tilde{b}_{12} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \tilde{b}_{22} \varepsilon_{22}^2 + \tilde{b}_{66} \varepsilon_{12}^2 \right\} f_2(x) dx dy + \quad (5)$$

$$+ \int_{-h/2}^{h/2} f_1(z) dz \times \iint \left[\tilde{\rho} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) \right] f_2(x) dx dy.$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_1} \int_{x_1}^{x_2} \left[\tilde{E}_i F_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{yi} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{zi} \left(\frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \quad (6)$$

$$\left. + \tilde{G}_i J_{kpi} \left(\frac{\partial \phi_{kpi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k_1} \rho_i F_i \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \left(\frac{\partial \phi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx.$$

In the expressions (5) and (6)

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}.$$

$$\tilde{b}_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad \tilde{b}_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad \tilde{b}_{12} = \frac{\nu_1 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_2 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad \tilde{b}_{66} = G$$

are the basic elasticity module of the homogeneous, orthotropic material of the shell, the displacements of the shell points; $\tilde{\rho}$ is the density of the homogeneous shell material; $f_1(z), f_2(x)$ are the inhomogeneity functions in the direction of normal and generatrix of the shell, respectively [8], ν_1, ν_2 are the Poisson ratios; E_1, E_2 are the Young modulus of the shell material in coordinate directions of the axes x, y , respectively; h is the shell thickness; u_i, ϑ_i, w_i are the displacements of the bars points used in stiffening; F_i are the areas of cross sections of the i -th bar attached to the shell in the direction of generatrix; $\tilde{E}_i$ is an elasticity modulus when the i -th bar attached to the cylindrical shell is stretched in the direction of the generatrix; J_{yi}, J_{zi} are the inertia moments of the i -th bar with respect to the axis passing through the center of gravity of the cross-section; J_{kpi} are inertia moments when the i -th bar is twisted; t is time, ρ_i is the density of the material of the i -th bar; $\varphi_i(x), \varphi_{kpi}(x)$ are the torsional angle of the bar cross-section and through the shell displacement are expressed as follows

$$\varphi_{kpi}(x) = \varphi_2(x, y_i) = - \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\vartheta}{R} \right) \Big|_{y=y_i}.$$

Assuming that the basic flow rate equal U and deviations from this rate are small, we use the wave equation for disturbed velocity potential $\tilde{\phi}$ with respect to [7, 10]

$$\Delta \tilde{\phi} - \frac{1}{a_0^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{R \partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (7)$$

To describe the motion of external viscous liquid we use the Navier – Stokes linearized equation for viscous compressible liquid [10]:

$$\rho_m \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial t^2} = -grad p + \frac{1}{3} grad div \tilde{\vartheta} + \bar{\mu} \nabla^2 \tilde{\vartheta}, \quad (8)$$

where $\vec{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_x, \mathfrak{g}_r, \mathfrak{g}_\theta)$ is a vector of velocity of an arbitrary point of liquid, p is pressure at arbitrary point of liquid, ρ_m is liquid density.

The expression of the total energy of the system (2), the equation of motion of ideal liquid (7) and viscous liquid (8) are supplemented by contact conditions. On the contact surface of a shell-ideal liquid we observe continuity of radial velocities and pressures. The condition of impermeability or smoothness of flow at the shell wall is of the form [10]

$$\mathfrak{g}_r \Big|_{r=R} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} \Big|_{r=R} = - \left(\omega \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{r=R}. \quad (9)$$

Equality of radial pressures as viewed from liquid on the shell:

$$q_{zm} = -\tilde{p} \Big|_{r=R}. \quad (10)$$

On the contact surface of a shell-viscous liquid continuity of radial velocities and pressures is observed, i.e. for $r = R$ there will be *

$$\mathfrak{g}_x = \frac{\partial u}{\partial t}, \mathfrak{g}_\theta = \frac{\partial \tilde{\mathfrak{g}}}{\partial t}, \mathfrak{g}_r = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (11)$$

$$q_x = -\sigma_{rx}, q_y = -\sigma_{r\theta}, q_z = -p \quad (12)$$

where $\sigma_{rx}, \sigma_{r\theta}$ are viscous forces [1].

It is considered that the rigid contact conditions between the shell and bars are satisfied:

$$u_i(x) = u(x, y_i) + h_i \varphi_1(x, y_i), \quad \mathfrak{g}_i(x) = \mathfrak{g}(x, y_i) + h_i \varphi_2(x, y_i), \\ w_i(x) = w(x, y_i), \quad \varphi_i(x) = \varphi_1(x, y_i), \quad \varphi_{kpi}(x) = \varphi_2(x, y_i); \quad h_i = 0, 5h + H_i^1,$$

where H_i^1 is the distance from the i -th bar to the surface of the cylindrical shell; h_i is the thickness of the i -th longitudinal bar;

$$\phi_i(x) = \phi_1(x, y_i) = - \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{y=y_i}.$$

Problem solution. We represent the solution of the Navier – Stokes equation through the scalar potential ϕ and vector potential $\vec{\Psi}$ in the form

$$\mathfrak{g} = \text{grad} \phi + \text{rot} \vec{\Psi}. \quad (13)$$

Substituting (7) in (6), we get:

$$\rho_m \frac{\partial (\text{grad} \phi + \text{rot} \vec{\Psi})}{\partial t} = -\text{grad} p + \frac{1}{3} \mu \text{grad} \text{div} \vec{\mathfrak{g}} + \bar{\mu} \Delta \vec{\mathfrak{g}}. \quad (14)$$

From (13) we easily get

$$\operatorname{div} \vec{\mathfrak{G}} = \Delta \phi; \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\mathfrak{G}} = \operatorname{grad} \Delta \phi.$$

Using the vector identity $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathfrak{G}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\mathfrak{G}} - \Delta \vec{\mathfrak{G}}$, we can write

$$\Delta \vec{\mathfrak{G}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\mathfrak{G}} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathfrak{G}} = \operatorname{grad} \Delta \phi - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathfrak{G}}.$$

Using (7) we find

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathfrak{G}} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\operatorname{grad} \phi + \operatorname{rot} \vec{\psi}) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi + \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\psi}) = -\operatorname{rot} \Delta \vec{\psi};$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\mathfrak{G}} = \operatorname{grad} (\Delta \phi).$$

Substituting these relations in the equation of motion (8) we find

$$\rho_m \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} \phi) + \operatorname{grad} p - \frac{4}{3} \bar{\mu} \operatorname{grad} p - \frac{4}{3} \bar{\mu} \operatorname{grad} \Delta \phi - \bar{\mu} \operatorname{rot} \Delta \vec{\psi} + \rho_m \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{\psi} = 0$$

or

$$\operatorname{grad} \left(\rho_m \frac{\partial \phi}{\partial t} + p - \frac{4}{3} \bar{\mu} \Delta \phi \right) + \operatorname{rot} \left(-\bar{\mu} \Delta \vec{\psi} + \rho_m \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} \right) = 0.$$

This equation will be satisfied if we assume

$$\rho_m \frac{\partial \phi}{\partial t} + p - \frac{4}{3} \bar{\mu} \Delta \phi = 0; \quad (15)$$

$$-\bar{\mu} \Delta \vec{\psi} + \rho_m \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} = 0. \quad (16)$$

Thus, the particular solution of equation (8) can be obtained based on the particular solutions (15) and (16). From (9) and (10) it can be seen that for finding the potentials ϕ and $\vec{\psi}$ we need to know the pressure p . We illustrate it on an example, when the liquid is viscous Newtonian. In this case to the system of Navier – Stokes linearized equations (8) that contains five unknowns, three components of velocity $\mathfrak{G}_x, \mathfrak{G}_r, \mathfrak{G}_\theta$, pressure p and density

ρ_m , we add the continuity equation $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_m \operatorname{div} \vec{\mathfrak{G}} = 0$ and the formula closing

the system in the form $\frac{\partial p}{\partial \rho} = a_*^2$. In the monograph [10] after some

transformations the following linearized wave equation is obtained

$$\frac{1}{a_*^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 \left(p + \frac{4\bar{\mu}}{3\rho_m a_*^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right). \quad (17)$$

The solution of equation (11) is of the form

$$p = (p_0 J_n(\lambda r) + c_0 Y_n(\lambda r)) \exp i(kx + n\theta + \omega t) \quad (18)$$

where

$$\lambda = \sqrt{\frac{\omega^2}{a_*^2 \left(1 + i \frac{4\bar{\mu}\omega}{3\rho_m a_*^2} \right)}} - k^2, \quad I_n, Y_n$$

are first and second kind Bessel functions of order n , where n is the amount of waves along the circumference; k is a wave number or a constant propagated phase, where $k = \tilde{m}\pi/L$, $\tilde{m}$ is the amount of longitudinal waves in the shell, the value ω characterizes cyclic frequency of the wave; $\bar{\mu}$ is a dynamical viscosity factor; ρ_m is liquid's density in unperturbed state; a_* is the velocity of propagated small perturbations in liquid; p_0, c_0 are constants.

Assuming the function p bounded as $r \rightarrow \infty$, we find $p_0 = 0$ and then finally

$$p = c_0 Y_n(\lambda r) \exp i(kx + n\theta + \omega t). \quad (19)$$

From (15), for finding ϕ we get the equation

$$\Delta\phi - \frac{3\rho_m}{4\bar{\mu}} \frac{\partial\phi}{\partial t} = c_0 Y_n(\lambda r) \exp i(kx + n\theta + \omega t). \quad (20)$$

The solution of the homogeneous equation (20) is of the form

$$\phi = C_1 I_n(\tilde{k}r) + C_2 K_n(\tilde{k}r),$$

where $\tilde{k} = \sqrt{k^2 + 3i\omega\rho_m/4\bar{\mu}}$, $I_n(\tilde{k}r)$, $K_n(\tilde{k}r)$ are the first and second kind modified Bessel functions of order n , respectively; C_1, C_2 are constants. By means of the method of variation of constants, we can write the solution of the equation in the form

$$\phi(r) = p_0 f(r) + \mu_1 K_n(\tilde{k}r), \quad (21)$$

where

$$\Delta(r) = I_n(\tilde{k}r)K'_n(\tilde{k}r) - I'_n(\tilde{k}r)K_n(\tilde{k}r);$$

$$f(r) = I_n(\tilde{k}r) \int_r^R \Delta^{-1}(\xi) J_n(\lambda\xi) K_n(\tilde{k}\xi) d\xi + K_n(\tilde{k}r) \int_0^r \Delta^{-1}(\xi) J_n(\lambda\xi) I_n(\tilde{k}\xi) d\xi.$$

The equation with respect to the componenets of the vector $\bar{\Psi}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ is of the form $\bar{\Delta}\bar{\Psi} = \frac{\rho_m}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t}$

or

$$\psi_i''(r) + \frac{1}{r} \psi_i'(r) - \left(k^2 + \frac{i\omega \rho_m}{\bar{\mu}} + \frac{n^2}{r^2} \right) \psi_i(r) = 0. \quad (22)$$

The solution of equation (22) corresponding to the problem under consideration, is of the form:

$$\psi_i = \mu_2 Y_n(qr) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (23)$$

here $q = \sqrt{k^2 + i\omega/\bar{\mu}}$.

Using (13), (17) and (19), for the components of velocity vector we get:

$$\begin{aligned} v_x &= \left[-\frac{k\omega}{\rho_m a_*^2} p_0 f(r) + ikJ_n(kr)\mu_1 + (inJ_n(qr) - qJ_n'(qr))\mu_2 \right] \exp i(kx + n\theta + \omega t); \\ v_\theta &= \left[-\frac{n\omega}{\rho_m a_*^2} p_0 f(r) + inJ_n(kr)\mu_1 + i\left(k - \frac{n}{R}\right)J_n(qr)\mu_2 \right] \exp i(kx + n\theta + \omega t); \\ v_r &= \left[\frac{i\omega}{\rho_m a_*^2} p_0 f'(r) + kJ_n'(kr)\mu_1 + (qJ_n'(qr) - ikJ_n(qr))\mu_2 \right] \exp i(kx + n\theta + \omega t). \end{aligned} \quad (24)$$

By means of the viscosity force formula [1] we find:

$$\begin{aligned} \sigma_{rx} &= \bar{\mu} \left[-\frac{2k\omega}{\rho_m a_*^2} f'(r) p_0 + 2ikJ_n'(kr)\mu_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left(-k\left(k - \frac{n}{R}\right)J_n(qr) + \frac{in}{R}J_n'(qr) - J_n''(qr) \right) \mu_2 \right] \exp i(kx + n\theta + \omega t); \\ \sigma_{r\theta} &= \bar{\mu} \left[-\frac{2n\omega}{R\rho_m a_*^2} f'(r) p_0 + \frac{2in}{R}J_n'(kr)\mu_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left(i\left(k - \frac{n}{R}\right)J_n(qr) - ikJ_n'(qr) + J_n''(qr) \right) \mu_2 \right] \exp i(kx + n\theta + \omega t); \\ \sigma_{rr} &= p_0 J_n(\lambda r) \exp i(kx + n\theta + \omega t). \end{aligned} \quad (25)$$

Using contact conditions (12) and expressions (25), we find the forces q_x, q_y, q_z acting on the shell as viewed from viscous liquid

$$\begin{aligned}
 q_x = \bar{\mu} & \left[-\frac{2k\omega}{\rho_m a_*^2} f'(r) p_0 + 2ikJ'_n(kr)\mu_1 + \right. \\
 & \left. + \left(-k \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qr) + \frac{in}{R} J'_n(qr) - J''_n(qr) \right) \mu_2 \right] \exp i(kx + n\theta + \omega t); \\
 q_z = p_0 J_n(\lambda R) \exp i(kx + n\theta + \omega t); \\
 q_y = \bar{\mu} & \left[-\frac{2n\omega}{R\rho_m a_*^2} f'(R) p_0 + \frac{2in}{R} J'_n(kr)\mu_1 + \right. \\
 & \left. + \left(i \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qr) - ikJ'_n(qr) + J''_n(qr) \right) \mu_2 \right] \exp i(kx + n\theta + \omega t). \tag{26}
 \end{aligned}$$

We will look for the displacements of the shell points in the form

$$\begin{aligned}
 u = u_{0kn} \exp i(kx + n\theta + \omega t); \quad \tilde{\vartheta} = \vartheta_{0kn} \exp i(kx + n\theta + \omega t) \tag{27} \\
 w = w_{0kn} \exp i(kx + n\theta + \omega t).
 \end{aligned}$$

Here $u_{0kn}, \vartheta_{0kn}, w_{0kn}$ are unknown constants.

Contact conditions (11) imply a system of algebraic equations with respect to unknown constants $p_0, \mu_1, \mu_2, u_{0kn}, \vartheta_{0kn}, w_{0kn}$. This system allows to express the constants and μ_2 by the constants $u_{0kn}, \vartheta_{0kn}, w_{0kn}$. Then we get:

$$\begin{aligned}
 q_x = \bar{\mu} i \omega \Delta^{-1} & \left[\left(-\frac{2k\omega}{\rho_m a_*^2} f'(R) \Delta_{11} + 2ikJ'_n(kR) \Delta_{12} + \left(-k \left(k - \frac{n}{R} \right) \times \right. \right. \right. \\
 & \times J_n(qR) + \frac{in}{R} J'_n(qR) - J''_n(qR) \Big) \Delta_{13} \Big) u_{0kn} + \\
 & + \left(-\frac{2k\omega}{\rho_m a_*^2} f'(R) \Delta_{21} + 2ikJ'_n(kR) \Delta_{22} + \vartheta_{0kn} + \right. \\
 & + \left(-\frac{2k\omega}{\rho_m a_*^2} f'(R) \Delta_{31} + 2ikJ'_n(kR) \Delta_{32} + \left(-k \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{in}{R} J'_n(qR) - J''_n(qR) \right) \Delta_{33} \right) w_{0kn} \Big] \exp i(kx + n\theta + \omega t); \tag{28}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_y = & \bar{\mu} i \omega \Delta^{-1} \left[\left(-\frac{2k\omega}{R\rho_m a_*^2} f'(R) \Delta_{11} + \frac{2in}{R} J'_n(kR) \Delta_{12} + \left(i \left(k - \frac{n}{R} \right) \times \right. \right. \right. \\
& \times J_n(qR) - ikJ'_n(qR) + J''_n(qR) \Big) \Delta_{13} \Big) u_{0kn} + \left(-\frac{2k\omega}{R\rho_m a_*^2} f'(R) \Delta_{21} + \right. \\
& + \frac{2in}{R} J'_n(kR) \Delta_{22} + \left(i \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) - ikJ'_n(qR) + J''_n(qR) \right) \Delta_{23} \Big) \vartheta_{0kn} + \\
& + \left(-\frac{2n\omega}{R\rho_m a_*^2} f'(R) \Delta_{31} + \frac{2in}{R} J'_n(kR) \Delta_{32} + \left(i \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) - \right. \right. \\
& \left. \left. - ikJ'_n(qR) + J''_n(qR) \right) \Delta_{33} \right) w_{0kn} \Big] \exp i(kx + n\theta + \omega t);
\end{aligned}$$

$$q_z = J_n(\lambda R) i \omega \Delta^{-1} (\Delta_{11} u_{0kn} + \Delta_{21} \vartheta_{0kn} + \Delta_{31} w_{0kn}) \exp i(kx + n\theta + \omega t),$$

where Δ is the main determinant, $\Delta_{sp}(s, p = 1, 2, 3)$ are auxiliary determinants of this system. These determinants are given in [6].

We can calculate the work performed by these loads when taking the system from the deformed state to the initial undeformed state.

$$\begin{aligned}
A_j = & \frac{2\bar{\mu} i \omega \Delta^{-1}}{nk} \left(e^{ikl} - 1 \right) \left(e^{\frac{\pi ni}{2}} - 1 \right) e^{i\omega t} \left\{ \left[-\frac{2k\omega}{\rho_0 a_*^2} f'(R) \Delta_{11} + 2ikJ'_n(kR) \Delta_{12} + \right. \right. \\
& + \left(-k \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) + \frac{in}{R} J'_n(qR) - J''_n(qR) \right) \Delta_{13} \Big] u_{0kn}^2 + \\
& + \left[-\frac{2n\omega}{R\rho_0 a_*^2} f'(R) \Delta_{21} + \frac{2in}{R} J'_n(kR) \Delta_{22} + \left(i \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) - ikJ'_n(qR) + \right. \right. \\
& + J''_n(qR) \Big) \Delta_{23} \Big] \vartheta_{0kn}^2 + J_n(\lambda R) \bar{\mu}^{-1} \Delta_{31} w_{0kn}^2 + \left[-\frac{2k\omega}{\rho_m a_*^2} f'(R) \Delta_{21} + \right. \\
& + 2ikJ'_n(kR) \Delta_{22} + \left(-k \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) + \frac{in}{R} J'_n(qR) - J''_n(qR) \right) \Delta_{23} - \\
& - \frac{2n\omega}{R\rho_m a_*^2} f'(R) \Delta_{11} + \frac{2in}{R} J'_n(kR) \Delta_{12} + \left(i \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) - ikJ'_n(qR) \right. \\
& \left. \left. + J''_n(qR) \right) \Delta_{13} \Big] u_{0kn} \vartheta_{0kn} + \left[-\frac{2k\omega}{\rho_m a_*^2} f'(R) \Delta_{31} + 2ikJ'_n(kR) \Delta_{32} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(-k \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) + \frac{in}{R} J'_n(qR) - J''_n(qR) \right) \Delta_{33} \right] w_{0kn} \right\} \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-k \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) + \frac{in}{R} J'_n(qR) - J''_n(qR) \right) \Delta_{33} + J_n(\lambda R) \bar{\mu}^{-1} \Delta_{31} \Big] u_{0kn} w_{0kn} + \\
& + \left[-\frac{2n\omega}{R\rho_m a_*^2} f'(R) \Delta_{33} + \frac{2in}{R} J'_n(qR) \Delta_{32} + \right. \\
& \left. + \left(i \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) - ik J'_n(qR) + J''_n(qR) \right) \Delta_{33} + J_n(\lambda R) \bar{\mu}^{-1} \Delta_{21} \right] \Big] g_{0kn} w_{0kn}.
\end{aligned}$$

We look for the perturbed velocities potential ϕ in the form:

$$\tilde{\phi}(x, r, \theta, t) = f(r) \exp i(kx + n\theta + \omega t). \quad (30)$$

Using (30), from equation (7) we have [10]:

$$\tilde{\phi} = -\varphi_{\alpha n} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (31)$$

$$\tilde{p} = \varphi_{\alpha n} \rho^* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (32)$$

where

$$\varphi_{\alpha n} = \begin{cases} \frac{K_n(\beta r)}{K'_n(\beta R)}, & M_1 < 1 \\ \frac{N_n(\beta r)}{N'_n(\beta R)}, & M_1 > 1 \\ \frac{r^n}{nR^{n-1}}, & M_1 = 1. \end{cases}$$

Here

$$M_1 = \frac{U + \omega R / k}{a_0}; \quad \beta^2 = R^{-2} (1 - M_1^2) k^2; \quad \beta_1^2 = R^{-2} (M_1^2 - 1) k^2 K_n$$

is a second kind n -th order modified Bessel function; N_n are n -th order Neumann functions; ρ_* is density of liquid.

Proceeding from condition (10), using (32) we have

$$q_{zm} = \tilde{\phi}_{\alpha n} \rho^* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (33)$$

where $\tilde{\phi}_{\alpha n} = \varphi_{\alpha n} \Big|_{r=R}$.

We can calculate the work performed by q_z when taking the system from the deformed state to the initial under formed state

$$A_m = \frac{2R\tilde{\phi}_{an}\rho^*}{nk} \left(e^{ikl} - 1 \right) \left(1 - e^{in\pi} \right) \left(\omega^2 + 2Uk\omega + k^2U^2 \right).$$

Substitute approximation (27) in functional Π (2) and considering that in this functional $x_1 = 0$, $x_2 = l$, $y_1 = 0$, $y_2 = 2\pi$, $t' = 0$, $t'' = \pi/\omega$, we integrate with respect to x, y and t . Then instead of the functional Π we get the function W of the required values $u_{0kn}, \vartheta_{0kn}, w_{0kn}$. The stationary value of the obtained function is determined by the following system of equations:

$$\frac{\partial W}{\partial u_{0kn}} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial \vartheta_{0kn}} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial w_{0kn}} = 0 \quad (34)$$

Or

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{4i}{n} \left(k^2 \tilde{b}_{11} + \frac{n^2 \tilde{b}_{66}}{R^2} \right) ST \left(1 - e^{in\pi} \right) - 2\omega^2 \left(\tilde{\rho} \cdot S \cdot T + L \sum_{i=1}^{k_1} \rho_i F_i \sin^2 n\theta_i \right) + \right. \\ & + \frac{4\tilde{\mu}i\omega\Delta^{-1}}{nk} \left(e^{ikl} - 1 \right) \left(e^{in\pi} - 1 \right) \left[-\frac{2k\omega}{\rho_0 a_*^2} f'(R) \Delta_{11} + 2ikJ'_n(kR) \Delta_{12} + \right. \\ & + \left. \left(-k \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) + \frac{in}{R} J'_n(qR) - J''_n(qR) \right) \Delta_{13} \right] + \\ & + \frac{l}{2} \sum_{i=1}^{k_1} E_i F_i k^2 \sin^2 n\theta_i \left. \right\} u_{0kn} + \left\{ -\frac{4i}{n} \left(\frac{2nk\tilde{b}_{12}}{R} + \frac{nk^2}{R} \tilde{b}_{66} \right) ST (1 - e^{in\pi}) + \right. \\ & + \frac{4\tilde{\mu}i\omega\Delta^{-1}}{nk} (e^{ikl} - 1) (e^{in\pi} - 1) \left[-\frac{2k\omega}{\rho_m a_*^2} f'(R) \Delta_{21} + 2ikJ'_n(kR) \Delta_{22} + \right. \\ & + \left. \left(-k \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) + \frac{in}{R} J'_n(qR) - J''_n(qR) \right) \Delta_{23} - \frac{2n\omega}{R\rho_m a_*^2} f'(R) \Delta_{11} + \right. \\ & + \frac{2in}{R} J'_n(kR) \Delta_{12} + \left. \left(i \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) - ikJ'_n(qR) + J''_n(qR) \right) \Delta_{13} \right] \left. \right\} \vartheta_{0kn} + \\ & + \left\{ -\frac{4ik\tilde{b}_{12}}{nR} ST (1 - e^{in\pi}) + \frac{4\tilde{\mu}i\omega\Delta^{-1}}{nk} \left(e^{ikl} - 1 \right) \left(e^{in\pi} - 1 \right) \times \right. \\ & \times \left[\frac{2k\omega}{\rho_m a_*^2} f'(R) \Delta_{31} + 2ikJ'_n(kR) \Delta_{32} + \left(k \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) + \frac{in}{R} J'_n(qR) - \right. \right. \\ & \left. \left. - J''_n(qR) \right) \Delta_{33} \right] \left. \right\} w_{0kn} = 0; \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[-\frac{2k\omega}{\rho_m a_*^2} f'(R) \Delta_{21} + 2ikJ'_n(kR) \Delta_{22} + \left(-k \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{in}{R} J'_n(qR) - J''_n(qR) \right) \Delta_{23} - \frac{2n\omega}{R \rho_m a_*^2} f'(R) \Delta_{11} + \frac{2in}{R} J'_n(kR) \Delta_{12} + \right. \\
& \quad \left. + \left(i \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) - ikJ'_n(qR) + J''_n(qR) \right) \Delta_{13} \right] u_{0kn} + \\
& \quad + \left\{ -\frac{4i}{n} \left(\frac{n^2 \tilde{b}_{22}}{R^2} + k^2 \tilde{b}_{66} \right) ST \left(1 - e^{in\pi} \right) + \frac{4\bar{\mu}i\omega\Delta^{-1}}{nk} \left(e^{ikl} - 1 \right) \left(e^{in\pi} - 1 \right) \times \right. \\
& \quad \times \left[-\frac{2n\omega}{R \rho_m a_*^2} f'(R) \Delta_{21} + \frac{2in}{R} J'_n(kR) \Delta_{22} + \left(i \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) - ikJ'_n(qR) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + J''_n(qR) \right) \Delta_{23} + \frac{l}{2} \sum_{i=1}^{k_1} \frac{G_i J_{kpi}}{R^2} k^2 \cos^2 n\theta_i - \omega^2 \left(\tilde{\rho} \cdot S \cdot T + L \sum_{i=1}^{k_1} \rho_i F_i \sin^2 n\theta_i \right) + \right. \\
& \quad \left. + L \sum_{i=1}^{k_1} \rho_i F_i \cos^2 n\theta_i + i \sum_{i=1}^{k_1} \frac{\rho_i J_{kpi} \cos^2 n\theta_i}{R^2} \right] \Bigg\} \vartheta_{0kn} + \left\{ \frac{\sin \tilde{b}_{22}}{R^2} ST \left(1 - e^{in\pi} \right) \times \right. \\
& \quad \times \left[-\frac{2n\omega}{R \rho_0 a_*^2} f'(R) \Delta_{31} + \frac{2in}{R} J'_n(kR) \Delta_{32} \frac{4\bar{\mu}i\omega\Delta^{-1}}{nk} \left(e^{ikl} - 1 \right) \left(e^{in\pi} - 1 \right) \times \right. \\
& \quad \times \left[-\omega^2 L \sum_{i=1}^{k_1} \frac{m \rho_i J_{kpi} \cos^2 n\theta_i}{R^2} + \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{k_1} \frac{G_i J_{kpi}}{R^2} k^2 m \cos^2 n\theta_i + \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(i \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) - ikJ'_n(qR) + J''_n(qR) \right) \Delta_{33} + J_n(\lambda R) \bar{\mu}^{-1} \Delta_{21} \right] \right\} w_{0kn} = 0; \\
& \quad \left\{ -\frac{4k\tilde{b}_{12}}{nR} ST \left(1 - e^{in\pi} \right) + \frac{4\bar{\mu}i\omega\Delta^{-1}}{nk} \left(e^{ikl} - 1 \right) \left(e^{in\pi} - 1 \right) \right\} \left[-\frac{2k\omega}{\rho_m a_*^2} f'(R) \Delta_{31} + \right. \\
& \quad \left. + 2ikJ'_n(kR) \Delta_{32} + \left(-k \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) + \frac{in}{R} J'_n(qR) - J''_n(qR) \right) \Delta_{33} + \right. \\
& \quad \left. + J_n(\lambda R) \bar{\mu}^{-1} \Delta_{31} \right] u_{0kn} + \left\{ -\frac{4\tilde{b}_{22}}{R^2} ST \left(1 - e^{in\pi} \right) + \frac{4\bar{\mu}i\omega\Delta^{-1}}{nk} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (e^{ikl} - 1) (e^{in\pi} - 1) \left[-\frac{2n\omega}{R\rho_m a_*^2} f'(R) \Delta_{31} + \frac{2in}{R} J'_n(kR) \Delta_{32} - \right. \\
& - \omega^2 l \sum_{i=1}^{k_1} \rho_i \frac{J_{kpi} \cos^2 n\theta_i}{R^2} \cdot n - \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{k_1} \frac{G_i J_{kpi}}{R^2} n k^2 \cos^2 n\theta_i + \\
& + \left(i \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qR) - ik J'_n(qR) + J''_n(qR) \right) \Delta_{33} + J_n(\lambda R) \bar{\mu}^{-1} \Delta_{21} \left. \right] \mathfrak{g}_0 + \\
& + \left\{ \frac{-4i\tilde{b}_{22}}{nR^2} ST(1 - e^{in\pi}) + \frac{4\bar{\mu}i\omega\Delta^{-1}}{nk} (e^{ikl} - 1) (e^{in\pi} - 1) \left[-2J_n(\lambda R) \bar{\mu}^{-1} \Delta_{31} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \omega^2 \left(\tilde{\rho} \cdot S \cdot T + L \sum_{i=1}^{k_1} \rho_i F_i \sin^2 n\theta_i + L \sum_{i=1}^{k_1} \rho_i \frac{J_{kpi} \cos^2 n\theta_i n^2}{R^2} \right) \right] w_{0kn} = 0, \right.
\end{aligned}$$

where $S = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} f_1(z) dz$, $T = \int_0^l e^{ikx} f_2(x) dx$.

Since the system (35) is a homogeneous algebraic system of linear equations, the necessary and sufficient condition for the existence of its nonzero solution is the equality of its main determinant to zero. As a result we get the following frequency equation

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad (36)$$

where φ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) are the coefficients for the unknowns $u_{0kn}, \mathfrak{g}_{0kn}, w_{0kn}$ in the system.

Conclusions. Equation (36) was calculated by the numerical method. The parameters contained in the solution of the problem are:

$$\begin{aligned}
& \tilde{b}_{11} = 18,3 \text{ HPa}; \quad \tilde{b}_{12} = 2,77 \text{ HPa}; \quad \tilde{b}_{22} = 25,2 \text{ HPa}; \quad \tilde{b}_{66} = 3,5 \text{ HPa}; \\
& \rho = \rho_i = 1,85 \cdot 10^4 \frac{\text{H}}{\text{m}^3}; \quad \tilde{E}_i = 6,67 \cdot 10^9 \frac{\text{H}}{\text{m}^2}; \quad v_1 = v_2 = 0,35; \quad a_0 = 1450 \frac{\text{m}}{\text{sec}}; \\
& \rho_m = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{H}}{\text{m}^3}; \quad \alpha = 0,4; \quad h = 0,45 \cdot 10^{-3} \text{ m}; \quad \frac{l}{R} = 3; \quad \tilde{m} = 1; \quad R = 1,6 \text{ m}; \\
& n = 8; \quad F_i = 5,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2; \quad I_{kp,i} = 0,23 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4; \quad I_{yi} = 5,1 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4; \\
& I_{zi} = 1,3 \text{ mm}^4 \quad f_1(z) = 1 + \alpha \frac{z}{l}; \quad f_2(x) = 1 + \beta \frac{x}{l}.
\end{aligned}$$

The results of calculations were given in Fig. 2 in the form of the dependence of frequency parameter U/a_0 . On the amount of stiffening longitudinal bars k_1 on the shell surface, in Fig. 3. in the form of dependence of the frequency parameter on inhomogeneity parameter in the direction of the generatrix β of the shell, in Fig. 4 in the form of dependence of the frequency parameter on the liquid flow rate U . In the figures, the dotted lines correspond to vibrations of a longitudinally stiffened viscous liquid-filled cylindrical shell in infinite ideal liquid, the solid lines correspond to vibrations of a longitudinally stiffened cylindrical shell in an infinite ideal liquid.

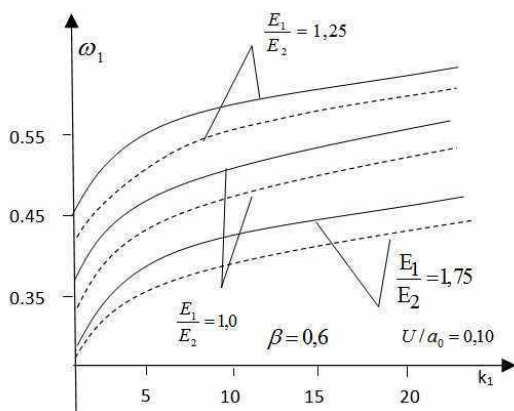


Fig. 2 – Dependence of the frequency parameter on the amount of longitudinal ribs k_1 .

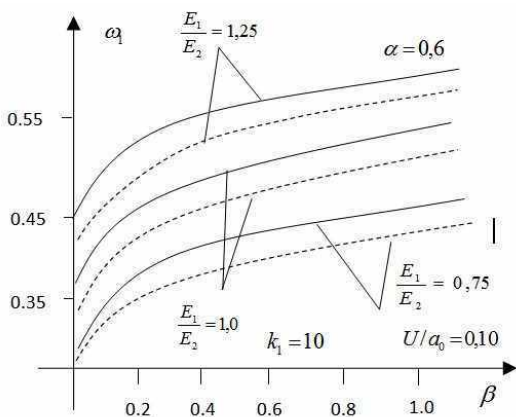


Fig. 3 – Dependence of the frequency parameter on the inhomogeneity parameter β in the longitudinal direction

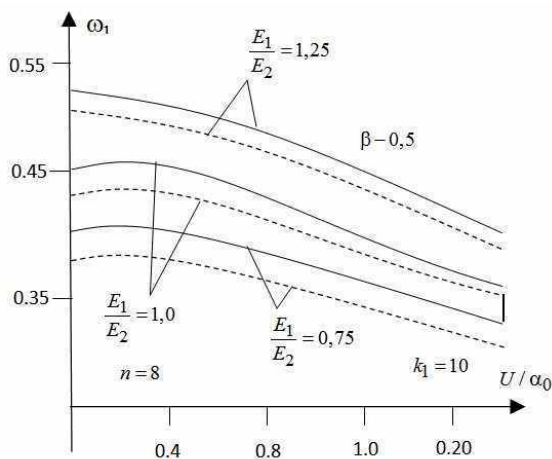


Fig. 4 – Dependence of the frequency parameter on liquid flow rate

From the figures it can be seen that availability of viscous liquid leads to decrease in the value of natural frequency vibrations of the system compared to the frequency of vibrations of the system with any liquid. As can be seen from Fig. 2 with increasing the amount of longitudinal ribs, the value of the frequency parameter increases. As the inhomogeneity parameter increases in the direction of the generatrix of the shell β , as can be seen from Fig. 3 the value of the frequency parameter increases. Furthermore, the value of the frequency parameter increases with increasing orthotropic properties of the cylindrical shell, and decreases with increasing the liquid flow rate (Fig. 4).

REFERENCES

1. **Alizadeh N.I.**, Vibrations of an inhomogeneous orthotropic cylindrical shell stiffened with annular ribs under dynamical interaction with soil // *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*. Baku. 2018 No 3-4. P. 61–67.
2. **Amiro I.Ya., Zarutskiy V.A., Polyakov P.S.** Ribbed cylindrical shells. Kiev: Naukova Dumka, 1973. 248 p. (in Russian).
3. **Badirov Z.M.** Vibrations of an Anisotropic Laterally Stiffened Fluid Filled Cylindrical Shell Inhomogeneous in Thickness and Circumference // *International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering*. 2020. Iss. 42. Vol. 12. No 1. P. 73–77.
4. **Ganiyev D.S.** Free Vibrations of a Vertical Support Consisting of Three Orthotropic, Viscous-Elastic Soil Contacting Cylindrical Panels to be Stiffened with Longitudinal Ribs // *International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering*, 2020. Iss. 42. Vol. 12. No 1. P. 63–67.
5. **Latifov F.S., Yusifov M.Z. Alizade N.I.** Free vibrations of heterogeneous orthotropic cylindrical shells reinforced by annular ribs and filled by fluid // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2020. Vol. 61. No 3. P. 486–493.
6. **Latifov F.S., Aliyev Sh.Sh., Seifullaev F.A.** Forced vibrations of a longitudinally stiffened orthotropic cylindrical shell in liquid // *Vestnik Zaporizhsk National Univ. Ser.: Phys. math. sci.* 2017. No 2. P. 131–139.

7. **Latifov F.S.** Vibrations of elastic and fluid medium-filled shells. Baku, 1999. 164 p.
8. **Lomakin V.A.** Elasticity theory of inhomogeneous bodies. Moscow: MGU publ., 1975. 355 p. (in Russian).
9. **Nematli A.I.** Free Orthotropic Viscous-Elastic and Medium-Contacting Cylindrical Shell Strengthened with Rings and Elastic Symmetry Axis Forms of Angle with Coordinate Axis // International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering. 2019. Iss. 41. Vol. 11. No 4. P. 11–15.
10. **Volmir S.A.** Shells in fluid and gas flow. Aeroelasticity problems. Moscow: Nauka, 1976. 416 p. (in Russian).

УДК 539.3

Н. І. Алізаде

КОЛИВАННЯ В РІДИНІ ПОЗДОВЖНЬО ПІДКРІПЛЕНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ЩО ЗАПОВНЕНА В'ЯЗКОЮ РІДИНОЮ

Досліджено вільні коливання в ідеальній рідині поздовжньо зміцненої ортотропної циліндричної оболонки, що заповнена в'язкою рідиною. Для опису руху внутрішньої в'язкої рідини використовується лінеаризоване рівняння Нав'є – Стокса, рух зовнішньої рідини описується хвильовим рівнянням, записаним в потенціалі обуреної швидкості. На основі принципу стаціонарності дії Гамільтона – Остроградського отримано частотне рівняння поздовжньо підкріпленої ортотропної циліндричної оболонки з зв'язкою рідиною, що контактує з ідеальною рідиною. Побудовано характерні криві залежностей.

Ключові слова: вільні коливання; оболонка; ідеальна рідина; в'язка рідина; напруження; жорсткість; варіаційний принцип.

Розглядаємо вільні коливання в ідеальній рідині поздовжньо зміцненої ортотропної циліндричної оболонки, заповненої в'язкою рідиною. Рівняння руху в рідині ортотропної оболонки, заповненої рідиною, отримано на основі принципу стаціонарності дії Гамільтона – Остроградського

$$\delta W = 0,$$

де $W = \int_{t'}^{t''} \Pi dt$ – дія за Гамільтоном; t' і t'' – задані довільні моменти часу; $\Pi = A_0 + \sum_{i=1}^{k_1} A_n + A_m + A_j$; A_0 – загальна енергія циліндричної оболонки; A_n – загальна енергія i -го поздовжнього ребра; k_1 – момент поздовжніх ребер; A_m і A_j – потенційні енергії зовнішніх поверхневих навантажень від ідеальних і в'язких рідин, які прикладаються до оболонки і визначаються як робота, виконана цими навантаженнями при переведенні системи з деформованого стану в початковий недеформований, і представляється у вигляді

$$A_m = -R \int_0^L \int_0^{2\pi} q_{zm} w dx d\theta, \quad A_j = -R \int_0^L \int_0^{2\pi} (q_x u + q_y v + q_z w) dx d\theta.$$

Тут q_x, q_y, q_z – інтенсивність навантаження, що діє на оболонку з боку в'язкої рідини, q_{zm} – інтенсивність навантаження, яке діє на оболонку з боку ідеальної рідини.

Для опису руху внутрішньої в'язкої рідини використовується лінеаризоване рівняння Нав'є – Стокса, рух зовнішньої рідини описується хвильовим рівнянням, записаним у формі потенціалу збурених швидкостей.

Після спеціальних перетворень одержана однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь. Необхідною та достатньою умовою існування її ненульового розв'язку є рівність її основного детермінанта нулю. В результаті отримуємо таке рівняння частоти

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

де $\varphi_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ – функції невідомих; u_i, ϑ_i, w_i – переміщення стержнів, що використовуються для підкріплення оболонки.

Отримані залежності частоти коливань від кількості поздовжніх підкріплень, параметру неоднорідності та обсягу заповненої рідини.

Наведені числові результати. Проведено порівняльний аналіз параметру частоти для випадку заповнення оболонки ідеальною рідиною. На рис. 1– рис. 3 пунктирні лінії відповідають коливанням поздовжньо зміцненої заповненої в'язкою рідиною циліндричної оболонки, що знаходиться в нескінченній ідеальній рідині, суцільні лінії – коливанням поздовжньо зміцненої циліндричної оболонки в нескінченній ідеальній рідині.

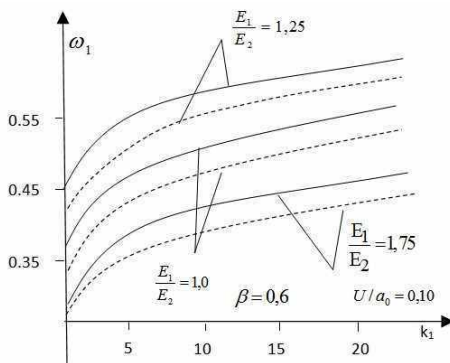


Рис. 1 – Залежність частотного параметра від кількості поздовжніх ребер k_1

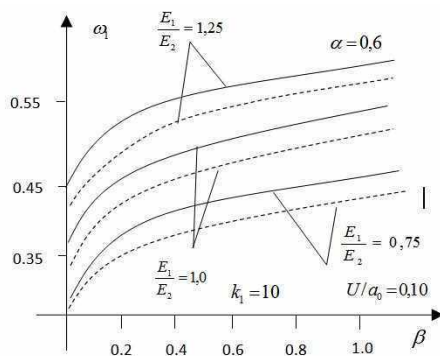


Рис. 2 – Залежність частотного параметра від параметра неоднорідності β в поздовжньому напрямку

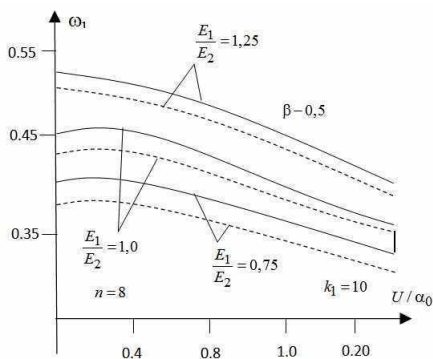


Рис. 3 – Залежність частотного параметра від витрати рідини

З рисунків видно, що наявність в'язкої рідини призводить до зниження значення власної частоти коливань системи у порівнянні з частотою коливань системи з будь-якою іншою рідиною.

Як видно з рис. 1, зі збільшенням кількості поздовжніх ребер значення частотного параметра збільшується.

При збільшенні параметра неоднорідності в напрямку утворювальної лінії оболонки (рис. 2) значення частотного параметра збільшується. Крім того, значення частотного параметра збільшується з посиленням ортотропних властивостей циліндричної оболонки і зменшується зі збільшенням витрат рідини (рис. 3).

Висновки. Наявність в'язкої рідини призводить до зниження значення власної частоти коливань оболонки у порівнянні з частотою її коливань з будь-якою іншою рідиною. Показано також, що зі збільшенням кількості поздовжніх ребер значення частотного параметра збільшується. Крім того, значення частоти коливань збільшується з

посиленням ортотропних властивостей циліндричної оболонки і змен-
зменшується зі збільшенням витрат рідини.

УДК 539.3

Н. И. Ализаде

КОЛЕБАНИЯ В ЖИДКОСТИ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Исследуются свободные колебания в идеальной жидкости продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной вязкой жидкостью. Для описания движения внутренней вязкой жидкости используется линеаризованное уравнение Навье – Стокса, движение внешней жидкости описывается волновым уравнением, записанным в потенциале скоростей возмущенного течения. На основе принципа стационарности действия Гамильтона – Остроградского получено частотное уравнение продольно упрочненной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью, контактирующей с идеальной жидкостью. Построены характерные кривые зависимостей.

Ключевые слова: свободные колебания; оболочка; идеальная жидкость; напряжения; жесткость; вариационный принцип.

*Institute of Mathematics and Mechanics,
Azerbaijan National Academy of Sciences,
Baku, Azerbaijan*

Received by the Editorial Board 21.10.2020

DOI 10.15421/4220021
UDC 539.3

H. K. Ismayilov

FORCED VIBRATIONS OF A INHOMOGENEOUS ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL STIFFENED WITH A CROSS-SYSTEM OF RIBS IN LIQUID

In the paper we study forced vibrations of an orthotropic cylindrical shell inhomogeneous in thickness and stiffened with a cross-system of ribs in liquid under the action of inner radial pressure pulsating in time. Based on Hamilton – Ostrogradsky variational principle, we construct a system of equations to determine the displacements of the mid-surface points of an orthotropic cylindrical shell inhomogeneous in thickness and stiffened with a cross-system of ribs under dynamical interaction with liquid. Surface loads acting on the cylindrical shell inhomogeneous in thickness and stiffened with a cross-system of ribs as viewed from liquid are determined from the solutions of liquid motion equations written in potentials. Analytic formulas for finding the displacements of the midsurface points of a liquid-contacting orthotropic cylindrical shell inhomogeneous in thickness and stiffened with a cross-system of ribs, were obtained.

Keywords: *forced vibrations; orthotropic cylindrical shell; ideal liquid; stress; stiffening; variational principle.*

Introduction. To give more rigidity, the shells are stiffened with ribs, and this time slight increase in the mass of the construction increases its strength. Such constructions can be in contact with external medium and be subjected not only to statistical loads but also to dynamical ones. Strength analysis, stability and vibrations of such constructions play an important role when designing modern machines and apparatus. The paper [3] studies forced vibrations of an external liquid-contacting orthotropic longitudinally stiffened cylindrical shell inhomogeneous in thickness under the action of inner radial pressure pulsating in time. Using Hamilton – Ostrogradsky variational principle, the system of equations is structured to determine the displacements of the midsurface points of a liquid-contacting orthotropic cylindrical shell inhomogeneous in thickness and stiffened with a cross-system of ribs. Analytic formulas for finding the displacements of the midsurface points of an orthotropic cylindrical shell stiffened with a cross-system of ribs under the dynamical interaction with liquid, are found. In [4] a problem on forced axially symmetric vibrations of a liquid-filled isotropic cylindrical shell stiffened and loaded with axial compressive forces, was studied. The paper [3] was devoted to forced vibrations of a longitudinally stiffened homogeneous orthotropic cylindrical shell in liquid under the action of inner radial pressure. Analytic formulas are obtained for finding the displacements of the midsurface points of a liquid-contacting, longitudinally stiffened homogeneous orthotropic cylindrical shell. Forced vibrations of an orthotropic cylindrical shell

with solid and liquid medium and stiffened with a cross-system of ribs under the action of external radial pressure pulsating in time, are studied in [6]. The surface loads acting on solid medium as viewed from liquid, are determined from the solutions of liquid motion equation written in potentials. Analytic formulas for finding the displacements of the midsurface points of a liquid-contacting, longitudinally stiffened orthotropic cylindrical shell are found.

In the paper [9] natural vibrations frequency of the system that consisting of a solid medium-filled elastic-plastic orthotropic cylindrical shell strengthened with discretely distributed rings established on a plane perpendicular to its axis is studied. Utilizing the Hamilton – Ostrogradsky principle, a frequency equation for determining vibration frequencies of the system the following consideration was created; its roots were obtained by mathematical method. In the paper [2] free vibrations of an orthotropic, laterally stiffened, ideal fluid-filled cylindrical shell inhomogeneous in thickness and in circumferential direction is studied. Using the Hamilton – Ostrogradsky variational principle, the systems of equations of the motion of an orthotropic, ideal fluid filled cylindrical shell stiffened in thickness and circumference, are constructed.

Problem statement. A ribbed shell is considered as a system consisting of the own anisotropic shell and longitudinal, lateral ribs rigidly connected with it along the contact line (Fig. 1). It is accepted that the stress-strain state of the shell can be completely determined within the linear theory of elastic thin shells based on Kirchhoff – Liav hypothesis, and for calculation of ribs the theory of curvilinear bars is chosen so that the coordinate lines coincide with the principle curvature line of the shell midsurface. It is assumed that the ribs are located along the coordinate lines, and their edges are located like the edges of sheathing lie in the same coordinate plane.

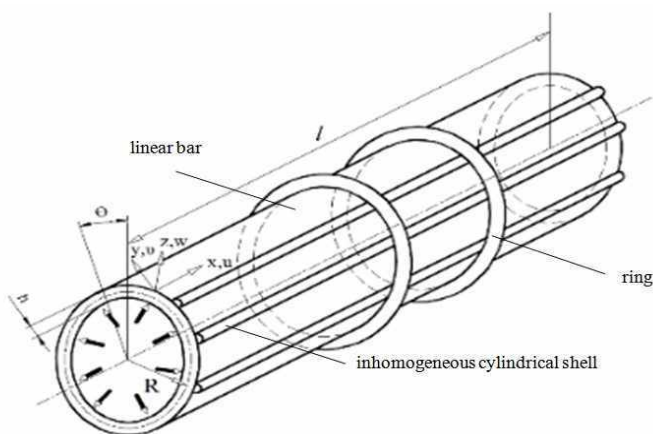


Fig. 1 – Inhomogeneous cylindrical shell reinforced with cross ribs under the action of internal pressure

The strain state of the sheathing may be determined by three components of displacements of its midsurface, u , ϑ and w . This time, the rotation angles of normal elements φ_1, φ_2 with respect to coordinate lines y and x are expressed by w and ϑ by means of the dependences

$$\varphi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varphi_2 = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\vartheta}{R}\right), \quad \text{where } R \text{ is a radius of the shell midsurface.}$$

For describing the strain state of ribs, in addition to three components of displacements of the center of gravity of their cross sections u_i, ϑ_i, w_i of the i -th longitudinal bar and u_j, ϑ_j, w_j of the j -th lateral bar it is necessary to determine the twist angles φ_{kpi} and ϕ_{kpj} .

Considering that according to the accepted hypothesis we have the constancy of radial deflections and equality of appropriate twist angles following from the conditions of rigid junction of ribs with a shell, we write the following relation:

$$\begin{aligned} u_i(x) &= u(x, y_i) + h_i \varphi_1(x, y_i); \quad \vartheta_i(x) = \vartheta(x, y_i) + h_i \varphi_2(x, y_i); \\ w_i(x) &= w(x, y_i); \quad \varphi_i = \varphi_1(x, y_i); \quad \varphi_{kpi}(x) = \varphi_2(x, y_i); \\ u_j(y) &= u(x_j, y) + h_j \varphi_1(x_j, y); \quad \vartheta_j(y) = \vartheta(x_j, y) + h_j \varphi_2(x_j, y); \\ w_j(y) &= w(x_j, y); \quad \varphi_j = \varphi_2(x_j, y); \quad \phi_{kpj}(x) = \varphi_1(x_j, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Here $h_i = 0,5h + H_i^1, h_j = 0,5h + H_j^1$, h is the shell thickness, H_i^1 and H_j^1 are the distances from the axis of the i -th longitudinal and j -th lateral bar to the shell surface, x_i and y_i are the coordinates of the line of conjunction of ribs with a shell, φ_i, φ_{kpi} and ϕ_j, ϕ_{kpj} are rotation and twisting angles of cross-sections of longitudinal and lateral bars, respectively.

For external actions it is assumed that the load surfaces acting on a ribbed shell as viewed from liquid, can be reduced to normal components q_z , applied to the shell midsurface.

Differential equations of motion and natural boundary conditions for a longitudinally stiffened orthotropic cylindrical shell with liquid under the action of axial compression are obtained by the Hamilton – Ostrogradsky variational principle. For that we write in advance the potential and kinetic energies of the system.

There are various ways for accounting inhomogeneity of a shell material. One of them is that the Young modulus and density of the shell material are accepted as normal coordinate function [8]. It is assumed that the Poisson ratio is constant. In this case, the functional of total energy of elastic deformation of the orthotropic cylindrical shell is of the form:

$$\begin{aligned}
\Pi_0 = & \frac{hR}{2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ b_{11}(z) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2(b_{11}(z) + b_{12}(z)) \frac{w}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w^2}{R^2} (b_{11}(z) + \right. \\
& 2b_{12}(z) + b_{22}(z)) + b_{22}(z) \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + 2(b_{12}(z) + b_{22}(z)) \frac{w}{R} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \\
& \left. + 2b_{12}(z) \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + b_{66}(z) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + b_{66}(z) \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + 2b_{66}(z) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right\} dx dy dz; \\
K_0 = & h \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (2)
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
b_{11}(z) = & \frac{E_1(z)}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad b_{22}(z) = \frac{E_2(z)}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad b_{12}(z) = \frac{\nu_2 E_1(z)}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2(z)}{1 - \nu_1 \nu_2}; \\
b_{66}(z) = & G_{12}(z) = G(z). \quad (3)
\end{aligned}$$

R is the radius of shells midsurface, h is shell thickness; u, ϑ, w are the components of displacements of the shell midsurface points.

Suppose that

$$E_1(z) = E_{10} f(z); \quad E_2(z) = E_{20} f(z); \quad G(z) = G_0 f(z); \quad \rho(z) = \rho_0 f(z), \quad (4)$$

where E_{10}, E_{20} are elasticity module of the shell material in coordinate directions, G_0 is the shear modulus of the shell, ρ_0 is the density of the homogeneous shell material.

Allowing for (3) and (4), the total energy functional of the cylindrical shell has the form:

$$\begin{aligned}
\Pi_0 = & \frac{hR}{2(1 - \nu_1 \nu_2)} \int_{-h/2}^{h/2} f(z) dz \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ E_{10} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2(E_{10} + \nu_1 E_{20}) \frac{w}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\
& + \frac{w^2}{R^2} (E_{10} + 2\nu_1 E_{20} + E_{20}) + E_{20} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 - 2(\nu_2 E_{10} + E_{20}) \frac{w}{R} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \\
& \left. + 2\nu_2 E_{10} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + G_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + G_0 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + 2G_0 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right\} dx dy; \quad (5)
\end{aligned}$$

$$K_0 = h\rho_0 \int_{-h/2}^{h/2} f(z)dz \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy.$$

The expressions for potential energy of elastic deformation of the i – th longitudinal rib and the j – th lateral bar are as follows [1]:

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[E_i F_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + E_i J_{yi} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + E_i J_{zi} \left(\frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x^2} \right)^2 + G_i J_{kpi} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx; \\ \Pi_j &= \frac{E_j}{2R} \sum_{j=1}^{k_2} \int_0^{2\pi} \left[F_j \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} - w - \frac{h_j \partial^2 w}{R \partial \theta^2} \right)^2 + \frac{I_{xj}}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{G_j}{R^2 E_j} I_{kpj} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right]_{\xi=\xi_j} d\theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Here $F_i, J_{zi}, J_{yi}, J_{kpi} - F_j, J_{zj}, J_{yj}, J_{kpj}$ is square and inertia moments of the cross-section of the i – th longitudinal and the j – th lateral bar, respectively with respect to the axis Oz and the axis parallel to the axis Oy and passing through the center of gravity of the section, and also its torsional inertia moment; $E_i, G_i - \tilde{E}_j, \tilde{G}_j$ are elasticity and shear module of the material of the i – th longitudinal and the j – th lateral bar.

The potential energy of external surface loads $\bar{q}(q_x, q_y, q_z)$ and loads q_{zz} acting as viewed from liquid and applied to the shell is determined as a work performed by these loads when taking the system from the deformed state to the initial undeformed state and is represented as:

$$A_0 = - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (q_x + q_y + q_z + q_{zz}) w dx dy. \quad (7)$$

The total potential energy of the system equals the sum of potential energies of elastic deformations of the shell, longitudinal ribs and lateral ribs and also potential energies of all external loads as viewed from liquid and potential energy of radial pressure:

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^{k_1} \Pi_i + A_0 + \sum_{j=1}^{k_2} \Pi_j. \quad (8)$$

Kinetic energies of longitudinal and lateral ribs are written as follows [1]:

$$K_i = \sum_{i=1}^{k_1} \rho_i F_i \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (9)$$

$$K_j = \rho_j F_j \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_j}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_j} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] d\varphi.$$

Here t is a time coordinate, ρ_i, ρ_j is density of materials from which the i -th longitudinal and the j -th lateral bar was made.

The kinetic energy of the inhomogeneous cylindrical shell stiffened with cross ribs

$$K = K_0 + \sum_{i=1}^{k_1} K_i + \sum_j^{k_2} K_j. \quad (10)$$

The equations of motion of a ribbed shell were obtained based on the Hamilton – Ostrogradsky principle of stationarity of action:

$$\delta W = 0, \quad (11)$$

where $W = \int_{t'}^{t''} L dt$ is Hamilton action; $L = K - \Pi$ is the Lagrange function, t'

and t'' are the given arbitrary moments of time.

The surface load q_{zz} , acting as viewed from liquid on a longitudinally stiffened shell is determined from the solution of the ideal fluid motion equation [7, 10]:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (12)$$

where φ is a potential of perturbed speeds; a_0 is velocity of propagation of perturbations in liquid.

Continuity of radial speeds and pressures on the contact surface a shell-liquid is observed. The condition of impermeability or smoothness of flow at the shell wall is of the form:

$$\vartheta_r|_{r=R} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1}. \quad (13)$$

Equality of radial pressures on the shell as viewed from liquid

$$q_{zz} = -p|_{r=R}; q_x = q_y = 0. \quad (14)$$

By means of (12), (13) and 14) we can represent the pressure p as viewed from liquid on the shell in the form

$$p = \omega_0^2 \Phi_{\alpha n} \rho_m \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2}. \quad (15)$$

Here

$$\Phi_{\alpha n} = \begin{cases} K_n(\beta r) / K_n'(\beta R), & M_1 < 1 \\ N_n(\beta_1 r) / N_n'(\beta_1 R), & M_1 > 1 \\ \frac{R^n}{nr^{n-1}}, & M_1 = 1 \end{cases} \quad (16)$$

In (16) $t_1 = \omega_0 t$; $M_1 = \frac{\omega/m}{a_0}$; $\beta^2 = R^{-2}(1 - M_1^2)\chi^2$; $\omega_0 = \sqrt{b_{11}/(\rho_0 R^2)}$; $\beta_1^2 = R^{-2}(M_1^2 - 1)\chi^2$; $\xi = x/L$; $\omega_1 = \sqrt{\rho_0 R^2 \omega^2 / b_{11}} = \omega/\omega_0$; K_m is a modified n -th order Bessel function of second kind, N_n is an n -th order Bessel or Neumann function of second kind.

We will assume that the orthotropic cylindrical shell stiffened with cross-system of ribs in liquid is under the action of an inner radial pressure q_z pulsating in time:

$$q_z = q_0 \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega_1 t_1. \quad (17)$$

Problem solution. In what follows we consider hugely supported shells, i.e. for $\xi = 0$ and $\xi = \xi_1$ ($\xi_1 = L/R$) the following boundary conditions are fulfilled:

$$\vartheta = w = 0, \quad T_1 = M_1 = 0.$$

We look for the components of displacements vector of the midsurface points of the shell in the form

$$\begin{aligned} u &= u_0 \cos n\theta \cos \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega_1 t_1; & \vartheta &= \vartheta_0 \sin n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega_1 t_1; \\ w &= w_0 \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega_1 t_1 \end{aligned} \quad (18)$$

where u_0, ϑ_0, w_0 are unknown constants.

Using (9), (14), (15), (17), (18) and accepting $f(z) = 1 + \gamma z/h$ (γ is an inhomogeneity parameter, where $0 \leq \gamma \leq 1$) the problem is reduced to the inhomogeneous system of third order linear algebraic equations with respect to the constants u_0, ϑ_0, w_0 :

$$a_{i1}u_0 + a_{i2}\vartheta_0 + a_{i3}w_0 = q_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (19)$$

where $q_1 = q_2 = 0, q_3 = q_0$.

The elements a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} ($i = 1, 2, 3$) have a bulky form and we do not give them.

Since the system (19) is inhomogeneous, from it we get the displacement amplitudes:

$$u_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \vartheta_0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad w_0 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (20)$$

Here

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= q_0(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}); \quad \Delta_2 = q_0(a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}); \quad \Delta_3 = q_0(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}); \\ \Delta &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}. \end{aligned}$$

Note that for $\Delta = 0$ the displacement amplitudes go to infinity and this corresponds to the resonance case.

Numerical results. Let us consider some results of calculations carried out proceeding from the above dependences (18) of displacements using the finite element method.

The followings were accepted for geometrical and physical parameters characterizing the materials of the shell, liquid and longitudinal bars:

$$\begin{aligned} E_i &= 6,67 \cdot 10^9 \text{ H} / \text{m}^2, \quad \rho_0 = \rho_i = 78 \cdot 10^3 \text{ H} / \text{m}^3; \quad F_i = 3,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2; \\ J_{yi} &= 5,1 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4; \quad \rho_m / \rho_0 = 0,105; \quad J_{yi} / (2\pi R^3 h) = 0,8289 \cdot 10^{-6}; \\ J_{zi} / (2\pi R^3 h) &= 0,13 \cdot 10^{-6}; \quad R = 0,16 \text{ m}; \quad h = 0,45 \cdot 10^{-3} \text{ m}; \quad L = 0,8 \text{ m}; \\ E_{20} &= 25,2 \text{ HPa}; \quad G_0 = 3,5 \text{ HPa}; \quad J_{kpi} / (2\pi R^3 h) = 0,5305 \cdot 10^{-6}; \quad \nu_2 = 0,19; \\ \nu_1 &= 0,11; \quad h_i = 1,39 \cdot 10^{-3} \text{ m}; \quad a_0 = 1350 \text{ m} / \text{sec.}, \quad E_{10} = 18,3 \text{ HPa}. \end{aligned}$$

The dependences of w_0 / q on frequency ω_1 for different ratios E_{10} / E_{20} were represented in Fig. 2. Here solid lines correspond to $E_{10} / E_{20} = 1,25$, dotted lines to- $E_{10} / E_{20} = 0,25$. It can be seen from the figure that for certain frequencies the peaks of the curves go to infinity. These frequencies are resonance frequencies and are determined from the equation $\Delta = 0$. Fur-

thermore, amplification of the property of orthotropy of the shell material reduces to decrease in the value of shell deflection.

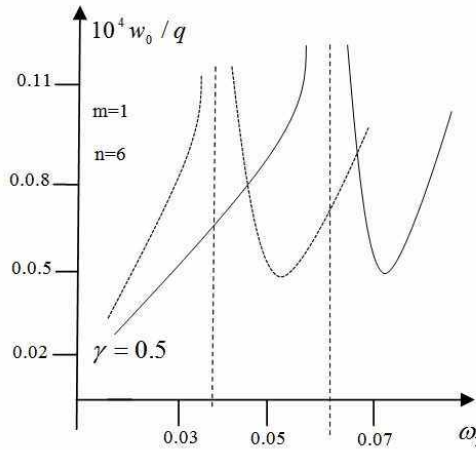


Fig.2 – Dependence of the shell deflection on the vibration frequency

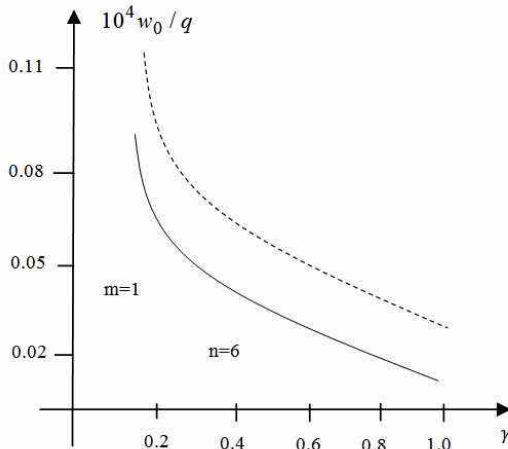


Fig. 3 – Dependence of the shell deflection on the inhomogeneity parameter

The dependences of consider hun erturbations in liquid. w_0 / q on the inhomogeneity parameter γ for different ratios E_{10}/E_{20} , are represented in Fig. 3. Here solid lines correspond $E_{10}/E_{20}=1,25$, the dotted lines to

$E_{10}/E_{20} = 0,75$ From the figure we can see that with increasing the inhomogeneity parameter γ the shell's deflection decreases.

REFERENCES

1. **Amiro I.Ya., Zarutskiy V.A.** Studies in the Field of Dynamics of Ribbed Shells // Applied Mechanics, 1981. Vol. 17. JS II, P. 3–20. (in Russian).
2. **Badirov Z.M.** Vibrations of an Anisotropic Laterally Stiffened Fluid Filled Cylindrical Shell Inhomogeneous in Thickness and Circumference // International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering 2020. Iss. 42. Vol. 12. No 1. P. 73–77.
3. **Ismayilov H.K.** Forced vibrations of a longitudinally stiffened inhomogeneous orthotropic cylindrical shell in Fluid // International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering. 2020. Iss. 42. Vol. 12. No 1. P. 35–39.
4. **Latifov F.S., Salmanov O.Sh.** A problem of forced axially-symmetric vibrations of a liquid-filled cylindrical shell stiffened and loaded with axial compressive forces // Mekhanika mashin i materialov. International scientific-technical journal. Joint Institute of Mechanical Engineering. NAS of Byelorussia. 2008. No 4(5). P. 45–48.
5. **Latifov F.S., Mamedov R.A.** Forced vibrations of a longitudinally stiffened orthotropic cylindrical shell in liquid // Vestnik Zaporizhsk National Univ. Ser.: Phys. math. sci. 2017. No 2. P. 131–139.
6. **Latifov F.S., Musayev Z.S., Mamedzayeva F.T.** Forced vibrations of an orthotropic cylindrical shell with solid medium and liquid and stiffened with cross-system of ribs // Vestnik Zaporizhsk National Univ. Ser.: Phys. math. Sci. 2017. No. 2. P. 140–148.
7. **Latifov F.S.** Vibrations of Shells with Elastic and Liquid Medium, 1999. Elm, Baku, 164 p.
8. **Lomakin V.I.** Theory of Elasticity of Inhomogeneous Bodies. Moscow: Publication House Moscow State University, 1977. 376 p.
9. **Nematli A.I.** "Free Orthotropic Viscous-Elastic and Medium-Contacting Cylindrical Shell Strengthened with Rings and Elastic Symmetry Axis Forms of Angle with Coordinate Axis // International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering, 2019. Iss. 41. Vol. 11. No 4. P. 11–15.
10. **Volmir A.S.** Shells in Fluid and Gas Flow, Hydroelasticity Problems, Sciences, Moscow: Russia, 320 p., 1976. (in Russian).

УДК 539.3

Н. К. Ісмаїлов

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ В РІДИНИ НЕОДНОРІДНОЇ ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ПІДКРИПЛЕНОЇ ПОПЕРЕЧНОЮ СИСТЕМОЮ РЕБЕР

Досліджуються вимушені коливання неоднорідної за товщиною ортотропної циліндричної оболонки, зміцненої поперечною системою ребер, в рідині під дією пульсуючого в часі внутрішнього радіального тиску. На основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського побудована система рівнянь для визначення переміщень точок її серединної поверхні при динамічній взаємодії з рідиною. Поверхневі навантаження, що діють на

неоднорідну за товщиною циліндричну оболонку, підсилену поперечною системою ребер, якщо дивитися з боку рідини, визначаються з розв'язків рівнянь руху рідини, записаних в потенціалах. Отримано аналітичні формули для визначення переміщень серединних точок контактуючої з рідиною ортотропної циліндричної оболонки, неоднорідної за товщиною і підсиленої поперечною системою ребер.

Ключові слова: вимушені коливання; ортотропна циліндрична оболонка; ідеальна рідина; напруження; жорсткість; варіаційний принцип.

Досліджуються вимушені коливання в ідеальній рідині неоднорідної по товщині ортотропної циліндричної оболонки, зміцненої поперечною системою ребер, під дією пульсуючого в часі внутрішнього радіального тиску.

Ребриста оболонка розглядається як система, що складається з власної анізотропної оболонки і поздовжніх бічних ребер, жорстко пов'язаних з нею по лінії контакту, які розташовані уздовж координатних ліній, а їхні краї розташовані так само, як і кромки обшивки, лежать в одній координатній площині. Вважається, що ортотропна циліндрична оболонка, посилена поперечною системою ребер, знаходиться в ідеальній рідині під дією пульсуючого в часі внутрішнього радіального тиску.

Напружено-деформований стан оболонки визначається в рамках лінійної теорії пружних тонких оболонок, заснованої на гіпотезі Кірхгоффа – Лява, а для розрахунку ребер обрана теорія криволінійних стрижнів таким чином, щоб координатні лінії збігалися з основною лінією кривини серединної поверхні оболонки. Деформований стан оболонки визначається за трьома компонентами переміщень її серединної поверхні і кутами повороту нормальних елементів щодо координатних ліній.

Для опису деформованого стану ребер крім трьох складових переміщень центру ваги їх поперечних перерізів поздовжнього і поперечного стрижня визначаються також кути їх повороту. З умов жорсткого з'єднання ребер з оболонкою приймається рівність їх радіальних прогинів і відповідних кутів кручення. Для урахування неоднорідності матеріалу оболонки модуль Юнга і щільність матеріалу оболонки приймаються змінними функціями по товщині оболонки. При цьому коефіцієнт Пуассона вважається постійним.

Для зовнішніх впливів передбачається, що поверхневі навантаження, що діють на ребристу оболонку, якщо дивитися з боку рідини, можуть бути зведені до нормальних компонентів, прикладеним до серединної поверхні оболонки. Диференціальні рівняння руху і природні граничні умови поздовжньо зміцненої ортотропної циліндричної оболонки з рідиною під дією осьового стиснення отримані за допомогою варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського.

Після проведених перетворень задача зводиться до неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь третього порядку щодо переміщень серединної поверхні оболонки.

**ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЖИДКОСТИ
НЕОДНОРОДНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ
СИСТЕМОЙ РЕБЕР**

Исследуются вынужденные колебания неоднородной по толщине ортотропной цилиндрической оболочки, упрочненной поперечной системой ребер, в жидкости под действием пульсирующего во времени внутреннего радиального давления. На основе вариационного принципа Гамильтона – Остроградского, построена система уравнений для определения перемещений точек её срединной поверхности при динамическом взаимодействии с жидкостью. Поверхностные нагрузки, действующие на неоднородную по толщине цилиндрическую оболочку, определяются из решений уравнений движения жидкости, записанных в потенциалах. Получены аналитические формулы для определения перемещений срединных точек соприкасающейся с жидкостью ортотропной цилиндрической оболочки, неоднородной по толщине и усиленной поперечной системой ребер.

Ключевые слова: вынужденные колебания; ортотропная цилиндрическая оболочка; идеальная жидкость; напряжения; жесткость; вариационный принцип.

*Institute of Mathematics and Mechanics,
Azerbaijan National Academy of Sciences,
Baku, Azerbaijan*

Received by the Editorial Board 30.10.2020

DOI 10.15421/4220022
UDC 539.3

A. H. Movsumova

VIBRATIONS REINFORCED BY LONGITUDINAL RIBS OF AN INHOMOGENEOUS ORTHOTROPIC CYLINDRICAL PANEL CONTACTING WITH A VISCOUS-ELASTIC MEDIUM

Vibrations of an orthotropic cylindrical panel, non-uniform in thickness, supported by longitudinal ribs, lying on a linearly viscoelastic foundation, were investigated. The Hamilton – Ostrogradsky variational principle was used to find the vibration frequencies of the panel. A frequency equation is constructed, its roots are found, and the influence of physical and geometric parameters characterizing the system is studied.

Keywords: *inhomogeneous cylindrical panel; viscous-elastic medium; ridge panel; free vibrations.*

Cylindrical panels are widely used in modern technology, power engineering, and in various fields of construction and engineering. In many cases, depending on production technology and a number of various reasons, mechanical properties of the material of cylindrical panels become continuously inhomogeneous along the length of the panel. In operational conditions these panels are in contact with different nature medium and they are stiffened when it is necessary.

In [5], a problem of lateral vibrations of a circular cross-section inhomogeneous cylindrical shell lying on a viscous-elastic foundation, is considered. It is assumed that the modulus of elasticity and density are continuous functions of thickness coordinate. The problem of natural vibrations of a circular cross-section cylindrical shell inhomogeneous only along the length and lying on inhomogeneous viscous-elastic medium, is considered in [6, 7]. The solution of the problem is reduced to the system of two linear differential equations with respect to the stress function and deflection. The method of separation of variables and the Bubnov – Galerkin method is used when solving the problem.

The paper [7] is devoted to vibrations of an orthotropic, cylindrical panel inhomogeneous in thickness, stiffened with lateral ribs and lying on a linearly viscous-elastic foundation. Using the Hamilton – Ostrogradsky variational principle for finding vibrational frequencies of a cylindrical panel inhomogeneous in thickness, stiffened with lateral ribs and lying on a linear elastic foundation, the frequency equation was constructed, its roots were found and the influences of physical and geometrical parameters characterizing the system, were studied. The paper [2] was devoted to free vibrations of a flowing fluid-contacting, isotropic, inhomogeneous cylindrical shell stiffened with cross system of ribs. Using the Hamilton – Ostrogradsky variational principle,

the system of equations of motion for a flowing fluid contacting anisotropic cylindrical shell inhomogeneous in thickness and stiffened with cross systems of ribs was solved. The paper [4] deals with natural vibrations of a soil-contacting cylindrical shell stiffened with annular ribs and subjected to compressive forces.

To apply the Hamilton – Ostrogradsky variational principle, we write the total energy of the structure under investigation, consisting of an orthotropic cylindrical panel inhomogeneous in thickness and stiffening elements whose number varies. Furthermore, from the inside, the structure is in contact with a viscous-elastic medium (Fig. 1). To take into account inhomogeneity of a cylindrical shell in thickness, we will proceed from three-dimensional functional. In this case, the functional of total energy of the cylindrical shell is of the form

$$V = \frac{R}{2} \iint \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \rho(z) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2) dx d\phi dz. \quad (1)$$

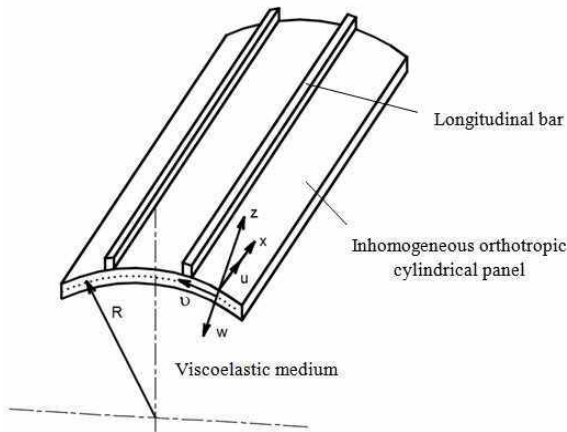


Fig. 1 – Vibrations reinforced by longitudinal ribs of an inhomogeneous orthotropic cylindrical panel contacting with an elastic medium

There are various ways for taking into account inhomogeneity of the shell material. One of them is that the Young modulus and density of the material are accepted as functions of the normal coordinate z [3]. It is supposed that the Poisson ratio is constant. In this case, the strain-stress ratio is of the form

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= b_{11}(z)\varepsilon_{11} + b_{12}(z)\varepsilon_{22}; & \sigma_{22} &= b_{12}(z)\varepsilon_{11} + b_{22}(z)\varepsilon_{22}; \\ \sigma_{12} &= b_{66}(z)\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \quad (3)$$

In (1) we can write:

$$V = \frac{R}{2} \iint \left\{ \tilde{b}_{11} \varepsilon_{11}^2 + 2\tilde{b}_{12} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 2\tilde{b}_{26} \varepsilon_{12} \varepsilon_{22} + 2\tilde{b}_{16} \varepsilon_{11} \varepsilon_{12} + \right. \\ \left. + \tilde{b}_{22} \varepsilon_{22}^2 + \tilde{b}_{66} \varepsilon_{12}^2 \right\} dx d\phi + \iint \left(\tilde{\rho} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) \right) dx d\phi, \quad (4)$$

where

$$\tilde{b}_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_{11}(z) dz; \quad \tilde{b}_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_{12}(z) dz; \quad \tilde{b}_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_{22}(z) dz; \quad \tilde{b}_{66} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_{66}(z) dz; \\ b_{11}(z) = \frac{E_1(z)}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad b_{22}(z) = \frac{E_2(z)}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad b_{66}(z) = G_{12}(z) = G(z); \\ b_{12}(z) = \frac{\nu_2 E_1(z)}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2(z)}{1 - \nu_1 \nu_2}$$

are the main module of elasticity of the orthotropic material $\tilde{\rho} = \int_{-h}^h \rho(z) dz$,

ν_1, ν_2 are Poisson ratios of the orthotropic material, h is shell thickness, u, ϑ, w are the components of displacements of the points of the median surface of the shell. It is assumed that

$$E_1(z) = \tilde{E}_1 f(z), \quad E_2(z) = \tilde{E}_2 f(z), \quad G(z) = \tilde{G} f(z).$$

The expressions for the potential energy of elastic deformation of i -th lateral rib are as follows [1]:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\tilde{E}_i F_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{yi} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{zi} \left(\frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{G}_i J_{kpi} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (5)$$

The kinetic energy of ribs are written in the form [8]

$$K_i = \rho_i F_i \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx. \quad (6)$$

In expressions (5), (6) u_i, ϑ_i, w_i are the displacements of the points of the bars used in reinforcement; F_i are the cross-sectional areas of the i -th bar,

attached to the shell in the direction of the geneatrix; $\tilde{E}_i$ are the modulus of elasticity in tension i -th bar, attached to the cylindrical shell in the direction geneatrix; J_{yi}, J_{zi} are inertia moment i -th bar relative to the axis, passing through the center of gravity of the cross-section; J_{kpi} are torsional moments of inertia i -th bar, t – time, ρ_i is density of materials of the i -th bar.

Potential energy of external surface loads acting as viewed from elastic medium, applied to the shell is determined as a work performed by these loads when taking the system from the deformed state to the initial not deformed one and is represented as follows

$$A_0 = -R \int_0^l \int_0^{\phi_0} q_z w dx d\phi. \quad (7)$$

Suppose that the plate lies on viscoelastic base, where reaction q_z is connected with flexure w in the following relation:

$$q_z = k_v w - k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \int_0^t \Gamma(t - \tau) w(\tau) d\tau, \quad (8)$$

where k_v is Pasternak coefficient and k_p Winkler's coefficients. The $\Gamma(t) = Ae^{-\psi t}$ – relaxation core, A, ψ – empirical constants, t – time.

The total energy of the system equals the sum of energies of elastic deformations of the shell and lateral ribs, and also potential energies of all external loads acting as viewed from viscous-elastic medium

$$W = V + \sum_{j=1}^{k_2} (\Pi_j + K_j) + A_0 \quad (9)$$

Let the plate be comprehensively fixed with hinges. Then the following boundary conditions should be fulfilled:

$$\begin{aligned} u = v = w = M_x = 0 \quad \text{for } x = 0; L, \\ u = v = w = M_x = 0 \quad \text{for } \phi = 0; \phi_0. \end{aligned} \quad (10)$$

The frequency equation of a ridge, inhomogeneous, orthotropic, flowing-fluid contacting shell was obtained on the base of Ostrogradsky – Hamilton principle of stationarity of action

$$\delta W = 0, \quad (11)$$

where $W = \int_{t'}^{t''} J dt$ is Hamilton action, t' and t'' are the given arbitrary moments of time.

Complementing the total energy of the system (9) with contact (10), we get a problem of natural vibrations of a viscous-elastic medium-contacting orthotropic cylindrical shell inhomogeneous in thickness and stiffened with lateral system of ribs. In other words, the problem of natural vibrations of a viscous-elastic medium-contacting orthotropic, cylindrical shell inhomogeneous in thickness and stiffened with cross-system of ribs is reduced to integration of expressions for the total energy of the system (9)

In expression (9) u, ϑ, w_r are variable values. These unknown values are approximated in the following way:

$$\begin{aligned} u &= u_0 \sin \frac{\pi m x}{l} \sin k \frac{\pi \varphi}{\varphi_0} \sin \omega t; & \vartheta &= \vartheta_0 \sin \frac{\pi m x}{l} \sin k \frac{\pi \varphi}{\varphi_0} \sin \omega t; \\ w &= w_0 \sin \frac{\pi m x}{l} \sin k \frac{\pi \varphi}{\varphi_0} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (12)$$

Using (12) for w , we can calculate the work A_0 when transferring the system from the deformed state to the initial undeformed state

$$\begin{aligned} A_0 &= -R \left[\frac{\omega l}{4(\omega^2 + \psi^2)} \left(\sin \omega t - e^{\psi t} \sin^2 \omega t + \frac{\psi}{\omega} e^{\psi t} \sin^2 \omega t \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_9 \varphi_0 l \sin^2 \omega t}{4} + k_p \left(\frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{k^2 \pi^2}{R^2 \varphi_0^2} \right) \frac{\varphi_0 l \sin^2 \omega t}{4} \right] w_0^2. \end{aligned}$$

After integrating the expression for A_0 in time t from t' to t'' , we get

$$\begin{aligned} \int_{t'}^{t''} A_0 &= -R \left\{ \frac{l}{4(\omega^2 + \psi^2)} (\cos \omega t' - \cos \omega t'') + \left[\frac{\omega l \varphi_0}{4(\omega^2 + \psi^2)} \left(\frac{\psi}{\omega} e^{\psi t} - e^{\psi t} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k_9 \varphi_0 l}{4} + k_p \left(\frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{k^2 \pi^2}{R^2 \varphi_0^2} \right) \frac{\varphi_0 l}{4} \right] \times \left[\frac{1}{2} (t'' - t') - \frac{\sin 2\omega t' - \sin 2\omega t''}{4\omega} \right] \right\} w_0^2. \end{aligned} \quad (13)$$

The potential and kinetic energies of elastic deformation of the i -th longitudinal ribs are follows:

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{\rho_i F_i l \omega^2}{2} \left\{ u_0^2 \sin^2 \frac{k \pi \varphi_i}{\varphi_0} + \left(1 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \right) \vartheta_0^2 \sin^2 \frac{k \pi \varphi_i}{\varphi_0} + \left[\sin^2 \frac{k \pi \varphi_i}{\varphi_0} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{J_{kpi}}{F_i} \left(\frac{k \pi}{l \varphi_0} \right)^2 \cos^2 \frac{k \pi \varphi_i}{\varphi_0} \right] w_0^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \frac{k \pi}{l \varphi_0} \sin \frac{2k \pi \varphi_i}{\varphi_0} \vartheta_0 w_0 \right\} \sin^2 \omega t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi_i = & \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{l} \left\{ \tilde{E}_i F_i \sin^2 \frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0} u_0^2 + \left[\tilde{E}_i J_{yi} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \sin^2 \frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \tilde{G}_i J_{kpi} \cos^2 \frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0} \right] w_0^2 + \left[\tilde{E}_i J_{zi} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \frac{\tilde{G}_i J_{kpi}}{R^2} \right] \sin^2 \frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0} v_0^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{G}_i J_{kpi}}{R^2} \frac{k\pi}{l\varphi_0} \sin \frac{2k\pi\varphi_i}{\varphi_0} \vartheta_0 w_0 \right\} \sin^2 \omega t.\end{aligned}$$

After integrating the expression for the potential and kinetic energy of elastic deformation of the i – th longitudinal ribs in time t from t' to t'' , we obtain:

$$\begin{aligned}\Pi_i = & \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{l} \left\{ \tilde{E}_i F_i \sin^2 \frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0} u_0^2 + \left[\tilde{E}_i J_{yi} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \sin^2 \frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \tilde{G}_i J_{kpi} \cos^2 \frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0} \right] w_0^2 + \left[\tilde{E}_i J_{zi} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \frac{\tilde{G}_i J_{kpi}}{R^2} \right] \sin^2 \frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0} v_0^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{G}_i J_{kpi}}{R^2} \frac{k\pi}{l\varphi_0} \sin \frac{2k\pi\varphi_i}{\varphi_0} \vartheta_0 w_0 \right\} \times \left[\frac{1}{2} (t'' - t') - \frac{\sin 2\omega t'' - \sin 2\omega t'}{4\omega} \right]; \\ K_i = & \frac{\rho_i F_i l \omega^2}{2} \left\{ u_0^2 \sin^2 \frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0} + \left(1 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \right) \times \vartheta_0^2 \sin^2 \frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0} + \left[\sin^2 \frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{J_{kpi}}{F_i} \left(\frac{k\pi}{l\varphi_0} \right)^2 \cos^2 \frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0} \right] w_0^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \frac{k\pi}{l\varphi_0} \sin \frac{2k\pi\varphi_i}{\varphi_0} \vartheta_0 w_0 \right\} \times \\ & \times \left[\frac{1}{2} (t'' - t') - \frac{\sin 2\omega t'' - \sin 2\omega t'}{4\omega} \right].\end{aligned}\tag{14}$$

Using (12) for w , we can calculate the total energy V of the cylindrical shell

$$\begin{aligned}V = & \frac{lR\varphi_0}{8} \left\{ \left[\tilde{b}_{11} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + 2\tilde{b}_{66} \right] u_0^2 + \left[\tilde{b}_{22} \left(\frac{k\pi}{\varphi_0 R}\right)^2 + \tilde{b}_{66} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \right] \vartheta_0^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{b}_{22} l \varphi_0}{4} w_0^2 + 4 \left[\tilde{b}_{26} \left(\frac{k\pi}{\varphi_0 R}\right)^2 + \tilde{b}_{16} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \right] u_0 \vartheta_0 \right\} \sin^2 \omega t.\end{aligned}$$

After integrating the expression for the total energy V of the cylindrical shell: in time t from t' to t'' , we obtain:

$$\begin{aligned}
V = & \frac{IR\phi_0}{8} \left\{ \left[\tilde{b}_{11} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + 2\tilde{b}_{66} \right] u_0^2 + \left[\tilde{b}_{22} \left(\frac{k\pi}{\phi_0 R} \right)^2 + \tilde{b}_{66} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right] \vartheta_0^2 + \right. \\
& + \frac{\tilde{b}_{22} l \phi_0}{4} w_0^2 + 4 \left[\tilde{b}_{26} \left(\frac{k\pi}{\phi_0 R} \right)^2 + \tilde{b}_{16} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right] u_0 \vartheta_0 \Big\} \times \\
& \times \left[\frac{1}{2} (t'' - t') - \frac{\sin 2\omega t' - \sin 2\omega t''}{4\omega} \right].
\end{aligned} \tag{15}$$

Using the expressions (13), (14) and (15) for the complete energy of the system under study, we obtain:

$$\begin{aligned}
W = & \left\{ \frac{IR\phi_0}{8} \left[\tilde{b}_{11} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + 2\tilde{b}_{66} \right] + \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2 \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{k_1} \left(\tilde{E}_i F_i \sin^2 \frac{k\pi\phi_i}{\phi_0} + \right. \right. \\
& + \left. \frac{\rho_i F_i l \omega^2}{2} \sin^2 \frac{k\pi\phi_i}{\phi_0} \right) \Big\} u_0^2 + \left\{ \frac{IR\phi_0}{8} \left[\tilde{b}_{22} \left(\frac{k\pi}{\phi_0 R} \right)^2 + \tilde{b}_{66} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right] + \right. \\
& + \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{k_1} \left[\tilde{E}_i J_{zi} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{\tilde{G}_i J_{kpi}}{R^2} + \frac{\rho_i F_i l \omega^2}{2} \left(1 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \right) \right] \sin^2 \frac{k\pi\phi_i}{\phi_0} \Big\} \vartheta_0^2 + \\
& + \left\{ \frac{\tilde{b}_{22} l \phi_0}{4} + \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{k_1} \left[\tilde{E}_i J_{yi} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin^2 \frac{k\pi\phi_i}{\phi_0} + \tilde{G}_i J_{kpi} \cos^2 \frac{k\pi\phi_i}{\phi_0} \right] - \right. \\
& - \frac{Rl}{4(\omega^2 + \psi^2)} (\cos \omega t' - \cos \omega t'') \times \left[\frac{1}{2} (t'' - t') - \frac{\sin 2\omega t' - \sin 2\omega t''}{4\omega} \right]^{-1} - \\
& - R \left[\frac{\omega l \phi_0}{4(\omega^2 + \psi^2)} \left(\frac{\psi}{\omega} e^{\psi t} - e^{\psi t'} \right) + \frac{k_9 \phi_0 l}{4} + k_p \left(\frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{k^2 \pi^2}{R^2 \phi_0^2} \right) \frac{\phi_0 l}{4} \right] \Big\} w_0^2 + \\
& + \frac{IR\phi_0}{2} \left[\tilde{b}_{26} \left(\frac{k\pi}{\phi_0 R} \right)^2 + \tilde{b}_{16} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right] u_0 \vartheta_0 + \\
& + \left[\left(\frac{m\pi}{2} \right)^2 \sum_{i=1}^{k_1} \frac{\tilde{G}_i J_{kpi}}{R^2} \frac{k\pi}{l^2 \phi_0} \sin \frac{2k\pi\phi_i}{\phi_0} + \frac{k\pi}{\phi_0} \sum_{i=1}^{k_1} \frac{\rho_i F_i \omega^2}{2} \frac{J_{kpi}}{F_i} \sin \frac{2k\pi\phi_i}{\phi_0} \right] \vartheta_0 w_0 \Big\} \times \\
& \times \left[\frac{1}{2} (t'' - t') - \frac{\sin 2\omega t' - \sin 2\omega t''}{4\omega} \right].
\end{aligned}$$

Substituting (16) in (9), after integration we get a function of variables u_0, ϑ_0, w_0 . The stationary value of the obtained function is determined by the following system

$$1) \frac{\partial W}{\partial u_0} = 0; \quad 2) \frac{\partial W}{\partial \vartheta_0} = 0; \quad 3) \frac{\partial W}{\partial w_0} = 0. \quad (17)$$

The non-trivial solution of the system of third order linear algebraic equations is possible only in the case when ω is the root of its determinant. The definition of ω reduces to the algebraic equation

$$\det \|a_{ij}\| = 0, i, j = 1, 3 \quad (18)$$

Here the elements a_{ij} look like:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{lR\varphi_0}{4} \left[\tilde{b}_{11} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + 2\tilde{b}_{66} \right] + \frac{2}{l} \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2 \sum_{i=1}^{k_1} \left(\tilde{E}_i F_i \sin^2 \frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0} + \frac{\rho_i F_i l \omega^2}{2} \sin^2 \frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0} \right); \\ a_{12} &= \frac{lR\varphi_0}{2} \left[\tilde{b}_{26} \left(\frac{k\pi}{\varphi_0 R} \right)^2 + \tilde{b}_{16} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right]; \quad a_{13} = 0; \\ a_{21} &= \frac{lR\varphi_0}{2} \left[\tilde{b}_{26} \left(\frac{k\pi}{\varphi_0 R} \right)^2 + \tilde{b}_{16} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right]; \\ a_{22} &= \frac{lR\varphi_0}{4} \left[\tilde{b}_{22} \left(\frac{k\pi}{\varphi_0 R} \right)^2 + \tilde{b}_{66} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right] + \\ &\quad + \frac{2}{l} \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2 \sum_{i=1}^{k_1} \left[\tilde{E}_i J_{zi} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{\tilde{G}_i J_{kpi}}{R^2} + \frac{\rho_i F_i l \omega^2}{2} \left(1 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \right) \sin^2 \frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0} \right]; \\ a_{23} &= \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2 \sum_{i=1}^{k_1} \frac{\tilde{G}_i J_{kpi}}{R^2} \frac{k\pi}{l^2 \varphi_0} \sin \frac{2k\pi\varphi_i}{\varphi_0} + \frac{k\pi}{\varphi_0} \sum_{i=1}^{k_1} \frac{\rho_i F_i \omega^2}{2} \frac{J_{kpi}}{F_i} \sin \frac{2k\pi\varphi_i}{\varphi_0}; \\ a_{31} &= 0; \quad a_{32} = \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2 \sum_{i=1}^{k_1} \frac{\tilde{G}_i J_{kpi}}{R^2} \frac{k\pi}{l^2 \varphi_0} \sin \frac{2k\pi\varphi_i}{\varphi_0} + \frac{k\pi}{\varphi_0} \sum_{i=1}^{k_1} \frac{\rho_i F_i \omega^2}{2} \frac{J_{kpi}}{F_i} \sin \frac{2k\pi\varphi_i}{\varphi_0}; \\ a_{33} &= \frac{\tilde{b}_{22} l \varphi_0}{2} + \frac{2}{l} \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2 \sum_{i=1}^{k_1} \left[\tilde{E}_i J_{yi} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin^2 \frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0} + \tilde{G}_i J_{kpi} \cos^2 \frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0} \right] - \\ &\quad - \frac{Rl}{2(\omega^2 + \psi^2)} (\cos \omega t' - \cos \omega t'') \times \left[\frac{1}{2} (t'' - t') - \frac{\sin 2\omega t' - \sin 2\omega t''}{4\omega} \right]^{-1} - \\ &\quad - 2R \left[\frac{\omega l \varphi_0}{4(\omega^2 + \psi^2)} \left(\frac{\psi}{\omega} e^{\psi t} - e^{\psi t} \right) + \frac{k_9 \varphi_0 l}{4} + k_p \left(\frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{k^2 \pi^2}{R^2 \varphi_0^2} \right) \frac{\varphi_0 l}{4} \right]. \end{aligned}$$

Equation (18) was calculated by the numerical method. The parameters contained in the solution of the problem were accepted as:

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \rho_j = 18,5 \cdot 10^3 \text{ H / m}^3, \quad \tilde{E}_j = 6,67 \cdot 10^9 \text{ N / m}^2; \\ m &= 1; n = 8; h_j = 1,39 \cdot 10^{-3} \text{ m}; R = 1,6 \text{ m}; \quad F_i = 5,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2; \\ I_{kpj} &= 0,23 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4; I_{xj} = 5,1 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4; I_{zi} = 1,3 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4, \quad \nu = 0.35; \\ \frac{l}{R} &= 3, \quad \frac{h}{R} = \frac{1}{6}, \quad f(z) = 1 + \varepsilon \left(\frac{z}{h} \right)^2, \quad \varepsilon \in [0; 1], \\ k_v &= 10^6 \text{ N / m}^3, \quad k_p = 10^4 \text{ N / m}, \quad A = \psi \\ \rho_0 &= \rho_j = 1850 \text{ kg / m}^3, \quad \tilde{E}_j = 6.67 \cdot 10^9 \text{ N / m}^2; \\ m &= 1; n = 8; h_j = 1,39; R = 160 \text{ sm}; \quad F_i = 5.2 \text{ mm}^2 \\ I_{kpj} &= 0.23 \text{ mm}^4; I_{xj} = 5.1 \text{ mm}^4; I_{zi} = 1.3 \text{ mm}^4, \quad \nu = 0.35;\end{aligned}$$

The result of calculations were given in Fig. 2 in the form of dependence of the frequency ω on the amount of stiffening bars k_2 on the shell surface, in Fig. 3 in the form of dependence of frequency ω on in homogeneity parameter ε .

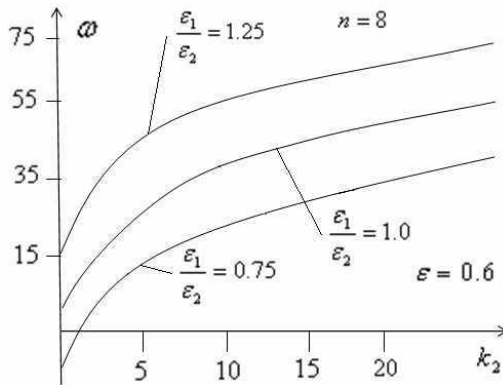


Fig. 2 – Dependence of vibrations frequency ω of the system from the amount of ribs k_2

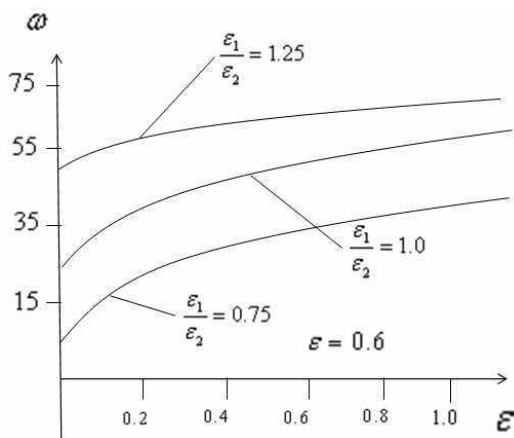


Fig. 3 – Dependence of vibrations frequency ω of the system from the inhomogeneity parameter ε

The figure shows that with increasing the amount of lateral ribs, the value of the vibrations frequency of the system increases. Fig. 3 shows that with increasing the inhomogeneity parameters the vibrations frequencies of the system also increase.

REFERENCES

1. **Amiro I.Y., Zarutsky V.A.** The theory of ribbed shells. Methods for calculating shells. Kiev: Naukova Dumka, 1980. 367p. (in Russian).
2. **Latifov F.S., Iskanderov R.A., Babaeva K.A.** Vibrations of nonhomogeneous medium-contacting cylindrical shell stiffened with rings and subjected to action of compressive force. // International journal on Technical and Physical Problems of Engineering. 2017. Iss. 31, Vol. 9. No 2. P.1–5.
3. **Latifov F.S., Aghayev R.N.** Oscillations of longitudinally reinforced heterogeneous orthotropic cylindrical shell with flowing liquid // ICTEPE-2017. Conference proceedings The 13th International Conference on Technical and Physical Problems of Electrical Engineering, 21-23 September, Van, Turkey. 2017. P. 301–305.
4. **Lomakin V.I.** Theory of elasticity of inhomogeneous bodies. Moscow: Moscow State Univ. Publ. house, 1976. 376p. (in Russian).
5. **Movsumova A.Kh.** Axially-symmetric form of lateral vibrations of inhomogeneous cylindrical shell lying on viscous-elastic foundation // International scientific journal "Aktualnaya nauka". Volgograd. 2018. No 10. P.50–54.
6. **Movsumova A.Kh.** On free vibrations of exponentially inhomogeneous cylindrical shell // Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika. 2018. No 3-4. P.117–120.
7. **Movsumova A.H.** Free vibrations of inhomogeneous, orthotropic and medium-contacting cylindrical panel stiffened with annular ribs // International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering. 2020. Iss. 42. Vol. 12. No 1. P. 40–43.
8. **Pasternak P.L.** Principles of a new method for calculating foundation of elastic base by means of two bed coefficients. Moscow: Gossproizdat, 1959. 89 p. (in Russian).

А. Х. Мовсумова

КОЛИВАННЯ НЕОДНОРІДНОЇ ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПАНЕЛІ, ПІДКРІПЛЕНОЇ ПОЗДОВЖНИМИ РЕБРАМИ, ЩО КОНТАКТУЄ З В'ЯЗКО-ПРУЖНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

Досліджено коливання неоднорідної по товщині, підкріпленої поздовжніми ребрами, ортотропної циліндричної панелі, що лежить на лінійно в'язко-пружній основі. Застосовано варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського для знаходження частот коливань панелі. Побудовано частотне рівняння, знайдені його коріння і вивчено вплив фізичних та геометричних параметрів, що характеризують систему.

Ключові слова: неоднорідні циліндричні панелі; в'язко-пружне середовище; ребриста панель; віпні коливання.

Циліндричні панелі широко використовуються в сучасній техніці, енергетиці та в різних областях будівництва і машинобудуванні. У багатьох випадках в залежності від технології виготовлення і ряду інших причин механічні властивості матеріалу циліндричної панелі стають неоднорідними по її довжині. У робочих умовах ці панелі контактують із середовищем різної природи і при необхідності підкріплюються. Для урахування неоднорідності матеріалу оболонки по товщині приймається, що модуль Юнга і щільність матеріалу оболонки є функціями нормальної координати z .

З використанням варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського записується загальна енергія досліджуваної конструкції, що складається з ортотропної циліндричної панелі, неоднорідної за товщиною, та елементів жорсткості, кількість яких змінюється. Щоб врахувати неоднорідність циліндричної оболонки по товщині, ми виходитимемо з тривимірного функціоналу.

Потенціальна енергія зовнішніх поверхневих навантажень, що діють з огляду на еластичне середовище, прикладених до оболонки, визначається як робота, яку виконують ці навантаження при переведенні системи з деформованого стану в початковий недеформований. Рівняння частоти ребра панелі, неоднорідної, ортотропної, що контактує з текучою рідиною, було отримано на основі принципу стаціонарності Гамільтона – Остроградського. В процесі обчислень для функції неоднорідності прийняті параболічні закони.

Побудовано характерні залежності для неоднорідної по товщині підкріпленої поздовжніми ребрами циліндричної панелі, що лежить на лінійно в'язко-пружній основі. Показано, що зі збільшенням кількості бічних ребер значення частоти коливань системи зростає, а зі збільшенням параметрів неоднорідності також зростають частоти коливань системи.

А. Х. Мовсумова

**КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ОРТОТРОПНОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ
ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ И КОНТАКТИРУЮЩЕЙ
С ВЯЗКО-УПРУГОЙ СРЕДОЙ**

Исследованы колебания неоднородной по толщине, подкрепленной продольными ребрами, ортотропной цилиндрической панели, лежащей на линейно вязко-упругом основании. Использован вариационный принцип Гамильтона – Остроградского для нахождения частот колебаний панели. Построено частотное уравнение, найдены его корни и изучено влияние физических и геометрических параметров, характеризующих систему.

Ключевые слова: неоднородные цилиндрические панели; вязко-упругая среда; ребристая панель; свободные колебания.

*Institute of Mathematics and Mechanics,
Azerbaijan National Academy of Sciences,
Baku, Azerbaijan*

Received by the Editorial Board 20.10.2020

DOI 10.15421/4220013
UDC 539.3

O. V. Pogrebnoy

BIOMECHANICAL MODELING OF ELASTIC PROPERTIES OF BONE TISSUE

An original method for studying the morphometric characteristics of spongy bone tissue was proposed. Using this method the distribution of the density of the spongy bone tissue of the distal metaepiphysis of the radius was studied. A decrease in the content of spongy bone tissue along the longitudinal axis of the bone has been experimentally proved. Modeling the mechanical properties of spongy bone tissue, according to the known versions of models for the elastic modulus of discontinuous media, makes it possible to calculate the behavior of bone tissue in conditions of various types of interaction. The comparison of the elastic moduli obtained according to our data with the results of other researchers has shown their comparability.

Keywords: *radius bone; spongy bone tissue; elastic modulus; fracture; section.*

Introduction. Fractures of the distal epiphysis of the radial bone are the most common injuries to the wrist joint and involve the articular surfaces of the distal radial and wrist joints in 50–55 % of cases [16]. At the same time, there is an obvious tendency to an increase in the number of cases of injuries under consideration among patients over 50 years old, especially women [2]. One of the predisposing factors for the increase in the frequency of fractures in old age is osteoporosis.

Osteoporosis is a metabolic bone disease characterized by a decrease in bone mass and microstructural remodeling of bone tissue, which results in decreased bone strength and increased risk of fractures. Bone loss occurs gradually and is often diagnosed only after fractures. As women live longer, their risk of developing osteoporosis and fractures increases. Every 2nd woman and every 8th man over 50 years have such a fracture. After menopause, women have a maximum bone loss rate of 2–5% per year. As a result, a woman by the age of 70 loses from 30 to 50 % of her bone mass. For men, these losses range from 15 to 30 % [6].

The most frequent localization of osteoporetic changes and, therefore, fractures are the vertebrae (compression fracture of the vertebral body), the femoral neck and distal radius (Colles' fracture), (Fig. 1) [13]. Bone strength reflects the integration of two main characteristics: bone mineral density (bone mass) and bone quality (architectonics, metabolism, mineralization) [8].

The problem of studying mechanical characteristics, identifying morphological features of the bone structure and the frequent damage associated

with biomechanical features in this area are of practical interest. Methods of medical morphometry provide significant opportunities for the study of biological objects with a complex heterogeneous structure [3, 7, 11, 19]. In the diagnosis of osteoporotic changes, quantitative computed tomography (QCT) is also used. The advantages of this method are: the ability to determine the trabecular and cortical bones separately; faculty of 3D bone research; the QCT method allows to avoid various superpositions of the surrounding tissues [12, 20].

The aim of the work is to study the density distribution in the region of the distal metaepiphysis of the radius, in the area most often subjected to fractures during the development of osteoporotic changes. Based on the experimental data obtained, perform biomechanical modeling of the elastic constants of bone tissue.

Material and methods. Experimental studies were carried out on a preparation of the radius prepared according to the following method [10, 14]. The preparation was decalcified in 7.5 % aqueous solution of nitric acid for 10 days. The swelling of fibrous structures was eliminated by additional fixation in 96 % alcohol for period of 24 hours. Then the preparation was embedded in paraffin and sections were prepared using a microtome, ranging from the proximal pole to the distal, in the frontal plane, 12–14 μm thick. Histological sections were fixed onto glass slides and stained with hematoxylin-eosin in a standard manner.

The position of the rectangular coordinate system $Oxyz$ was chosen so that the xOy plane was parallel to the horizontal plane, and the apex of the radial styloid process was located on it (Fig. 2).

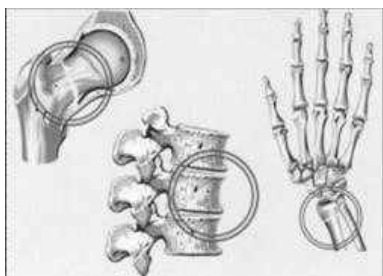


Fig. 1 – Frequent fracture localization

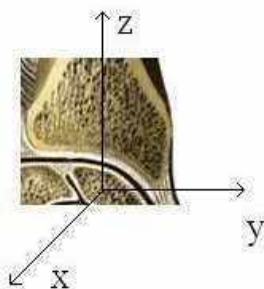


Fig. 2 – Position of coordinate system

Sections were photographed using a LEICA DMLS light microscope at $\times 100$ magnification and a CANON EOS M42 D30 digital camera. In this case, all structures of the spongy substance (central and peripheral zones) were necessarily included. The resulting digital photographs were transferred to a personal computer in the form of data files.

The images of section № 031, presented in Fig. 3, were obtained immediately after photographing (Fig. 3 a), and after completing the necessary preparation for conducting morphometric analysis on computer (Fig. 3 b). It

is obvious that the halftones and impurities presented in the original image should not introduce errors into the results of computer processing.

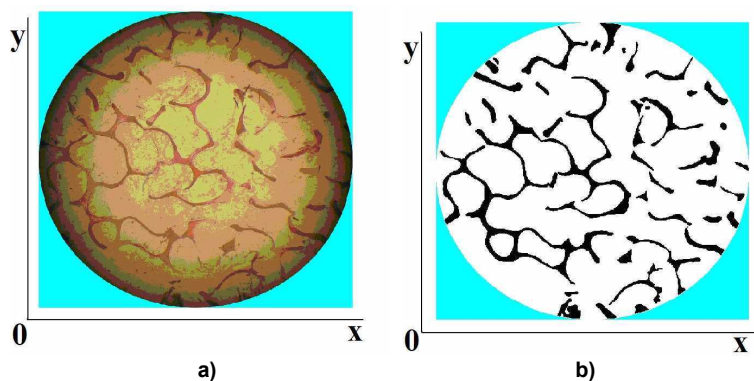


Fig. 3 - Fragment of the image of the section № 031:
a) after photographing; b) after preparation for morphometric analysis

To carry out morphometric analysis of images, a computer program has been developed in the object-oriented visual programming system Delphi. First, color photographs of bone tissue were transformed into black-and-white images, where cortical and spongy bone tissue corresponded to black, and intercellular space corresponded to white. In this case, it is necessary to achieve the absence of gray color, which introduces interference. For this purpose, a discrimination threshold was selected for each image. When scanning an image, pixels that exceeded this threshold were considered white, the rest of the pixels were considered black.

At the next stage of morphometric analysis, the number of black and white pixels for the processed image as a whole and for its individual fragments was calculated, which made it possible to determine the specific area occupied by the bone tissue, both for the entire section and for its selected parts.

The results of image processing of sections № 031, № 032, № 036, № 038 and № 040 are summarized in Table 1. The specific area P of the spongy bone tissue of individual cut fragments containing its representative areas was calculated. The obtained values were averaged.

Table 1 - Specific density of spongy tissue of radial sections

Numbers of sections	№ 031	№ 032	№ 036	№ 038	№ 040
1	0.2308	0.2145	0.1985	0.1516	0.1419
2	0.2165	0.2261	—	0.2665	0.1275
3	0.2387	—	—	0.2024	0.1315
4	—	—	—	0.1555	—
Average P	0.2287	0.2203	0.1985	0.1940	0.1336

According to the results of morphometric analysis in Fig. 4 a, graph of the distribution of the specific density of spongy tissue is plotted depending on the distance from the carpal articular surface. Specific gravity refers to the relative area of spongy tissue in sections. The abscissa shows the distance in millimeters from the carpal articular surface (direction of the z axis in Fig. 2), and the ordinate shows the specific density of spongy tissue P .

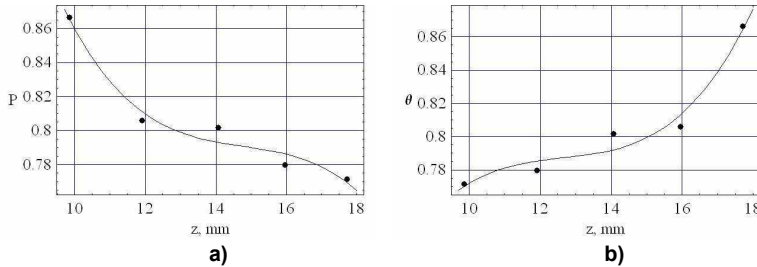


Fig. 4 - Distribution of the specific density of spongy tissue:
a) distribution of the specific density of spongy tissue P ;
b) distribution of discontinuity Θ

Discontinuity Θ is related to the specific density P of spongy tissue as follows: $\Theta = 1 - P$. The dependence of $P - z$ in the Θ and z axes is shown in Fig. 4 b. The curves in this figure represent the result of the least squares fit of the experimental data by a polynomial of the third degree.

Modeling the elastic properties of spongy tissue. The study of the effect of porosity on the elastic properties of bodies has been the subject of many experimental and theoretical works. For materials with Poisson's ratio $\mu = 0.25$, the dependence of the relative modulus of elasticity E on porosity has the form [5]:

$$E/E_0 = 1 - 1.96 \Theta + 0.96 \Theta^2, \quad (1)$$

where E_0 is the modulus of elasticity of the non-porous material.

As applied to heterogeneous systems, the formula for the relative modulus E is written as follows [17]:

$$E/E_0 = \frac{1 - \Theta}{1 + K_1 \Theta}, \quad (2)$$

where $K_1 \approx 1$ for materials with $\mu = 0.25$.

Let us apply formulas (1) and (2) to determine the relative modulus of elasticity E/E_0 of spongy tissue, using the experimental data Θ , recalculating P from Table 1 as follows: $\Theta = 1 - P$. The calculation results are summarized in Table 2.

The differences in calculation results are significant, ranging from 54 % for section № 031 to 69 % for section № 040.

The value of the elastic modulus E of spongy tissue, given in [1] without indicating the value of discontinuity Θ , is 200 MPa. It also shows the value of E_0 for cortical tissue, which is 18700 MPa. The value of the relative elastic

modulus E/E_0 , defined as the ratio 200/18700, corresponds to the discontinuity value $\Theta = 0.9132$ according to formula (1), and $\Theta = 0.9788$ according to formula (2).

Table 2 - Results of calculating the relative modulus of elasticity E/E_0

	Numbers of sections	№ 031	№ 032	№ 036	№ 038	№ 040
1	Discontinuity Θ	0.7713	0.7797	0.8015	0.8060	0.8664
2	E/E_0 according to (1)	0.0593	0.0554	0.0458	0.0499	0.0225
3	E/E_0 according to (2)	0.1290	0.1238	0.1102	0.1074	0.0716

The modulus of elasticity of the spongy tissue of the radial head was determined by the method of indentation of the indenter [9]. It was found that the required value of the elastic modulus does not exceed 40 MPa. Similarly, calculating Θ through the known value $E/E_0 = 40/18700$ using formulas (1) and (2), we obtain 0.9692 and 0.9957, respectively.

The range of changes in the values of the modulus of elasticity during compression of the wet cancellous tissue of the epiphyses of long tubular bones, obtained by different authors, is 26 ÷ 600 MPa, [15, 18]. Calculating the discontinuity Θ through the specified values of E/E_0 for the boundaries of the specified range, we obtain 0.9974 and 0.9972 for the left boundary by formulas (1) and (2), respectively, and 0.8368, 0.9378 for the right boundary of the range, by formulas (1) and (2), respectively.

It follows from the above data that the discontinuity value Θ , calculated for the maximum value of the 600 MPa range by formula (1), gives the result $\Theta = 0.8368$, which is in good agreement with the experimental data obtained in the proposed work.

It should also be noted that the calculations of the relative elastic modulus E/E_0 were carried out at the value of the elastic modulus for cortical tissue $E_0 = 18.7$ GPa, given in [15]. Most of the authors known to us give the values of this module in the range of 18 ÷ 20 GPa. For example, the reference book [4] gives data for the module E of the compact tissue of the femur under extension 12.3 ÷ 40.7 GPa and compression 16.5 ÷ 35.7 GPa. The significant scatter in the data is apparently explained by the conditions of preparation of test specimens, as well as by natural anatomical variability.

Graphs of dependences E/E_0 , calculated by formulas (1) and (2) are shown in Fig. 5.

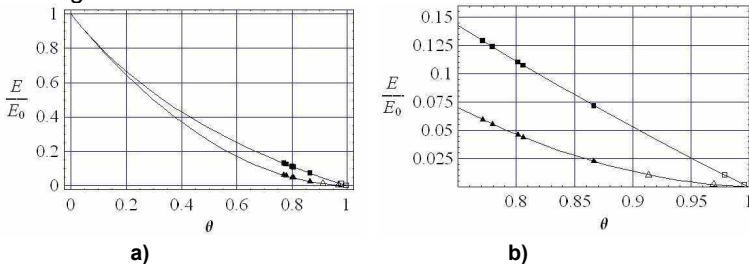


Fig. 5 - Calculation of the relative modulus of elasticity E/E_0 :
a) full-range scale; b) part of graph

The lower curve in Fig. 5 corresponds to formula (1), the upper curve - formula (2). Solid symbols ▲ and ■ denote the values of the relative elastic modulus E/E_0 , calculated for the discontinuity values Θ obtained as a result of morphometric analysis (row 1 of Table 2) for formulas (1) and (2), respectively. The numerical values of E/E_0 are given in rows 2 and 3 of Table 2, respectively.

The contour symbols Δ and $\square$ denote the values Θ calculated using formulas (1) and (2) from the known values of E/E_0 given in [1, 9]. Numerical values of Θ are given in Table 2.

Note that the symbols ▲ and ■ denote the calculation of E/E_0 from the known value of Θ , while the symbols Δ and $\square$ correspond to the opposite action: the calculation of Θ from the known value of E/E_0 using formulas (1) and (2).

The discussion of the results. The graphs of the distributions of the specific density of spongy tissue and discontinuity Θ obtained as a result of morphometric research and presented in Fig. 4, show a monotonic change in the density of spongy tissue depending on the distance from the carpal articular surface, which is consistent with Wolf's law on the relationship between the structure of an organ and the function it performs in the body.

Calculation formulas (1) and (2), corresponding to different approaches to describing the properties of a discontinuous medium, represent nonlinear relationships between discontinuity Θ and the relative modulus of elasticity E/E_0 . The graphs of these dependencies, shown in Fig. 5 a, are falling curves. The value $\Theta = 0$ corresponds to solid material (cortical tissue), while $E/E_0 = 1$. When the value of the parameter $\Theta = 1$, which means no material (100% discontinuity), the ratio $E/E_0 = 0$. Note that formulas (1) and (2) are not universal for all materials in the entire range of variation of the discontinuity.

The general picture of the studied dependences and the calculation results are shown in Fig. 5 a. Since the discontinuity values determined as a result of morphometric analysis are in a rather narrow range of $0.77 \div 0.87$, for clarity, part of the graph in Fig. 5 a is highlighted in a separate Fig. 5 b. Solid symbols ▲ and ■ in Fig. 5 a, b indicate the results of calculations of the relative modulus of elasticity E/E_0 according to formulas (1) and (2) for the values of discontinuity determined by morphometric methods. The contour symbols Δ and $\square$ represent backward scaling: the calculation of Θ from the E/E_0 data of other researchers. For this, formulas (1) and (2) were resolved with respect to Θ and the root belonging to the interval $[0, 1]$ was taken as a solution to the obtained quadratic equations.

It can be seen from the tables and graphs that the discontinuity values Θ obtained in the presented work as a result of morphological analysis are preferable to use in calculating the relative elastic modulus E/E_0 according to formula (1), since this is in better agreement with other experimental data, although with this approach there are significant differences.

Conclusions.

1. Using the method of morphometry, the distribution of the density of the spongy bone tissue of the distal metaepiphysis of the radius was studied.

A decrease in the content of spongy bone tissue along the longitudinal axis of the bone has been experimentally proved.

2. Modeling the mechanical properties of spongy bone tissue, according to the known versions of models for the elastic modulus of discontinuous media, makes it possible to calculate the behavior of bone tissue in conditions of various types of interaction.

3. The comparison of the elastic moduli obtained according to our data with the results of other researchers has shown their comparability.

REFERENCES

1. **Adamovich I.S., Janson I.A.** Investigation of the stress state of the human tibia during torsion by the finite element method // *Mechanics of composite materials*. 1981. No 3. P. 499-504. (in Russian).
2. **Angarskaya E.G.** Colles' fracture // *Sibirsky meditsinsky zhurnal*. 2007. № 3. P. 106-108. (in Russian).
3. **Avtandilov G.G.** Medical morphometry. Guide. M.: Meditsina. 1990. 384 p. (in Russian).
4. **Berezovsky V.A., Kolotilov N.N.** Biophysical characteristics of human tissue. Reference guide. Kiev: Naukova dumka, 1990. 224 p. (in Russian).
5. **Katz S.M.** On the modulus of elasticity of materials with a cellular-porous structure // *Problemi prochnosti*. 1972. No 3. P. 39-44. (in Russian).
6. **Klimova Zh.A., Zaft A.A., Zaft V.B.** Modern laboratory diagnosis of osteoporosis // *International Journal of Endocrinology*. No 7(63). 2014. P. 75-84. (in Russian).
7. **Kochetkov A.G., Stroganov A.B.** Features of the architectonics of the cancellous substance of the scaphoid bone of the wrist // *Morphology*. 2002. Vol. 122. No 6. P. 58-61. (in Russian).
8. **Krivova A.V.** Epidemiology and socio-economic aspects of osteoporosis // *Human Ecology*. 2007. No 2. P. 40-46. (in Russian).
9. **Loskutov O.E., Krasovsky V.L., Zherdev I.I., Makarov V.B.** Mechanical properties of proximal radius bone tissue // *Ortopedia, traumatologia i protezirovanie*. 2006. No 1. P. 5-8. (in Ukrainian).
10. **Naumenko L.Yu., Pogrebnoy O.V., Kirichenko V.Yu.** Morphometric analysis of the structure of the bone tissue of the scaphoid bone of the hand in relation to the problem of osteosynthesis // *Ukrainsky morfologichny almanakh*. 2006. Vol. 4. No 2. P. 86-89. (in Russian).
11. **Naumenko L.Yu., Pogrebnoy O.V., Vinnik A.A.** Morphometrical characteristic of solid biological tissue in conformity with distal radius metaepiphysis // *Trauma*. 2010. Vol. 11. No 4. P. 398-403. (in Russian).
12. **Naumanko L.Yu., Vinnik A.A., Cherednichenko N.A.** Evaluation of the structural characteristics of bone tissue in the region of the distal metaepiphysis of the radius bone using the method of computed tomography // *Problemi osteology*. Vol. 18. No 1. 2015. P. 46-50. (in Russian).
13. **Pasieshvili L.M.** Osteoporosis is a silent bone "thief" // *East European journal of inner and family medicine*. 2015. No 1. C. 16-24. (in Russian).
14. **Pogrebnoy O. V.** Modeling of biomechanical system element structure // *Problems of computational mechanics and strength of structures*. Issue 30. 2019. Dnipro. Lira, P. 204-213.
15. *Problems of strength in biomechanics*. / Ed. by Obratztov I.F. Moscow: Vysshaya shkola, 1988. 311 p. (in Russian).

16. **Rosental T.D.**, **Bozentka D.J.**, **Kats M.A.** et al. Evaluation of the sigmoid notch with computed tomography following intraarticular distal radius fracture // The J. of Hand Surgery. 2001. Vol. 26A. No 2. P. 244–251.

17. **Veil N.** Studies at high temperatures Moscow: Nauka. 1967. 228 p. (in Russian).

18. **Veretelnik Yu.V.** Modeling the properties of materials of biomechanical systems: models, approaches, numerical experiment // Visnik KhPI. Kharkiv. 2005. P. 29–35. (in Russian).

19. **Zagorska I.O.** Methods of morphometry in studying of structural-functional state of bone tissue // Bulletin of orthopedics, traumatology and prosthetics. 2002. No 3. P. 84–86. (in Ukrainian).

20. **Zakharov I.S.** Radiation diagnosis of osteoporosis - the current state of the problem // Polytrauma. 2015. No 1. P. 69–73. (in Russian).

УДК 539.3

О.В. Погребной

БИОМЕХАНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ КОСТНОЙ ТКАНИ

Предложен метод изучения морфометрических характеристик спонгиозной костной ткани. С помощью этого метода изучено распределение плотности спонгиозной костной ткани дистального метаэпифиза лучевой кости. Уменьшение содержания спонгиозной костной ткани вдоль продольной оси кости подтверждено экспериментально. Выполнено биомеханическое моделирование механических характеристик спонгиозной костной ткани при использовании известных вариантов моделей модуля упругости для несплошных сред. Проведено сравнение полученных результатов с данными других авторов. Доказана эффективность предлагаемого метода изучения морфометрических характеристик спонгиозной костной ткани.

Ключевые слова: лучевая кость; спонгиозная костная ткань; модуль упругости; перелом; сечение.

УДК 539.3

О.В. Погрібний

БИОМЕХАНІЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ КІСТКОВОЇ ТКАНИНИ

Запропоновано метод вивчення морфометричних характеристик спонгіозної кісткової тканини. За допомогою цього методу вивчено розподіл щільності спонгіозної кісткової тканини дистального метаепіфізу променевої кістки. Зменшення вмісту спонгіозної кісткової тканини уздовж подовжньої осі кістки підтверджено експериментально. Виконано біомеханічне моделювання механічних характеристик спонгіозної кісткової тканини при використанні відомих варіантів моделей модуля пружності для несучільних середовищ. Проведено порівняння отриманих результатів з даними інших авторів. Доведено ефективність запропонованого методу вивчення морфометричних характеристик спонгіозної кісткової тканини.

Ключові слова: променева кістка; спонгіозна кісткова тканина; пружний модуль; перелом; переріз.

Остеопороз - це метаболічне захворювання кісток, яке характеризується зниженням кісткової маси і мікроструктурною перебудовою кісток-

вої тканини, у зв'язку з чим знижується міцність кістки і підвищується ризик переломів. Найбільш частою локалізацією остеопоротичних змін і, отже, переломів є хребці (компресійний перелом тіла хребця), шийка стегна і променева кістка (дистальний відділ, перелом Коллеса). Міцність кістки відображає інтеграцію двох головних характеристик: мінеральній щільності кістки (кісткова маса) і якості кістки (архітектоніка, обмін, мінералізація).

Проблема вивчення механічних характеристик, виявлення морфологічних особливостей структури кістки і пов'язана з біомеханічними особливостями часта руйнівність на даній ділянці мають практичний інтерес. Методи медичної морфометрії надають значні можливості для дослідження біологічних об'єктів зі складною неоднорідною структурою.

Метою роботи є вивчення розподілу щільності в області дистального метаепіфізу променевої кістки, на ділянці, найчастіше схильній до переломів при розвитку остеопоротичних змін. На підставі отриманих експериментальних даних провести біомеханічне моделювання пружних констант кісткової тканини.

За результатами морфометричного аналізу побудовано графік розподілу питомої щільності спонгіозної тканини в залежності від відстані від зап'ястної суглобової поверхні.

За допомогою запропонованого методу вивчено розподіл щільності спонгіозної кісткової тканини дистального метаепіфізу променевої кістки. Зменшення змісту спонгіозної кісткової тканини уздовж поздовжньої осі кістки підтверджено експериментально. Виконано біомеханічне моделювання механічних характеристик спонгіозної кісткової тканини при використанні відомих варіантів моделей модуля пружності для несучільних середовищ. Проведено порівняння отриманих результатів з даними інших авторів. Доведено ефективність запропонованого методу вивчення морфометричних характеристик спонгіозної кісткової тканини.

*Oles Honchar
Dnipro National University
Dnipro, Ukraine*

Надійшла до редколегії 06.10.2020

ГРИЦАК Віктор Захарович
(до 80-річчя від дня народження)



26 лютого 2020 року виповнилося 80 років з дня народження завідувача кафедри прикладної математики і механіки Запорізького національного університету, доктора технічних наук, професора, Заслуженого діяча науки і техніки України Віктора Захаровича Грицака.

Він народився 26 лютого 1940 року у м. Житомир у родині службовців. Середню освіту здобув у Житомирській середній школі № 25, яку закінчив із золотою медаллю. У 1964 році закінчив з відзнакою фізико-технічний факультет Дніпропетровського державного університету (ДДУ).

З 1967 по 1969 рік навчався в аспірантурі ДДУ на кафедрі прикладної теорії пружності, яку у ті роки очолював академік НАН України В. І. Мосаковський. У травні 1969 року достроково захистив кандидатську дисертацію за спецтематикою. З 1964 по 1975 р. – асистент, старший викладач, доцент кафедри прикладної теорії пружності ДДУ; з 1975 по 1976 р. – запрошений дослідник при Делфтському технологічному університеті (Нідерланди). У 1976–1985 рр. – науковий керівник науково-дослідної лабораторії механіки неоднорідного та анізотропного середовища проблемної науково-дослідної лабораторії міцності та надійності конструкцій, декан механіко-математичного факультету ДДУ. З 1985 по 1986 р. – запрошений науковець за програмою IREX університету Північного Техасу (м. Дентон, США).

З 1986 по 1992 р. – декан факультету прикладної математики. У 1988 році захистив докторську дисертацію на тему «Стійкість та коливання тонкостінних конструкцій змінної жорсткості»; у 1990 році отримав звання професора по кафедрі прикладної теорії пружності.

Ним вперше запропоновано гібридний асимптотичний метод розв'язування нелінійних сингулярних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами та їх систем, розроблено методику застосування підходу для вирішення прикладних проблем механіки неоднорідного середовища, зокрема у нелінійних задачах динаміки систем зі змінними за часом параметрами.

Віктор Захарович бере участь та керує науковими проектами з міцності та стійкості конструкцій аерокосмічної техніки за замовленнями промисловості. У 1991–1992 рр. за програмою Фулбрайта читав лекції

та проводив наукову роботу у США (Станфордський університет, Каліфорнія). Перебуваючи за кордоном, вів роботу, спрямовану на встановлення ділових та наукових стосунків з університетами України.

З 1993 по 2014 р. – проректор з наукової роботи та міжнародного співробітництва Запорізького національного університету (ЗНУ). У 1994 році – організував і очолив кафедру математичного моделювання та інформаційних технологій; з 2001 р. по теперішній час – завідувач кафедри прикладної математики і механіки ЗНУ.

Є керівником науково-дослідних держбюджетних тем Міністерства освіти і науки України. У 2013 році уклав Договір про наукове співробітництво із Державним підприємством «Конструкторське бюро «Південне». Очолив групу науковців університету для виконання наукових досліджень за замовленням підприємства. Керує науковою роботою аспірантів, є головою спеціалізованої вченої ради із захисту дисертацій при ЗНУ, членом спеціалізованої вченої ради із захисту дисертацій Національного університету «Запорізька політехніка», є заступником голови традиційної Міжнародної науково-технічної конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій». Є головою редколегії «Вісника Запорізького національного університету (фізико-математичні науки)», членом організаційного комітету щорічної Всеукраїнської конференції молодих дослідників «Актуальні проблеми математики і інформатики».

Ряд його учнів працюють в університетах США, Англії, Голландії, Австралії.

Зробив суттєвий особистий внесок у розвиток міжнародної діяльності університету. Очолював творчі колективи і брав участь у ряді міжнародних проєктів і програм, зокрема за програмами «Темпус-Тасис», «Відродження» та ін. У 2016 році – запрошений Шеффілдським університетом (Англія) до участі у міжнародній програмі «Горизонт 2020». Неодноразово приймав участь у наукових міжнародних конференціях та Конгресах.

У 1995 році – запрошений консультант міжнародної Асоціації з аналізу аварій та катастроф (Менло Парк, Каліфорнія, США). У період з 1995 по 2000 р. – запрошений професор Інституту Технологічних проблем Польської академії наук (Варшава, 1996), Станфордського університету, США (1998, 1999, 2000); асоційований редактор міжнародного журналу “Applied Mechanics Reviews”; член дослідницької Ради Консультантів Американського Біографічного Інституту; увійшов у збірник “Хто є Хто в Світі”, 13-е видання, видавництво Маркус, США, 1996. Член бюро Президії Українського товариства інженерів-механіків, член академічного союзу з науки і освіти у Східній Європі. У 1993 р. обраний академіком Академії наук вищої школи України відділення «Механіка та машинобудування», з 2002 р. – академік Міжнародної академії наук вищої школи. Нагороджений Дипломами лауреата Нагороди Ярослава Мудрого, дипломом лауреата регіональної програми «Зоряний шлях» Запорізької області у номінації «Діяч освіти і науки року» (2001), почесними грамотами Міністерства освіти і науки України і медалями «За наукові досяг-

нення» МОН України, «Ярослава Мудрого» та «Святого Володимира» Президією АН ВО України, «За заслуги» Дніпропетровським національним університетом імені Олеся Гончара, Національним гірничим університетом, Придніпровською Державною Академією будівництва та архітектури, «20 років КБ «Південне», Знаком «За Створення Ракетно-Космічної Техніки», почесними медалями Державного конструкторського бюро «Південне ім. М.К. Янгеля», почесними грамотами Торговельно-Промислової палати Землі Саксонія-Ангальт (Німеччина). У 2015 році обраний Почесним професором Запорізького національного технічного університету.

За період своєї наукової діяльності Віктор Захарович зробив вагомий внесок у ряд напрямків, а саме у такі як стійкість та коливання тонкостінних механічних систем, механіка пластин та оболонок, чутливість до початкових недосконалостей, асимптотичні методи у прикладній математиці і механіці, наближені аналітико-числові методи дослідження неоднорідних конструкцій, експериментальне та математичне моделювання композитних структур, стійкість конструкцій під дією імпульсних навантажень, нелінійний аналіз статичної і динамічної конструкцій ракетно-космічної техніки.

За значні здобутки в галузі науки і техніки Указом Президента України від 2 жовтня 2004 р. В.З. Грицаку присвоєно звання «Заслужений діяч науки і техніки України».

У теперішній час є членом наукової Ради МОН України за фаховим напрямом «Механіка» і експертом МОН України для проведення оцінювання ефективності діяльності закладів вищої освіти в частині провадження ними наукової (науково-технічної) діяльності за науковим напрямом «Технічні науки» (Наказ МОН від 07.09.2020 року № 1111).

Віктор Захарович у свій ювілей сповнений сил та творчих задумок.

Від імені редакційної колегії вітаємо шановного Віктора Захаровича з ювілеєм та щиро бажаємо йому доброго здоров'я і нових творчих звершень!

З М І С Т

Гарькавський І. В., Книш Л. І.	5
Моделювання енергопереносу в фазоперехідному теплоаккумуляторі сонячної термодинамічної установки	
Гераскин Б. Д., Годес Ю. Я., Кочеткова И. Б.	15
Моделирование установившегося движения нагрузки по ортотропной пластине на винклеровском основании	
Дзюба П. А.	23
Экспериментальные исследования устойчивости ослабленных круговыми отверстиями цилиндрических оболочек при осевом сжатии	
Каиров А. С., Латанская Л. А., Каиров В. А.	40
Экспериментальное исследование резонансных колебаний неоднородных цилиндрических оболочек с отверстиями методом голографической интерферометрии	
Михайл О. В., Лобода В. В.	50
Про спосіб знаходження параметрів руйнування для тріщин між двома матеріалами	
Панін К. В., Шуміхін Я. В.	61
Складний зсув пружно-пластичного бруса з міжфазною тріщиною	
Середницька Х. І.	69
Задача термопружності для закритої міжфазної теплоізолюваної щілини в різномірному біматеріалі	
Стеблянюк П. О., Дьомічев К. Е., Петров О. Д.	81
Моделювання поведінки елементів, виготовлених із матеріалів з пам'яттю форми при значних деформаціях	
Шевченко С. С.	95
Модель и расчет гидромеханической системы ротор – щелевые уплотнения	
Alizadeh N. I.	112
Vibrations of a longitudinally stiffened, liquid-filled cylindrical shell in liquid	
Ismayilov H. K.	132
Forced vibrations of a inhomogeneous orthotropic cylindrical shell stiffened with a cross-system of ribs in liquid	

Movsumova A. H.	144
Vibrations reinforced by longitudinal ribs of an inhomogeneous orthotropic cylindrical panel contacting with a viscous-elastic medium	
Pogrebnoy O. V.	156
Biomechanical modeling of elastic properties of bone tissue	
Грищак Віктор Захарович	165
До 80-річчя від дня народження	

TABLE OF CONTENTS

Harkavskyi I. V., Knysh L. I.	5
Modeling of energy transfer in a phase-change thermal storage module of a solar thermodynamic power plant (in Ukrainian)	
Heraskin B. D., Hodes Yu. Ya., Kochetkova I. B.	15
Modelling of steady-state load motion along an orthotropic plate on winkler foundation (in Russian)	
Dzyuba P. A.	23
Experimental stability researches cylindrical shells weaken with circular holes under axial compression (in Russian)	
Kairov A. S., Latanskaya L. A., Kairov V. A.	40
Experimental investigation of resonant vibrations of non-homogeneous cylindrical shells with holes by holographic interferometry (in Russian)	
Mikhail O. V., Loboda V. V.	50
On the way of the fracture parameters determination for cracks between two materials (in Ukrainian)	
Panin K. V., Shumikhin Y. V.	61
Elastic-plastic beam with interfacial crack under longitudinal shear (in Ukrainian)	
Serednytska Kh. I.	69
Thermal elastic problem for closed interface thermo-insulated crack in dissimilar bimaterial (in Ukrainian)	
Steblyanko P. A., Domichev K. E., Petrov A. D.	81
Simulation of behavior of elements made from materials with form memory at significant deformations (in Ukrainian)	
Shevchenko S. S.	95

Model and calculation of the hydromechanical system
rotor – groove seals (in Russian)

Alizadeh N. I.	112
Vibrations of a longitudinally stiffened, liquid-filled cylindrical shell in liquid	
Ismayilov H. K.	132
Forced vibrations of a inhomogeneous orthotropic cylindrical shells stiffened with a cross-system of ribs in liquid	
Movsumova A. H.	144
Vibrations reinforced by longitudinal ribs of an inhomogeneous orthotropic cylindrical panel contacting with a viscous-elastic medium	
Pogrebnoy O. V.	156
Biomechanical modeling of elastic properties of bone tissue	
Grischak Viktor Zakharovich	165
On the occasion of the 80th birthday (in Russian)	

Наукове видання

**ПРОБЛЕМИ
ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МЕХАНІКИ
І МІЦНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ**

**ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ
И ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ**

**PROBLEMS OF COMPUTATIONAL MECHANICS
AND STRENGTH OF STRUCTURES**

Збірник наукових праць, 2020, вип. 32

Редактор: Е. Л. Гарт

Редактор англomовного тексту О. В. Погрібний

Комп'ютерна верстка Л. Д. Левитіна, І. А. Сафронова

Підписано до друку з оригінал-макету __.09.2020. Формат 60×84 1/16.
Папір друкарський. Друк плоский. Умов. друк. арк. 13,75. Тираж 100 прим. Замовлення №

Свідоцтво про внесення до Держреєстру
серія ДК №188 від 19.09.2000.
ПП «Ліра ЛТД», вул. Погребняка, 25, м. Дніпро, 49010. Фактична адреса: вул. Наукова, 5.
тел. (056)731-96-59, 731-96-57, E-mail: lira100@ukr.net