



**KATEDRA AUTOMATYKI,
BIOMECHANIKI
I MECHATRONIKI**



**Laboratorium
Mechaniki Technicznej**

Ćwiczenie 5

Badanie drgań liniowych o jednym stopniu swobody

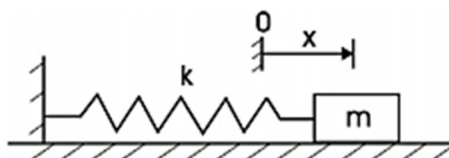
Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest poznanie podstawowych pojęć związanych z układem drgającym o jednym stopniu swobody oraz nabycie umiejętności teoretycznego i eksperymentalnego wyznaczania jego parametrów (częstości drgań swobodnych oraz współczynnika tłumienia) i charakterystyki amplitudowej.

1 Drgania liniowe o jednym stopniu swobody

1.1 Drgania swobodne bez tłumienia

Na rysunku 1 przedstawiono model fizyczny liniowego układu drgającego jednym stopniem swobody bez oporów ruchu i bez wymuszenia. Składa się on z punktu materialnego o masie m połączonego z nieruchomą ośnią liniowym elementem sprężystym o współczynniku sprężystości k [N/m].



Rysunek 1. Swobodny układ drgający bez tłumienia.

Równanie dynamiczne ruchu układu z rysunku 1 wynika z II prawa Newtona i ma następującą postać:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1)$$

lub

$$\ddot{x} + \alpha^2 x = 0, \quad (2)$$

gdzie

$$\alpha^2 = \frac{k}{m}.$$

Poszukiwanym rozwiązaniem równania różniczkowego (1) lub (2) jest funkcja $x(t)$, czyli równanie ruchu drgającego punktu. Rozwiązanie to ma postać:

$$x(t) = C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t \quad (3)$$

lub

$$x(t) = A \sin(\alpha t + \beta) \quad (4)$$

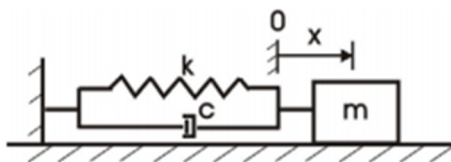
gdzie stałe C_1 , C_2 (w przypadku postaci (3)), A i β (w przypadku postaci (4)) wyznacza się z warunków początkowych $x(0) = x_0$ i $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Rozwiązanie to posiada następujące parametry:

- częstość drgań własnych $\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ [s}^{-1}\text{]},$

- okres drgań własnych $T = \frac{2\pi}{\alpha} \text{ [s].}$

1.2 Drgania swobodne z tłumieniem

Na rysunku 2 przedstawiono model fizyczny liniowego układu drgającego jednym stopniem swobody z tłumieniem i bez wymuszenia. Składa się on z punktu materialnego o masie m połączonego z nieruchomą ością liniowym elementem sprężystym o współczynniku sprężystości k [N/m] oraz tłumikiem liniowym o współczynniku c [N·s/m].



Rysunek 2. Swobodny układ drgający z tłumieniem.

Równanie dynamiczne ruchu układu z rysunku 2 przedstawia się następująco:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (5)$$

lub

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \alpha^2 x = 0, \quad (6)$$

gdzie

$$2h = \frac{c}{m}, \quad \alpha^2 = \frac{k}{m}.$$

W dalszej części rozważamy przypadek tłumienia słabego (podkrytycznego), gdy spełniony jest następujący warunek

$$c < c_{kr} = 2\sqrt{km} \quad \text{lub} \quad h < \alpha. \quad (7)$$

Wtedy rozwiązanie równania różniczkowego (6) ma postać

$$x(t) = e^{-ht} (C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t) \quad (8)$$

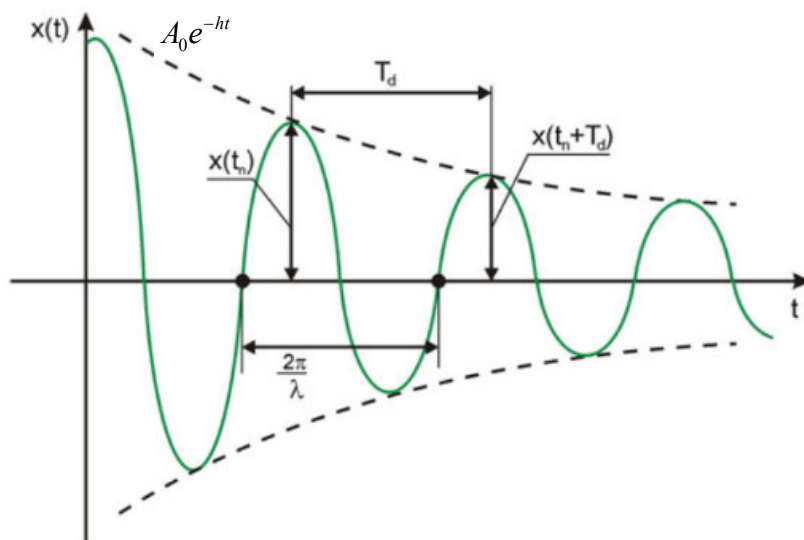
lub

$$x(t) = A_0 e^{-ht} \sin(\lambda t + \beta) \quad (9)$$

gdzie stałe C_1 , C_2 (w przypadku postaci (8)), A_0 i β (w przypadku postaci (9)) wyznacza się z warunków początkowych $x(0) = x_0$ i $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Rozwiązanie to posiada następujące parametry i własności:

- częstość drgań własnych tłumionych $\lambda = \sqrt{\alpha^2 - h^2}$ [s⁻¹],
- okres drgań własnych tłumionych $T_d = \frac{2\pi}{\lambda}$ [s],
- umowną amplitudę drgań własnych tłumionych $A(t) = A_0 e^{-ht}$ [m],

i jest przedstawione na rysunku 3.

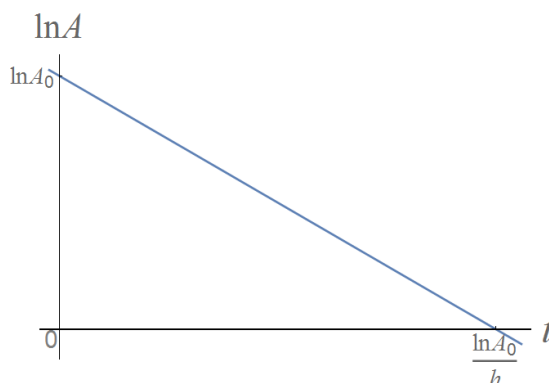


Rysunek 3. Drgania swobodne tłumione układu o jednym stopniu swobody.

Zauważmy, że logarytm umownej amplitudy drgań tłumionych jest liniową funkcją czasu

$$\ln A(t) = \ln A_0 - ht \quad (10)$$

przedstawioną na rysunku 4.



Rysunek 4. Zależność logarytmu amplitudy drgań tłumionych od czasu.

Cechą charakterystyczną drgań swobodnych tłumionych jest osiągnięcie kolejnych maksimów (minimów) A_n i A_{n+1} oddalonych od siebie o tzw. okres drgań tłumionych T_d (zob. rysunek 3) i pozostających w stałej proporcji co do wartości. W związku z tym można wprowadzić pojęcie *dekrementu tłumienia*

$$\Delta = \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{x(t_1)}{x(t_1 + T_t)} = e^{hT_d} \quad (11)$$

lub *logarytmicznego dekrementu tłumienia*

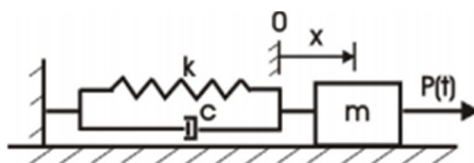
$$\delta = \ln \Delta = hT_d. \quad (12)$$

Logarytmiczny dekrement tłumienia można więc zidentyfikować mierząc dwie kolejne maksymalne (minimalne) wartości wychylenia i przedział czasu pomiędzy chwilami ich występowania. Następnie można go użyć do wyznaczenia z równania (12) współczynnika tłumienia h lub współczynnika tłumienia wiskotycznego $c = 2hm$.

Należy zwrócić uwagę, że wartości ekstremalne (minima lub maksima) są co do wartości bezwzględnej nieco mniejsze od aktualnej chwilowej umownej amplitudy drgań $A(t) = A_0 e^{-ht}$, ale pozostają one cały czas w stałej proporcji do $A(t)$. Jeśli by przeprowadzić przez wartości ekstremalne krzywą eksponencjalną (analogiczną do umownej amplitudy drgań), to miałaby ona postać $A'(t) = A'_0 e^{-ht}$. Po zlogarytmowaniu otrzyma się $\ln A'(t) = \ln A'_0 - ht$, czyli liniową funkcję czasu o takim samym współczynniku kierunkowym (ht) jak w równaniu (10), ale przebiegającą nieco niżej niż prosta na rysunku 4 ($\ln A'(t) < \ln A(t)$). Można tę własność drgań tłumionych wykorzystać do bardziej precyzyjnego wyznaczenia współczynnika tłumienia h , znajdując współczynniki funkcji liniowej opisującej logarytm zmierzonej eksperymentalnie serii amplitud (wartości ekstremalnych) wychylenia A_i w chwilach czasowych t_i . Metoda ta zostanie wykorzystana podczas ćwiczenia laboratoryjnego.

1.3 Drgania wymuszone z tłumieniem

Na rysunku 5 przedstawiono model fizyczny liniowego układu drgającego jednym stopniem swobody z tłumieniem, wymuszonego siłą harmoniczną. Składa się on z punktu materialnego o masie m połączonego z nieruchomą ośnią liniowym elementem sprężystym o współczynniku sprężystości k [N/m] oraz tłumikiem liniowym o współczynniku c [N·s/m] i poddanego działaniu harmonicznego siły wymuszającej $P(t) = P_0 \sin \omega t$.



Rysunek 5. Układ drgający z tłumieniem wymuszony siłą zewnętrzną.

Równanie dynamiczne ruchu układu z rysunku 3 przedstawia się następująco

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \sin \omega t \quad (13)$$

lub

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \alpha^2 x = q \sin \omega t, \quad (14)$$

gdzie

$$2h = \frac{c}{m}, \quad \alpha^2 = \frac{k}{m}, \quad q = \frac{P_0}{m}.$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (13) składa się z dwóch części

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad (15)$$

gdzie $x_1(t)$ jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego (bez siły wymuszającej), natomiast $x_2(t)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania pełnego. Rozwiązanie $x_1(t)$ reprezentuje drgania swobodne i zależy od warunków początkowych. Gdy w układzie występuje tłumienie, drgania te z czasem zanikają; proces zanikania drgań nazywamy procesem przejściowym. Po pewnym czasie pozostają jedynie drgania związane ze składnikiem $x_2(t)$ – są to ustalone drgania wymuszone mające postać

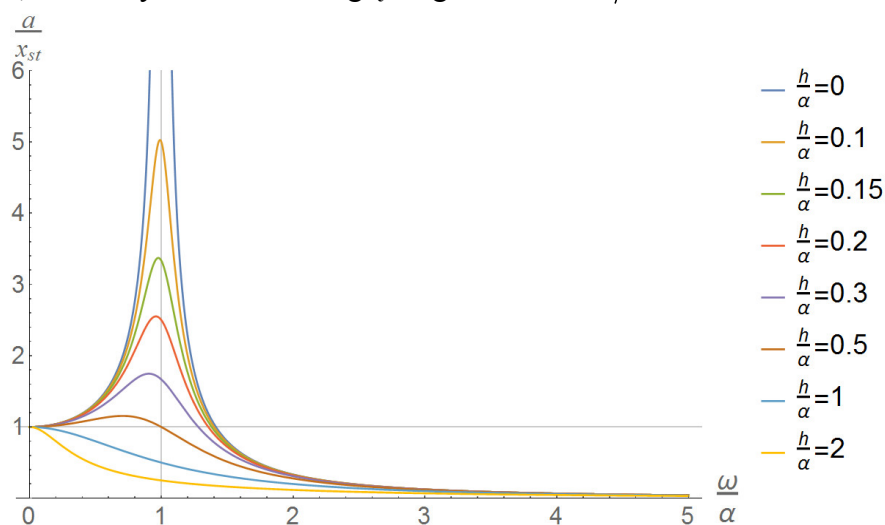
$$x_2(t) = a \sin(\omega t - \varphi), \quad (16)$$

i posiadające następujące parametry

- amplitudę
$$a = \frac{q}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}} \text{ [m]},$$
- kąt przesunięcia fazowego
$$\varphi = \arctan \frac{2h\omega}{\alpha^2 - \omega^2}.$$

Zauważmy, że w przypadku braku tłumienia ($h=0$) i częstości ω siły wymuszającej równej częstości α drgań własnych układu, wyrażenie na amplitudę a drgań wymuszonych traci sens (pojawia się dzielenie przez zero). Wówczas rozwiązanie przyjmuje inną postać i amplituda rośnie nieograniczenie w czasie. Stan ten nazywa się *rezonansem* i zachodzi dla $\omega = \omega_r = \alpha$, gdzie ω_r jest częstością rezonansową siły wymuszającej. W rzeczywistych układach zawsze występuje jakiś rodzaj nieliniowości oraz dyssypacji energii, które ograniczają amplitudę. W szczególności tłumienie h ogranicza maksymalną wartość amplitudy a , która występuje dla częstości siły wymuszającej ω mniejszej niż częstość α . Zależność amplitudy drgań od częstości siły wymuszającej nosi nazwę charakterystyki amplitudowej lub wykresu rezonansowego.

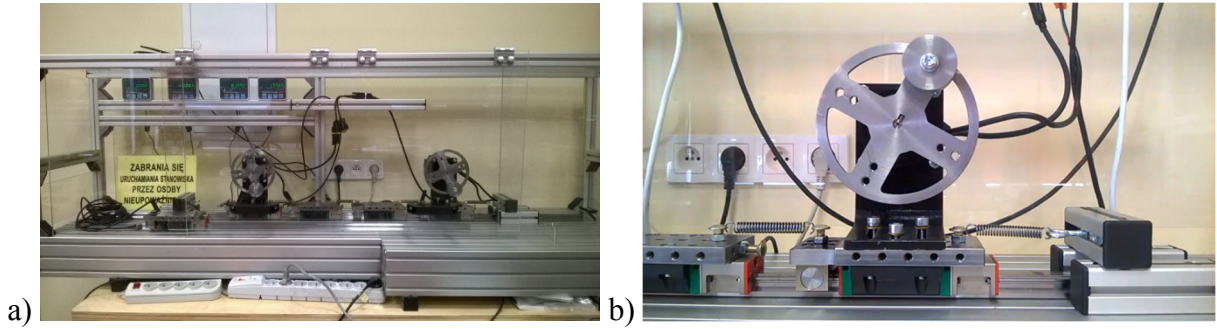
Na rysunku 6 przedstawiono przykładowe przebiegi względnej amplitudy a/x_{st} (gdzie $x_{st} = q/\alpha^2 = P_0/k$ jest wychyleniem statycznym) w funkcji względnej częstości siły wymuszającej ω/α , dla różnych wartości względnego tłumienia h/α .



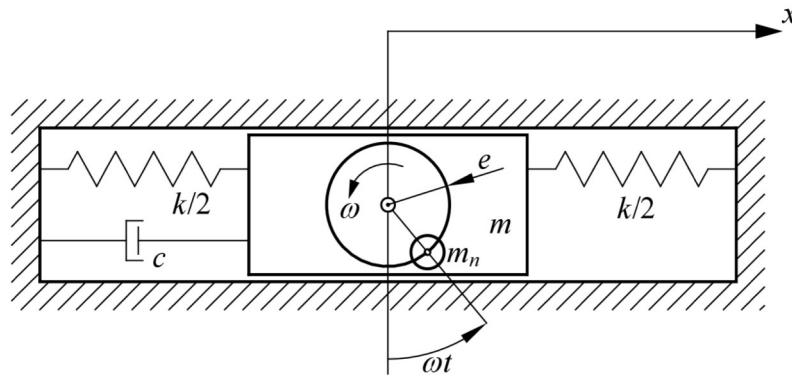
Rysunek 6. Charakterystyka amplitudowa wymuszanego harmonicznego oscylatora liniowego z tłumieniem.

2 Stanowisko laboratoryjne i model matematyczny badanego układu

Podczas ćwiczenia laboratoryjnego wykorzystywane jest stanowisko przedstawione na rysunku 7. Może ono służyć do badania drgań o wielu stopniach swobody, jednak po zablokowaniu odpowiednich wózków stanowi układ drgający o jednym stopniu swobody. Wózki są wymuszane bezwładnościowo za pomocą sterowanych silników krokowych wyposażonych w tarcze z masami umieszczonymi w pewnej odległości od osi obrotu. Pomiar położenia wózków odbywa się przy użyciu czujników Halla. Sterowanie silnikami i obserwacja położenia wózków odbywa się w systemie wykorzystującym sprzęt National Instruments i oprogramowanie LabView.



Rysunek 7. Stanowisko badawcze drgań: widok ogólny (a) i zbliżenie na wózek użyty podczas badania drgań o jednym stopniu swobody (b).



Rysunek 8. Model fizyczny badanego układu.

Model fizyczny badanego układu przedstawiono na rysunku 8, a jego różniczkowe równanie ruchu ma postać (prawo ruchu środka masy)

$$m\ddot{x}_C + c\dot{x}_C + kx = 0, \quad (17)$$

gdzie x jest położeniem wózka, x_C - położeniem środka masy C całego zestawu drgającego o masie m . Położenie środka masy można przedstawić jako

$$x_C = x + x_{Cw}, \quad (18)$$

gdzie x_{Cw} jest położeniem środka masy zestawu drgającego w układzie lokalnym wózka. Po uwzględnieniu (18) w (17) otrzymuje się

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_{Cw}. \quad (19)$$

Położenie względne środka masy zestawu drgającego można wyrazić następująco

$$x_{Cw} = \frac{(m - m_n)c_0 + m_n(c_e + x_{Cwe})}{m}, \quad (20)$$

gdzie m_n jest masą ciężarka umieszczonego na tarczy silnika powodującego jej niewyważenie, c_0 jest położeniem w układzie lokalnym wózka środka masy części wyważonej zestawu drgającego o masie $m - m_n$, natomiast $c_e + x_{Cwe}$ jest odpowiednim położeniem w układzie lokalnym środka masy ciężarka m_n . Składniki c_0 i c_e są pewnymi stałymi, natomiast

$$x_{Cwe} = e \sin \omega t. \quad (21)$$

Uwzględniając (21) w równaniu (20) i różniczkując je dwukrotnie otrzymuje się

$$\ddot{x}_{C_w} = -\frac{m_n}{m} e \omega^2 \sin \omega t, \quad (22)$$

gdzie przyjęto, że prędkość kątowna silnika ω jest stała. Po podstawieniu równania (22) do (19), równanie różniczkowe ruchu układu drgającego (model matematyczny) przyjmuje następującą postać

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_n e \omega^2 \sin \omega t. \quad (23)$$

Oznaczając $P_0 = m_n e \omega^2$, równanie to przyjmuje postać identyczną z równaniem (13). Amplituda siły wymuszającej P_0 może być interpretowana jako siła bezwładności masy niewyważenia m_n , związana z jej ruchem względem wózka po okręgu o promieniu e .

3 Wymagania wstępne

Przed przystąpieniem do ćwiczenia wymagana jest znajomość zagadnień przedstawionych w rozdziałach 1 i 2 oraz tematu „drgań punktu materialnego” występującego na wykładzie przedmiotu „Mechanika techniczna II”.

4 Przebieg ćwiczenia i sprawozdanie

Zadaniem studentów jest doświadczalne wyznaczenie współczynnika tłumienia i charakterystyki amplitudowej rzeczywistego układu drgającego przedstawionego w rozdziale 2. Stosując się do wskazówek prowadzącego i wykorzystując arkusz sprawozdania, należy wykonać kolejne zadania:

1. Uzupełnić cel ćwiczenia.
2. Obliczyć częstość własną drgań układu dla podanych parametrów.
3. Wytrącić układ z położenia równowagi i zarejestrować przebieg drgań swobodnych tłumionych. Odczytać z wykresu i zapisać kolejne wartości ekstremalne wychylenia i odpowiednie punkty przejścia wychylenia przez wartość zerową oraz odpowiadające im chwile czasowe. Dokonać stosownych obliczeń i wyznaczyć okres oraz częstość drgań swobodnych tłumionych oraz współczynnik tłumienia (w tym ostatnim przypadku stosując metodę najmniejszych kwadratów).
4. Przeprowadzić badanie eksperymentalne, mierząc amplitudę drgań wymuszonych dla różnych częstości wymuszenia. Dokonać stosownych obliczeń oraz wykonać odpowiednie wykresy amplitudowe.
5. Przeanalizować wyniki i zapisać odpowiednie wnioski.

Literatura

1. J. Awrejcewicz: Mechanika. WNT, Warszawa 2007.
2. Z. Towarek: Mechanika ogólna. Zagadnienia wybrane. Wydawnictwo PŁ, Łódź 2004.