

На правах рукописи

Салтыкова Ольга Александровна

СЛОЖНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛОК, ОПИСЫВАЕМЫХ
НЕКЛАССИЧЕСКИМИ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ

Специальности: 05.13.18 – Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ
01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Саратов 2008

Работа выполнена в Государственном общеобразовательном учреждении высшего профессионального образования «Саратовский государственный технический университет» (Россия) и Техническом Университете г. Лодзь (Польша)

Научные руководители – доктор технических наук, профессор
Крысько Вадим Анатольевич (Россия)

– доктор, профессор Ян Аврейцевич (Польша)

Официальные оппоненты – доктор физико-математических наук,
профессор

Серазутдинов Мурат Аксанович

– доктор технических наук, профессор
Панкратов В.М.

Ведущая организация – Саратовский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского

Защита состоится « » 2008г. в на заседании диссертационного совета Д 212.242.08 при ГОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет» по адресу: 410054, Саратов, ул. Политехническая, 77, Саратовский государственный технический университет.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ГОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет».

Автореферат разослан « » октября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

А.А. Терентьев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В связи с появлением сложных инженерных и технических сооружений в последние десятилетия к вопросам динамики конструкций проявляется особый интерес. Активно расширяется спектр применения балочных конструкций. Так, развитие авиационной, строительной и морской техники выдвинуло в число наиболее актуальных задач изучение нелинейного, в том числе хаотического поведения балок, их динамики и устойчивости при воздействии внешних нагрузок. В различных областях техники, используются балочные конструкции, работающие под действием динамических и ударных нагрузок. Резко возрастают требования к оценкам прочности и экономичности таких конструкций. Отметим, что проблемы детерминированности и случайности, которые остро встали пред человечеством несколько веков назад, до сих пор остаются в числе фундаментальных. Но, широкомасштабные исследования взаимоотношения порядка и хаоса начались относительно недавно. Отдельным вопросом изучения динамики диссипативных систем является вопрос о переходе систем в состояние хаоса под действием различного вида нагрузок.

Значительный вклад, в изучение этого вопроса внесли такие ученые, как: П.С.Ландау, Е.А.Хопф, М.Фейгенбаум, Н.Помо, Ю.И.Неймарк, В.А.Крысько, Я.Аврейцевич, П.А.Ланда, П.Манневиль, Д.И.Трубецков, У.Лепик, Х.М.Муштари, К.З.Галимова и др.

Что касается исследования хаотических колебаний пологих, замкнутых цилиндрических оболочек, круглых и прямоугольных пластинок, бесконечно длинных панелей, а так же балок, то этим вопросам посвящены работы: В.А.Крысько, Я.Аврейцевича, Ю.Г.Коноплева, А.В.Крысько, Т.В.Вахлаевой, Т.В.Щекатуровой, И.В.Папковой, Н.Е.Савельевой, Э.С.Кузнецовой, М.В.Жигалова, О.Н.Киреевой, Г.Г.Наркайтиса. Исследования поведения пластин и оболочек под действием ударных нагрузок можно найти в работах Баженова В.Г., Крысько В.А., Варыгина А.М. и др. Но в работах этих авторов не достаточно изучены сложные колебания балок, которые описываются неклассическими математическими моделями, в условиях знакопеременных и ударных нагрузок. Таким образом, важной и актуальной является задача построения детерминированных математических моделей, позволяющих исследовать хаотические колебания балок при воздействии поперечной знакопеременной нагрузки, и продольного удара груза.

Целью работы является построение математических моделей нелинейных колебаний сложных механических систем в виде балок, с учетом гипотез Эйлера-Бернулли, Тимошенко С.П., Пелеха-Шереметьева. Для достижения этой цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Разработка математических моделей для сложных колебаний гибких

балок по гипотезам Эйлера-Бернулли, Тимошенко С.П., Пелеха-Шереметьева для любых граничных условий под действием знакопеременной и ударной нагрузок.

2. Изучение сценариев перехода от гармонических колебаний к хаотическим для различных гипотез, с учетом некоторых управляющих параметров.
3. Разработка алгоритма и комплекса программ на ПЭВМ для качественного исследования сложных колебаний диссипативных систем в виде упругих балок с учетом различных гипотез при произвольных граничных условиях.
4. Качественное исследование динамики гибких балок, на основе нелинейной динамики в зависимости от изменения следующих параметров: краевых условий, амплитуды и частоты равномерно распределенной поперечной и продольной знакопеременных нагрузок, ударных нагрузок, величины диссипативных членов, угла поворота и искривления нормали.

Направление исследований данной работы является изучение динамики сложных механических систем в виде балок, изучение сценариев перехода к хаосу в этих системах, выявление точности используемой математической модели.

Основными методам исследований является сведение уравнений в частных производных методами конечных разностей с аппроксимацией $O(\epsilon^2)$ и конечных элементов с аппроксимацией по Бубнову-Галеркину к задаче Коши. Система полученных обыкновенных дифференциальных уравнений решается методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

Достоверность и обоснованность результатов обеспечена корректной математической постановкой задачи, использованием качественной теории дифференциальных уравнений, механики гибких балок, численных методов сведения бесконечномерных задач к конечномерным (метод конечных разностей с аппроксимацией $O(\epsilon^2)$, метод конечных элементов с аппроксимацией по Бубнову-Галеркину); тщательностью отладки и тестирования программ на ПЭВМ. Результаты, полученные автором диссертации, не противоречат имеющимся физическим представлениям, основанным на экспериментах.

На защиту выносятся следующие результаты и положения:

1. Построена математическая модель сложных колебаний гибких упругих балок с произвольными краевыми условиями под действием поперечной знакопеременной и ударной нагрузок, с использованием гипотез Эйлера-Бернулли, позволяющая проводить качественный анализ динамического поведения балки при действии различных управляющих параметров (тип трения и значения коэффициентов диссипации энергии, учет различных граничных условий, относительная толщина балки, частота

и амплитуда вынуждающих колебаний, скорость груза в момент удара, отношение массы балки к массе груза и др.).

2. Построенная математическая модель сложных колебаний гибких упругих балок с произвольными краевыми условиями под действием поперечной знакопеременной нагрузки, с использованием гипотез Тимошенко С.П., учитывает инерционные составляющие, связанные с поворотом сечений. Реализация этой математической модели позволила провести качественный анализ динамического поведения балки при действии различных управляющих параметров (граничные условия, амплитуда и частот вынуждающих колебаний, величина геометрического параметра).

3. Построенная математическая модель сложных колебаний гибких упругих балок с произвольными краевыми условиями под действием поперечной знакопеременной нагрузки, с использованием гипотез Пелеха-Шереметьева, учитывающая инерционные составляющие, связанных с поворотом сечений, позволяет изучать влияние граничных условий, амплитуды и частоты вынуждающих колебаний, а так же геометрического параметра на динамическое состояние балки.

4. Сценарии перехода колебаний гибких балок от гармонических в хаотические, для различных граничных условий, с учетом различных управляющих параметров. Изучение сценариев позволяет провести их классификацию в соответствии с ранее изученными, а так же прогнозировать поведение исследуемой динамической системы во времени при изменении управляющих параметров.

5. Учет различных типов трения (кулоновское, нелинейное, линейное) для гибкой и жесткой балки Эйлера-Бернулли, позволил провести сопоставление влияния учета упругих оснований Винклера и В.З.Власова, для математической модели Эйлера-Бернулли.

6. Разработаны и реализованы алгоритмы, методика и комплекс программ анализа хаотических колебаний гибких диссипативных систем в виде гибких упругих балок с произвольными краевыми условиями, находящихся под действием поперечной знакопеременной и ударной нагрузок, с помощью которых проведен качественный анализ состояний балки Эйлера-Бернулли, Тимошенко С.П., Пелеха-Шереметьева.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Построены математические модели нелинейной динамики гибких балок, подчиняющихся гипотезам Эйлера-Бернулли, Тимошенко С.П., Пелеха-Шереметьева. Это позволило впервые провести сравнительный анализ состояния системы при использовании различных математических моделей, а также определять зоны хаотических колебаний и управляющие параметры (амплитуду вынуждающих колебаний, скорость груза и отношение массы груза к массе балки в случае ударной нагрузки, коэффициенты внешнего и внутреннего трения, геометрические параметры

балки) для предотвращения негативных последствий.

2. Сопоставление численных результатов, полученных на основе математических моделей для различных гипотез (Эйлера-Бернулли, Тимошенко, Пелеха-Шереметьева), позволяет сделать вывод о значительном влиянии выбора математической модели в теории нелинейных колебаний. При одинаковых управляющих параметрах, в различных математических моделях, колебания могут соответствовать как хаотическим, так и гармоническим.

3. Разработан и реализован в виде пакета программ для ПЭВМ универсальный алгоритм расчета гибких балок при действии произвольной нагрузки, в том числе ударной, с учетом различных видов трения, для оснований Винклера и В.З.Власова. С помощью которого, проведен качественный анализ (сигналов $w(t), u(t), \gamma_x(t)$, сечения Пуанкаре, спектров мощности на основе Фурье анализа, автокорреляционных функций, знаков Ляпуновских показателей) хаотических колебаний гибких диссипативных систем в виде балок при произвольных граничных условиях.

4. Впервые построены карты зависимости характера колебаний от управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$ для балок, находящихся под действием знакопеременной поперечной нагрузки вида $q = q_0 \sin(\omega_p t)$ для каждой модели с различными граничными и начальными условиями, для некоторых значений геометрического параметра, дающее представление о динамическом состоянии системы, для каждого набора управляющих параметров.

5. На основании учета поперечных сдвигов для гибких балок различной толщины в случае статической и динамической задачи, установлено существенное влияние относительной толщины балки на характер поведения системы.

6. Показано, что переход колебаний из гармонических в хаотические гибких балок при действии поперечной знакопеременной и ударной нагрузок, на разных частотах вынуждающих колебаний, может происходить по различным сценариям, таким как: сценарий Фейгенбаума, сценарий Рюэля, Такенса, Ньюхауза, модифицированный сценарий Рюэля, Такенса, Ньюхауза, модифицированный сценарий Помо - Манневиля.

Практическая ценность и реализация результатов. Предложенные математические модели позволяют решать широкий класс задач динамики нелинейных гибких упругих балок при произвольных краевых условиях. Разработанный алгоритм позволяет исследовать колебания механических систем в зависимости от управляющих параметров (амплитуды и частоты возбуждающей нагрузки, краевых условий, геометрического параметра, диссипативных членов, упругого основания). Предложенные алгоритмы расчета динамики нелинейных упругих балок могут быть использованы при создании балочных систем для инженерных конструкций, в

приборостроении при инженерных расчетах. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 2006-2008 гг. РФФИ № 06-08-01357 и гранта СГТУ 1.3.08.2008 г.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертации представлялись на III Международная конференция по теории нелинейной динамики механических и биологических систем (Саратов, 2004), XXI Международная конференция по теории оболочек и пластин (Саратов, 2005), IV Всероссийская научная конференция с международным участием – Математическое моделирование и краевые задачи (Самара, 2005), 8th conference of Dynamical systems -Theory and Application, DSTA 2005,(Lodz, Poland, 2005), научный семинар кафедр «Автоматика и биомеханика» и «Прочность материалов и конструкций» Государственного технического университета г. Лодзь (Польша, 2006), третьей международной научно-технической конференции молодых ученых и студентов, (Украина, г. Донецк, 2007), 9th conference of Dynamical systems -Theory and Application, DSTA 2007, (Lodz, Poland, 2007), VII Межрегиональная научно-практическая конференция студентов и аспирантов (Новокузнецк, 2007).

В законченном виде диссертация докладывалась на научных семинарах кафедры «Высшая математика» Саратовского государственного технического университета (Россия, 2008), кафедр «Автоматика и биомеханика» и «Прочность материалов и конструкций» Технического университета г. Лодзь (Польша, 2008).

Публикации. Основное содержание и результаты диссертации опубликованы в 13 печатных работах, в том числе, 4 в журналах из перечня ВАК РФ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованной литературы. Работа содержит 168 страниц, рисунков, таблиц. Список использованной литературы включает 110 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность диссертационного исследования, дается исторический обзор результатов по математическому моделированию балочных систем, сформулирована цель работы, приводится краткое содержание диссертации.

В первой главе формулируются основные гипотезы и допущения для построения математической модели сложных колебаний балок Эйлера-Бернулли. Рассматриваются однослойные упругие балки, подчиняющиеся закону Гука. Проводится сравнительный анализ методов типа конечных разностей для сведения уравнений в частных производных к задаче Коши. Разработан алгоритм расчета динамики балок Эйлера-Бернулли методами конечных разностей с аппроксимацией $O(c^2)$ по пространственной

координате и конечных элементов с аппроксимацией по Бубнову-Галеркину. Обеспечивается достоверность получаемых результатов.

Как двумерная область Ω балка определяется следующим образом: $0 \leq t \leq \infty$, $\Omega = \{x \in [0, a]; -h \leq z \leq h\}$. Рассматривается балка с прямоугольным поперечным сечением, длиной a , высотой $2h$, нагруженная распределенной на единицу длины поперечной знакопеременной нагрузкой $q(x, t)$, действующей в направлении оси oz . Колебания балки рассматриваются в рамках гипотезы Эйлера-Бернулли, т.е. в предположении, что поперечные сечения, перпендикулярные оси балки до изгиба, остаются плоскими и перпендикулярными изогнутой оси и не деформируются в своей плоскости. Система дифференциальных уравнений в перемещениях, в безразмерном виде, описывающих движения балки с учетом диссипации энергии (1):

$$\begin{cases} 1/\lambda^2 \{L_2(w, w) + L_1(u, w) - 1/12 w_{xxxx}^{IV}\} - \ddot{w} - \varepsilon_1 \dot{w} + q = 0, \\ u_{xx}'' + L_3(w, w) - \ddot{u} - \varepsilon_2 \dot{u} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $L_1(u, w) = u_{xx}'' w_x' + u_x' w_{xx}''$, $L_2(w, w) = 3/2 w_{xx}'' (w_x')^2$, $L_3(w, w) = w_{xx}'' w_x'$, здесь черточки над безразмерными параметрами для простоты опущены.

Используемые безразмерные параметры: $\bar{w} = w/(2h)$, $\bar{u} = ua/(2h)^2$, $\bar{x} = x/a$, $\lambda = a/(2h)$, $\bar{q} = qa^4/((2h)^4 E)$, $\bar{t} = t/\tau$, $\tau = a/k$, $k = \sqrt{Eg/\gamma}$, $\bar{\varepsilon}_{1,2} = \varepsilon_{1,2} a/k$.

К уравнениям (1) следует присоединить одно из краевых условий и начальные условия:

1. Заделка – заделка:

$$w(0, t) = w(a, t) = u(0, t) = u(a, t) = w_x'(0, t) = w_x'(a, t) = 0. \quad (2)$$

2. Шарнир – шарнир:

$$w(0, t) = w(a, t) = u(0, t) = u(a, t) = w_{xx}''(0, t) = w_{xx}''(a, t) = 0 \quad (3)$$

3. Заделка – шарнир:

$$w(0, t) = u(0, t) = w(a, t) = u(a, t) = w_x'(0, t) = w_{xx}''(a, t) = 0. \quad (4)$$

4. Заделка – свободный край:

$$w(0, t) = w_x'(0, t) = u(0, t) = 0; M_x(a, t) = N_x(a, t) = Q_x(a, t) = 0 \quad (5)$$

Начальные условия:

$$w(x)|_{t=0} = 0; u(x)|_{t=0} = 0, \dot{w}(x)|_{t=0} = 0; \dot{u}(x)|_{t=0} = 0. \quad (6)$$

На рассматриваемую балку действует знакопеременная поперечная нагрузка вида:

$$q = q_0 \sin(\omega_p t) \quad (7)$$

Бесконечномерная задача (1)-(6) с помощью метода конечных разностей, с аппроксимацией $O(c^2)$, а так же метода конечных элементов в представлении Бубнова-Галеркина, сводится к конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Важным вопросом при решении задач хаотической динамики является вопрос достоверности получаемых результатов. В связи с тем, что дифференциальные уравнения, описывающие поведение используемых

математических моделей, существенно не линейны, то получение аналитических решений для проверки численных результатов становится невозможным. Данный тип динамических задач решается впервые, таким образом, сопоставление с результатами других авторов, невозможно. Единственным выходом является сопоставление с результатами, полученными с помощью разных численных методов. Поэтому используем сравнение решений по методу конечных разностей с аппроксимацией $O(\epsilon^2)$ (МКР) и методу конечных элементов (МКЭ) в форме Бубнова-Галеркина. Отметим, что для каждого метода используя принцип Рунге проводились исследования на предмет сходимости результатов по разбиениям: а) пространственной координаты; б) времени. Было установлено, что оптимальным разбиением по пространственной координате является $n = 40$, шаг по времени $\Delta t = 3.90625 \cdot 10^{-3}$. На основании этих исследований выбирались параметры задачи, используемые в дальнейшем. Показана сходимость численных результатов, с использованием МКР и МКЭ, на примере не только сходимости сигнала $w(t)$, но и фазовых портретов, спектров мощности в представлении Фурье $S(\omega_p)$. Для подтверждения достоверности результатов, и следуя идее А.Пуанкаре о том, что лучше изучать все многообразие орбит, чем следить за какой-то конкретной, были построены карты динамических режимов для управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$, которые представляют собой графическое отображение анализа результатов решения динамической задачи. Важным вопросом является наиболее полное отображение информации при минимальных затратах машинного времени. Для построения карт на область пространства $\{q_0, \omega_p\}$ была наложена сетка, в узлах которой производилась идентификация характера колебаний. Предварительно исследовался вопрос о сходимости решения при увеличении количества разбиений области $\{q_0, \omega_p\}$. Расчеты показали, что $N \times N \geq 300 \times 300$ является оптимальным.

Для консольной балки, приведены карты динамических режимов полученные двумя разными методами: конечных разностей (рис.1а) и конечных элементов (рис. 1б).

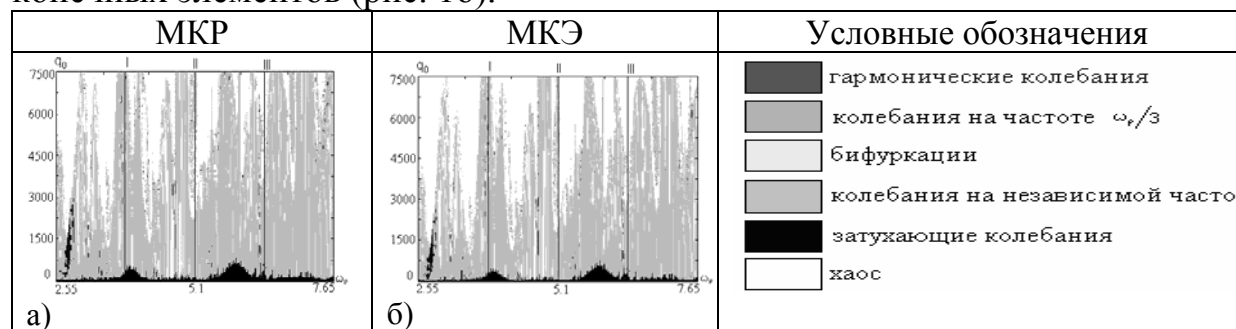


Рис. 1 Карты динамических режимов, построенные с использованием МКР и МКЭ

Условные обозначения, применимы ко всем ниже приведенным

картам. Как видно, карты, для каждого набора управляющих параметров, построенные разными методами, практически полностью совпадают. Для всех граничных условий, было проведено сравнение численных результатов по методам исследования (сопоставление сигналов, спектров мощности, карт), в результате чего, сделан вывод о достоверности получаемых численных решений.

Во второй главе исследуются сценарии перехода гармонических колебаний в хаотические, для гибких балок Эйлера-Бернулли, в условиях поперечной знакопеременной нагрузки для различных граничных условий.

Так исследован сценарий перехода системы к хаосу для граничных и начальных условий (3), (6). В результате чего выявлено, что система переходит к хаотическим колебаниям, через последовательное появления трех частот, значения которых линейно не зависят друг от друга. То есть, наблюдаем модифицированный сценарий Рюэля, Такенса, Ньюхауза, который был впервые предложен Крысько В.А. и Кравцовой И.В. Для граничных и начальных условий (5), (6) переход системы к хаосу происходит по следующему сценарию: колебания системы на частоте возбуждения, появление одной линейно независимой частоты, обогащение спектра рядом частот, линейно зависящих от первых двух. Если рассматривать сценарий, в случае заделки обоих концов балки (2), и начальных условий (6), то для частот возбуждающих колебаний $\omega_p = 6.2$ и $\omega_p = 9.2$ сценарии различны.

Проведено сравнение результатов расчета гибких балок Эйлера-Бернулли для прогиба и перемещений для всех граничных условий. На рис. 2 представлены карты для граничных условий (4).

Исследуется влияние коэффициентов диссипации энергии $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ на частотные характеристики по длине балки для $\lambda = 50, 100$. При $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_2 = 0$

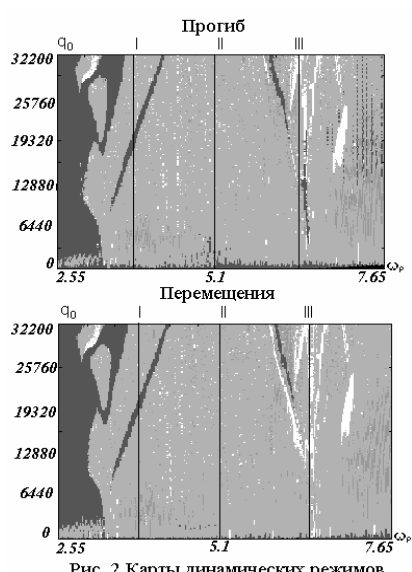


Рис. 2 Карты динамических режимов

количество и значения частот, по длине балки, совпадает, то есть эти значения являются наиболее оптимальными при расчетах. Параллельно, исследовалось влияние относительной толщины балки на характер колебаний гибких балок.

Учет влияния некоторых типов трения для балки Эйлера-Бернулли проведено для Кулоновского, линейного и нелинейного трения, также исследована динамика балок на упругих основаниях Винклера и В.З.Власова.

Для чего уравнения движения, запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} 1/\lambda^2 \{L_2(w, w) + L_1(u, w) - 1/12 w_{xxxx}^{IV} + K_1 w - K_2 w_{xx}''\} - \ddot{w} - \varepsilon_1 \dot{w} |\dot{w}|^{m-1} + q = 0, \\ u_{xx}'' + L_3(w, w) + p_x - \ddot{u} - \varepsilon_2 \dot{u} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Операторы L_1, L_2, L_3 аналогичны вышеприведенным. Система уравнений (8) является дважды нелинейной. С одной стороны, она учитывает нелинейную зависимость между деформациями и перемещениями, а с другой - нелинейность сил трения от скорости, которая описывается моделью Кулона (при параметре $m = 0$). Для исследования колебаний при линейном трении следует положить $m = 1$, при нелинейном $m = 2$.

К уравнению (8) следует присоединить граничные (2) – (4) и начальные условия.

Начальные условия:

для поперечной знакопеременной нагрузки:

$$w(x,0) = u(x,0) = \dot{u}(x,0) = \dot{w}(x,0) = 0. \quad (9)$$

для продольной знакопеременной нагрузки:

при шарнирном опирании:

$$w(x,0) = 0.01 \sin(\pi x); \quad u(x,0) = \dot{u}(x,0) = \dot{w}(x,0) = 0; \quad (10)$$

при жестком защемлении:

$$w(x,0) = 0.01 \sin^2(\pi x); \quad u(x,0) = \dot{u}(x,0) = \dot{w}(x,0) = 0; \quad (11)$$

Задача сводится к безразмерному виду с помощью вышеописанных безразмерных параметров.

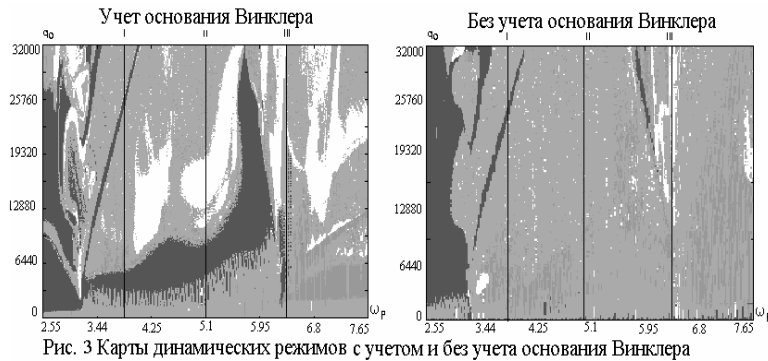


Рис. 3 Карты динамических режимов с учетом и без учета основания Винклера

Из системы (8) можно получить уравнение колебаний жесткой балки на упругом двухпараметрическом основании, если принять равными нулю нелинейные операторы и функцию перемещений.

Дано сравнение динамического состояния балки Эйлера-Бернулли на основании Винклера и без его учета (Рис. 3), для балки с шарнирным опиранием краев. Как видно, учет основания Винклера в математической модели, приводит к существенному изменению характера колебаний балки.

Третья глава посвящена изучению колебаний гибких балок Эйлера-Бернулли при действии продольного удара груза массой M_{cp} . В момент удара на свободный край балки, согласно второму закону Ньютона, действует сила: $N_x \cdot (2h) = M_{cp} \cdot \ddot{u}$. Приводя данное уравнение к безразмерному виду, получим $\ddot{u} = (1/\chi) N_x$.

Тогда, к уравнениям (1) присоединим уравнения на границе, в безразмерном приведении:

$$w(0) = 0; \quad u(0) = 0; \quad (1/\chi) N_x = \ddot{u}; \quad M_x = 0 \quad (12)$$

где $\chi = M_{ep} / M_{\sigma}$, и начальные условия:

$$\begin{aligned} w(x)|_{t=0} &= 0; \quad u(x)|_{t=0} = 0; \\ \dot{w}(x)|_{t=0} &= 0; \quad \dot{u}(x)|_{t=0} = 0 \text{ при } x \neq 0, \quad \dot{u}(x)|_{t=0} = V \text{ при } x = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где V - скорость груза в момент удара.

Данная бесконечномерная задача с помощью метода конечных разностей, с аппроксимацией $O(c^2)$ сводится к конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которую также решаем методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности.

При увеличении скорости груза V , наблюдаем сценарий перехода системы к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Получена первая константа Фейгенбаума, относительная погрешность которой составляет 0.005.

Анализ характера распространения волны u'_x по длине балки, позволяет говорить о том, что характер волны u'_x не зависит от скорости груза, но ее амплитуда увеличивается. При ударе по торцу балки грузом массой M_{ep} со скоростью V происходит процесс распространения продольных волн и их отражения. Время начала резкого увеличения амплитуды поперечных колебаний примем за $t_{кр}$.

Исследование вопроса о зависимости $t_{кр}$ от геометрических параметров балки и от скорости груза в момент удара, позволяет сделать вывод о том, что значение $t_{кр}$ значительно больше в случае относительно толстых балок $\lambda = 30, 40$ и напрямую зависит от скорости груза.

В четвертой главе формулируются основные гипотезы и допущения для построения математической модели гибкой балки Тимошенко С.П.

Размерная система дифференциальных уравнений в перемещениях, с учетом вышеприведенных безразмерных параметров и с учетом дополнительных $\bar{\gamma}_x = \gamma_x a / (2h)$, $\bar{\varepsilon}_3 = \varepsilon_3 a / k$, сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в перемещениях описывающих движения балки с учетом диссипации энергии:

$$\begin{cases} 1/3(w'''' + (\gamma_x)''_{xx}) + 1/\lambda^2(L_1(w, u) + 1/2 \cdot L_2(w, w) + L_3(w, u) + L_2(w, w)) + 1/\lambda^2 \cdot q - \\ - \ddot{w} - \varepsilon_1 \dot{w} = 0, \\ u''_{xx} + L_4(w, w) + p_x - \ddot{u} - \varepsilon_2 \dot{u} = 0, \\ (\gamma_x)''_{xx} - 8\lambda^2(w'_x + \gamma_x) - \ddot{\gamma}_x - \varepsilon_3 \dot{\gamma}_x = 0; \end{cases} \quad (14)$$

где $L_1(w, u) = w''_{xx} u'_x$, $L_2(w, w) = w''_{xx} (w'_x)^2$, $L_3(w, u) = w'_x u''_{xx}$, $L_4(w, w) = w'_x w''_{xx}$.

Здесь черточки над безразмерными параметрами опущены для простоты.

К системе дифференциальных уравнений (14), следует присоединить одно из ниже следующих граничных условий, и начальные условия.

1. Заделка – заделка:

$$w(0, t) = w(a, t) = 0; \quad u(0, t) = u(a, t) = 0; \quad \gamma_x(0, t) = \gamma_x(a, t) = 0; \quad w'_x(0, t) = w'_x(a, t) = 0; \quad (15)$$

2. Шарнир – шарнир:

$$w(0,t) = w(a,t) = 0; u(0,t) = u(a,t) = 0; Q_x(0,t) = Q_x(a,t) = 0; w''_{xx}(0,t) = w''_{xx}(a,t) = 0; \quad (16)$$

3. Заделка – шарнир:

$$w(0,t) = w(a,t) = 0; u(0,t) = u(a,t) = 0; \gamma_x(0,t) = Q_x(a,t) = 0; w'_x(0,t) = w''_{xx}(a,t) = 0; \quad (17)$$

4. Заделка – свободный край:

$$w(0,t) = u(0,t) = 0; \gamma_x(0,t) = w'_x(0,t) = 0; M_x(a,t) = N_x(a,t) = Q_x(a,t) = 0; \quad (18)$$

Начальные условия:

$$w(x,t)|_{t=0} = u(x,t)|_{t=0} = \gamma_x(x,t)|_{t=0} = 0, \dot{w}(x,t)|_{t=0} = \dot{u}(x,t)|_{t=0} = \dot{\gamma}_x(x,t)|_{t=0} = 0. \quad (19)$$

Бесконечномерная задача с помощью метода конечных разностей, с аппроксимацией $O(c^2)$ сводим к конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Применяя процедуру метода Бубнова–Галеркина получим разрешающие уравнения МКЭ. Отметим, что аппроксимирующие функции для прогиба и перемещений были использованы исходя из свойств математической модели. Сборка матриц масс, демпфирования и формы производится также как и для модели

Эйлера-Бернулли.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений решаем методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности. На рассматриваемую балку действует знакопеременная поперечная нагрузка вида (7). Чтобы убедиться в достоверности получаемых численных результатов, решаем

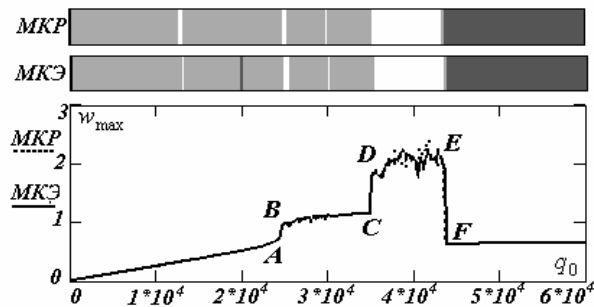


Рис. 4 Шкала зависимости характера колебаний от амплитуды вынуждающих колебаний и график зависимости $w_{\max}(q_0)$ для балки Тимошенко С.П.

описанную систему уравнений методами конечных элементов и конечных разностей, для всех граничных условий. На рис.4 приведена шкала зависимости характера колебаний от амплитуды вынуждающих колебаний и график зависимости $w_{\max}(q_0)$, для граничных условий (15).

На основании результатов, приведенных выше можно сказать, что при значениях амплитуды нагрузки соответствующей нехаотическим колебаниям, значения w_{\max} для обоих методов совпадают полностью. При появлении хаоса значения максимального прогиба отличаются, но несущественно. Шкалы колебаний по обоим методам также полностью совпадают при колебаниях на независимых частотах, бифуркациях и колебаниях на вынуждающей частоте.

Необходимо отметить явление динамической потери устойчивости балки под действием поперечной знакопеременной нагрузки, которое характеризуется резким изменением значения максимального прогиба при незначительном изменении амплитуды вынуждающих колебаний. Явление динамической потери устойчивости хорошо видно при переходе системы от т. А к т. В, и от т. С к т. D, что на шкале иллюстрируется сменой режима

колебаний. При переходе от т. E к т. F происходит обратный переход системы от хаоса к гармоническим колебаниям, что также можно наблюдать на шкале. В этом случае значения прогиба уменьшаются в 1,5 раза.

Исследование влияния граничных условий на характер поведения системы, в частности анализ карт динамических режимов, дает основание говорить об их существенном влиянии (рис. 4).

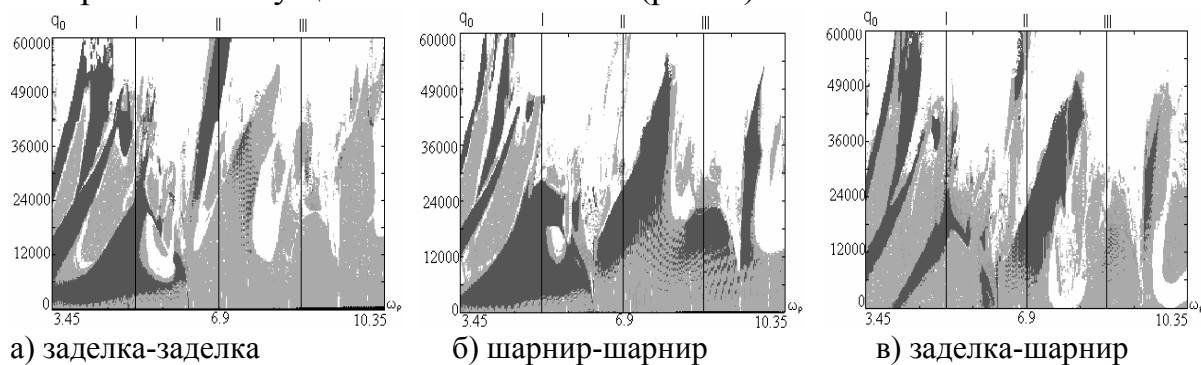


Рис. 5 Карты динамических режимов для разных видов граничных условий

Для граничных условий (16), исследованы сценарии перехода к хаотическим колебаниям для частот $\omega_p = 8.05, 6.9, 5.75$. Выявлено, что в области управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$ нет единого сценария перехода колебаний из гармонических колебаний в хаотические. Существуют подобласти $\{q_0, \omega_p\}$, в которых переход колебаний из гармонических в хаотические совершается по различным сценариям.

Исследование колебаний нелинейных конструкций на различных режимах (от гармонических до хаотических) предъявляет повышенные требования как к численным методам, так и к математической модели. Учет поперечного сдвига при построении математической модели нелинейных колебаний балки приводит к качественно иной картине характера колебаний системы, что хорошо видно при сравнении шкал зависимости характера колебаний от амплитуды вынуждающих колебаний, построенных для различных математических моделей (модели Эйлера-Бернулли и Тимошенко С.П.), при одинаковых управляющих параметрах, а также при сравнении карт.

Анализ шкал колебаний, графиков $w_{\max}(q_0)$ и карт динамических режимов колебаний для моделей Эйлера-Бернулли и Тимошенко С.П. показывают, что результаты, полученные по этим моделям существенно отличаются.

Пятая глава посвящено исследованию сложных колебаний гибких балок Пелеха-Шереметьева. Приведены основные гипотезы и допущения, построена математическая модель гибкой балки Пелеха-Шереметьева.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений в перемещениях описывающих движения балки с учетом диссипации энергии в безразмерном приведении имеет вид:

$$\begin{cases} 1/\lambda^2 63[4/5(\gamma_x)''' - 1/4 \cdot w_{xxx}^{IV}] + k^2(G_{13}/E_1)[(\gamma_x)'_x + w''_{xx}] + \\ 1/\lambda^2[L_3(w, u) + L_1(w, u) + 3/2 \cdot L_2(w, w)] + 1/\lambda^2 \cdot q - \ddot{w} - \varepsilon_2 \dot{w} = 0; \\ u''_{xx} + L_4(w, w) - \ddot{u} - \varepsilon_1 \dot{u} = 0; \\ 204/315(\gamma_x)''_{xx} - 48/315w'''_{xxx} - 12\lambda^2 k^2(G_{13}/E_1)[\gamma_x + w'_x] - \ddot{\gamma}_x - \varepsilon_3 \dot{\gamma}_x = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Где $L_1(w, u) = w''_{xx}u'_x$, $L_2(w, w) = w''_{xx}(w'_x)^2$, $L_3(w, u) = w'_x u''_{xx}$, $L_4(w, w) = w'_x w''_{xx}$.

Здесь черточки над безразмерными параметрами опущены для простоты. Вводятся безразмерные параметры, указанным выше способом. К системе дифференциальных уравнений (21), следует присоединить одно из ниже следующих граничных условий, и начальные условия.

1. Заделка – заделка:

$$\begin{aligned} w(0, t) = w(a, t) = 0; u(0, t) = u(a, t) = 0; \gamma_x(0, t) = \gamma_x(a, t) = 0; \\ w'_x(0, t) = w'_x(a, t) = 0; u'_x(0, t) = u'_x(a, t) = 0; \\ 16/5(\gamma_x)''_{xx}(0, t) - w'''_{xxx}(0, t) = 0; 16/5(\gamma_x)''_{xx}(a, t) - w'''_{xxx}(a, t) = 0; \\ 136/315(\gamma_x)'_x(0, t) - 0.038w''_{xx}(0, t) = 0; 136/315(\gamma_x)'_x(a, t) - 0.038w''_{xx}(a, t) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

2. Шарнир – шарнир:

$$\begin{aligned} w(0, t) = w(a, t) = 0; u(0, t) = u(a, t) = 0; (\gamma_x)'_x(0, t) - 2/15w''_{xx}(0, t) = 0; \\ (\gamma_x)'_x(a, t) - 2/15w''_{xx}(a, t) = 0; u'_x(0, t) + 1/2(w'_x(0, t))^2 = 0; \\ u'_x(a, t) + 1/2(w'_x(a, t))^2 = 0; 16/5(\gamma_x)''_{xx}(0, t) - w'''_{xxx}(0, t) = 0; \\ 16/5(\gamma_x)''_{xx}(a, t) - w'''_{xxx}(a, t) = 0; w'_x(0, t) + \gamma_x(0, t) = 0; w'_x(a, t) + \gamma_x(a, t) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

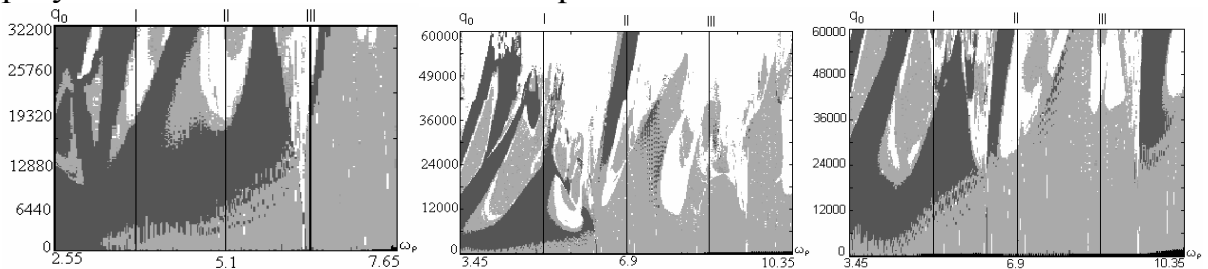
3. Заделка – шарнир:

$$\begin{aligned} w(0, t) = w(a, t) = 0; u(0, t) = u(a, t) = 0; \gamma_x(0, t) = 0; w'_x(0, t) = 0; u'_x(0, t) = 0; \\ 6/5(\gamma_x)''_{xx}(0, t) - w'''_{xxx}(0, t) = 0; 16/5(\gamma_x)''_{xx}(a, t) - w'''_{xxx}(a, t) = 0; \\ 136/315(\gamma_x)'_x(0, t) - 0.038w''_{xx}(0, t) = 0; (\gamma_x)'_x(a, t) - 2/15w''_{xx}(a, t) = 0; \\ u'_x(a, t) + 1/2(w'_x(a, t))^2 = 0; w'_x(a, t) + \gamma_x(a, t) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Начальные условия:

$$w(x, t)|_{t=0} = u(x, t)|_{t=0} = \gamma(x, t)|_{t=0} = 0, w'_x(x, t)|_{t=0} = u'_x(x, t)|_{t=0} = (\gamma_x)'_x(x, t)|_{t=0} = 0. \quad (25)$$

Достоверность численного решения обеспечена сопоставлением результатов по методам конечных разностей и конечных элементов.



а) Модель Эйлера-Бернулли б) Модель Тимошенко С.П. в) Модель Пелеха-Шереметьева
Рис. 6 Карты динамических режимов для различных моделей

Очень важным моментом является правильный выбор математической модели исследуемой распределенной системы. Рассмотрим этот вопрос на примере выбора той или иной расчетной схемы для однослойных изотропных балок $G/E = 0,384$, $\lambda = a/h = 50$ (рис. 6).

Анализ этих карт позволяет сделать вывод, что учет поворота нормали приводит к существенному изменению режимов колебаний (сопоставление моделей Эйлера-Бернулли и Тимошенко С.П., Эйлера-Бернулли и Пелеха-Шереметьева). В то время когда учет искривления нормали (сопоставление моделей Тимошенко С.П. и Пелеха-Шереметьева) приводит к изменениям в основном на высоких частотах. Здесь наблюдается приближенная сходимость по аппроксимации u^2 . С уменьшением толщины балки эта сходимость улучшается, а с увеличением – ухудшается.

Необходимо отметить, что сопоставление численных результатов для каждой из кинематических моделей, при различных значениях геометрического параметра, позволяет говорить о пределах применимости модели, в зависимости от геометрических параметров и на практике, при расчете инженерных балочных конструкций, избежать потери устойчивости системы.

В заключении приводятся основные результаты и выводы по работе.

Основные выводы по диссертации

1. Построены общие теории и математические модели сложных колебаний гибких балок Эйлера-Бернулли, Тимошенко С.П., Пелеха-Шереметьева, проведен качественный анализ динамического поведения рассматриваемых систем.

2. Предложен эффективный алгоритм решения поставленных задач. Разработан и реализован комплекс программ анализа хаотических колебаний балок с произвольными краевыми условиями, находящихся под действием поперечной знакопеременной и ударной нагрузок.

3. Разработан комплекс программ для качественного исследования сложных колебаний балок с помощью метода конечных разностей с аппроксимацией $O(c^2)$ и метода конечных элементов с аппроксимацией по Бубнову-Галеркину.

4. Обоснован выбор типа метода конечных разностей для сведения уравнений в частных производных к задаче Коши.

5. Проведено исследование сходимости метода конечных разностей в зависимости от числа разбиений по пространственной координате для балок Эйлера-Бернулли при действии поперечной знакопеременной нагрузки.

6. Выявлены области сценария Фейгенбаума на картах $\{q_0, \omega_p\}$ для консольной балки Эйлера-Бернулли при действии ударной нагрузки, грузом массой M_{cp} , где происходило до 4 бифуркаций Хопфа, что позволило вычислить константу Фейгенбаума, с относительной погрешностью 0.005.

7. Дается сопоставление решений, полученных методом конечных разностей и методом конечных элементов для каждой из кинематических моделей при действии поперечной знакопеременной нагрузки. Показано, что достоверность получаемых результатов вполне обеспечена.

8. Рассмотрено влияние некоторых типов трения (кулоновское, нелинейное, линейное) на балку Эйлера-Бернулли и исследовано поведение балок Эйлера-Бернулли на упругих основаниях Винклера и В.З.Власова.

9. В соответствии с известными сценариями перехода колебаний балочных конструкций в хаос проведена классификация колебаний балок, находящихся под действием поперечной знакопеременной и продольной ударной нагрузки. Выявлены и исследованы такие сценарии, как Фейгенбаума, Рюэля, Такенса, Ньюхауза, модифицированный Рюэля, Такенса, Ньюхауза, Помо-Манневиля, сценарии перехода в хаос, характерные для колебаний исследуемых систем, и выявлены их области на картах динамических режимов.

10. Для каждой рассматриваемой кинематической модели были отмечены явления динамической потери устойчивости при действии знакопеременной поперечной нагрузки, что подтверждается резким увеличением максимального прогиба, при малом изменении амплитуды вынуждающих колебаний.

11. Исследовано влияние геометрического параметра λ на характер поведения балки для каждой кинематической модели. Выявлено, что по мере увеличения параметра λ результаты, получаемые по моделям Эйлера-Бернулли, Тимошенко С.П., Пелеха-Шереметьева сходятся.

12. Проведено качественное сравнение результатов, полученных для каждой кинематической модели, что позволило сделать вывод о пределах применимости каждой модели в зависимости от геометрических параметров балки, это позволит при расчете конструкций, избегать ситуаций потери устойчивости системы.

Публикации по теме диссертации

1. Салтыкова О.А. Нелинейная динамика балок Эйлера-Бернулли и типа Тимошенко / В.А. Крысько, М.В. Жигалов, О.А. Салтыкова // Известия вузов. Машиностроение. 2008. № 6. С. 7-27.
2. Салтыкова О.А. Особенности сложных хаотических колебаний балок Эйлера-Бернулли и типа Тимошенко в зависимости от краевых условий / В.А. Крысько, М.В. Жигалов, О.А. Салтыкова // Известия вузов. Строительство 2008. № 9. С. 10.
3. Салтыкова О.А. Управление сложными колебаниями нелинейных многослойных балок (принято к печати) / В.А. Крысько, М.В. Жигалов, О.А. Салтыкова // Известия вузов. Авиационная техника. 2008. №9. С.10.

4. Салтыкова О.А. Диссипативная динамика геометрически нелинейных балок Бернулли – Эйлера / В.А. Крысько, М.В. Жигалов, О.А. Салтыкова, А.С. Десятова // Известия РАН. Механика твердого тела. 2008. №6. С. 17.
5. Салтыкова О.А. Нелинейные колебания балки Эйлера-Бернулли под действием продольного удара груза массой M_{gp} . / О.А. Салтыкова, В.А. Крысько // Труды третьей международной научно-технической конференции молодых ученых и студентов 11-13 декабря 2007 года, Украина. Донецк. 2007. С. 489-492.
6. Салтыкова О.А. Нелинейные колебания гибкой балки модели С.П. Тимошенко. / В.А. Крысько, А.М. Варыгин, О.А. Салтыкова // Межвузовский научный сборник. Нелинейная динамика механических и биологических систем. Саратов. 2004. С. 205-212.
7. Салтыкова О.А. Сложные колебания гибких балок при продольном ударе / В.А. Крысько, А.М. Варыгин, О.А. Салтыкова // Труды XXI международной конференции по теории оболочек и пластин. Саратов. 2005. С.288-294.
8. Салтыкова О.А. Сложные колебания гибких балок для некоторых типов краевых условий // VII Межрегиональная научно-практическая конференция студентов и аспирантов. Новокузнецк. 2007. С. 14-19.
9. Салтыкова О.А. Математическая модель нелинейной динамики балок с учетом поперечных сдвигов / М.В. Жигалов, О.А. Салтыкова // Труды четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием. Математическое моделирование и краевые задачи. Самара. 2007. С. 228-231.
10. Saltykova O.A. Vibration of Flexible Beam Subjected to a Longitudinal Impact / V.A. Krysko, J. Awrejcewicz, Yu.V. Chebotarevskiy, O.A. Saltykova // 8th Conference on Dynamical System Theory and Applications. December 12-15. 2005. Lodz. Poland. P. 719-727.
11. Saltykova O.A. Vibration of Flexible Beam Subjected to a Longitudinal Impact / V.A. Krysko, J. Awrejcewicz, Yu.V. Chebotarevskiy, O.A. Saltykova // 8th Conference on Dynamical System Theory and Applications. Abstracts. December 12-15. 2005. Lodz. Poland. P. 97
12. Saltykova O.A. Analysis of Regular and Chaotic Dynamics of the Euler-Bernoulli using Finite Difference and Finite Element Methods / V.A. Krysko, M.V. Zhigalov, J. Awrejcewicz, O.A. Saltykova // 9th conference of Dynamical systems -Theory and Application. December 17-20. 2007. Lodz. Poland. P.657-669.
13. Saltykova O.A. Analysis of Regular and Chaotic Dynamics of the Euler-Bernoulli using Finite Difference and Finite Element Methods / V.A. Krysko, M.V. Zhigalov, J. Awrejcewicz, O.A. Saltykova // 9th conference of Dynamical systems -Theory and Application. Abstracts. December 17-20. 2007. Lodz. Poland. P.79