



**KATEDRA AUTOMATYKI,
BIOMECHANIKI
I MECHATRONIKI**



**Laboratorium
Mechaniki Technicznej**

Ćwiczenie 3

Badanie reakcji podporowych w konstrukcjach płaskich

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest porównanie wartości reakcji podporowych w płaskiej konstrukcji złożonej (belkowej, ramowej, płytowej) wyznaczonych teoretycznie i doświadczalnie.

1 Wstęp teoretyczny

Przez konstrukcje płaskie złożone rozumiemy tutaj układy płaskie złożone z więcej niż jednego ciała sztywnego (belki, ramy, płyty, pręta) i obciążone siłami działającymi w jednej płaszczyźnie (płaskim dowolnym układem sił).

Ciało sztywne pod działaniem dowolnego płaskiego układu sił pozostaje w równowadze, gdy spełnione są następujące warunki

$$\sum R_{ix} = 0, \quad \sum R_{iy} = 0, \quad \sum M_{iA} = 0, \quad (1)$$

gdzie $\sum R_{ix}$ i $\sum R_{iy}$ – są sumami rzutów wszystkich sił odpowiednio na oś x i y , $\sum M_{iA}$ – sumą momentów wszystkich sił względem punktu A (względem osi prostopadłej do płaszczyzny układu i przechodzącej przez punkt A), osie x i y są dowolnymi nierównoległymi osiami leżącymi w płaszczyźnie układu, a punkt A dowolnym punktem.

Warunki równowagi dowolnego płaskiego układu sił można również wyrazić następującym układem równań:

$$\sum R_{ix} = 0, \quad \sum M_{iA} = 0, \quad \sum M_{iB} = 0, \quad (2)$$

gdzie oś x jest nieprostopadła do prostej łączącej punkty A i B , lub

$$\sum M_{iA} = 0, \quad \sum M_{iB} = 0, \quad \sum M_{iC} = 0, \quad (3)$$

gdzie A , B i C są dowolnymi punktami nie leżącymi na jednej prostej.

Powyższe warunki równowagi ciała sztywnego są warunkami koniecznymi i wystarczającymi. Są one spełnione również w przypadku ciał odkształcalnych lub układów połączonych ciał sztywnych znajdujących się w równowadze (zasada zesztynienia). Wtedy jednak są to warunki konieczne równowagi, ale nie wystarczające. Rozwiązanie statycznie wyznaczalnego układu złożonego z ciał sztywnych wymaga podzielenia układu na podukłady składające się z ciał sztywnych i zapisanie dla nich dodatkowych równań równowagi.

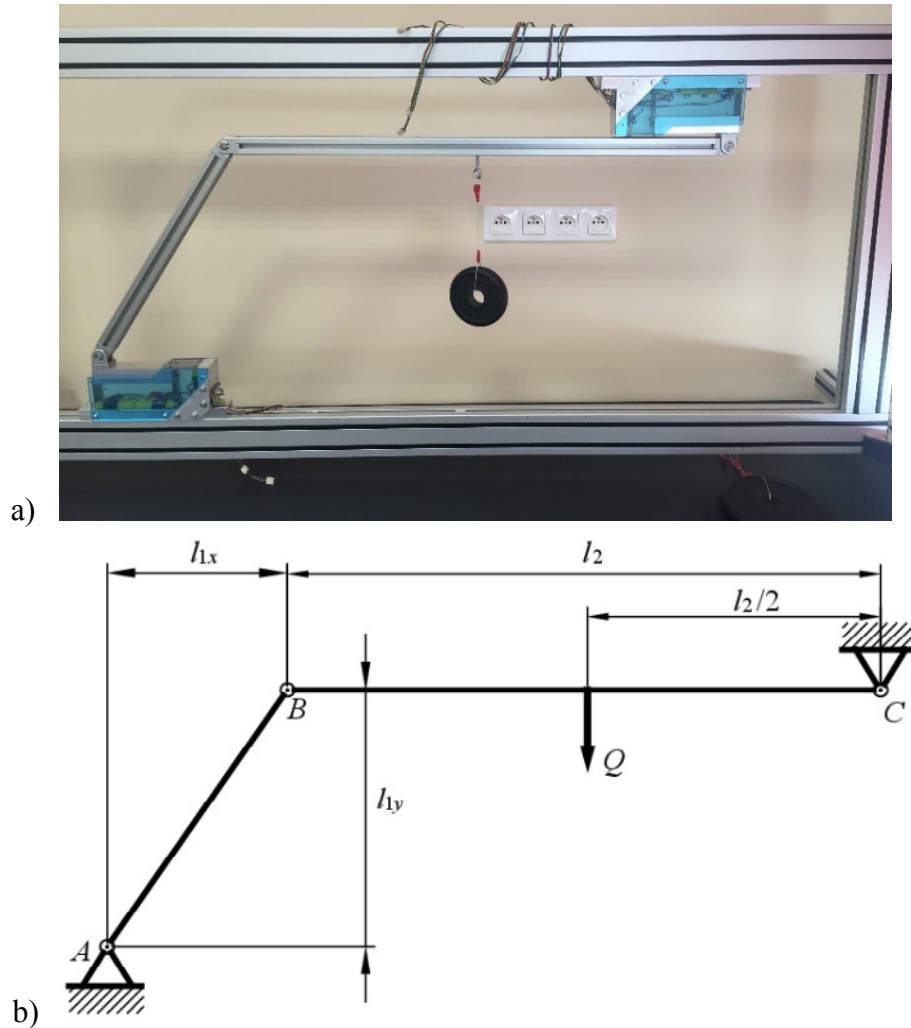
Podczas rozwiązywania zadań dotyczących równowagi układu złożonego z ciał sztywnych należy postępować wg. następującego schematu:

- wydzielić i narysować schemat geometryczny układu/wybranych podukładów
- na każdym schemacie nanieść obciążenia (siły zewnętrzne czynne) oraz zastąpić działanie więzów odpowiednimi reakcjami
- dla każdego układu/ podukładu zapisać równania równowagi
- porównać liczbę równań i niewiadomych – ewentualnie wydzielić inne układy/podukłady i zapisać dodatkowe zależności
- rozwiązać układ równań równowagi

Wyboru podukładów ciał sztywnych, które są uwalniane od więzów i dla których pisane są równania równowagi, należy dokonywać w taki sposób, aby uzyskać równania pozwalające na jak najprostsze wyznaczenie poszukiwanych wielkości.

Przykład

Na rysunku 1 widoczna jest przykładowa konstrukcja płaska (traktowana jako lekka) obciążona ciężarem Q . Dane są wymiary układu l_{1x} , l_{1y} i l_2 . Przyjmijmy, że należy wyznaczyć reakcje w podporach A i C oraz reakcje oddziaływania pomiędzy dwoma częściami układu w przegubie B .



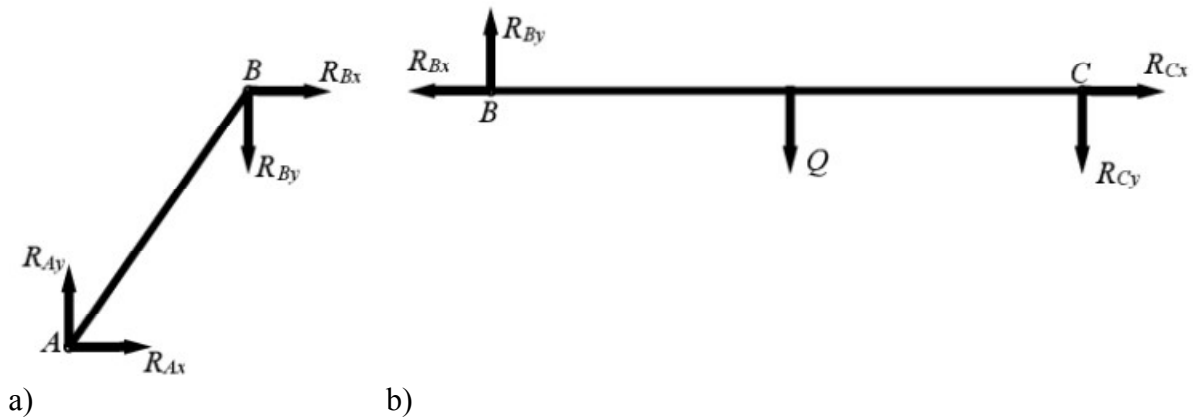
Rysunek 1. Przykładowa konstrukcja płaska – zdjęcie (a) i schemat (b).

Konstrukcja składa się z dwóch ciał sztywnych. Wydzielmy więc dwa odpowiadające im podukłady i uwolnijmy je od więzów (zob. rys. 2). Następnie dla każdego z nich można zapisać następujące równania równowagi:

$$\begin{cases} \sum P_{ix}: R_{Ax} + R_{Bx} = 0 \\ \sum P_{iy}: R_{Ay} - R_{By} = 0 \\ \sum M_{iB}: R_{Ax} \cdot l_{1y} - R_{Ay} \cdot l_{1x} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

oraz

$$\begin{cases} \sum P_{ix}: R_{Cx} - R_{Bx} = 0 \\ \sum P_{iy}: -R_{Cy} - Q + R_{By} = 0 \\ \sum M_{iB}: -Q \cdot \frac{l_2}{2} - R_{Cy} \cdot l_2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

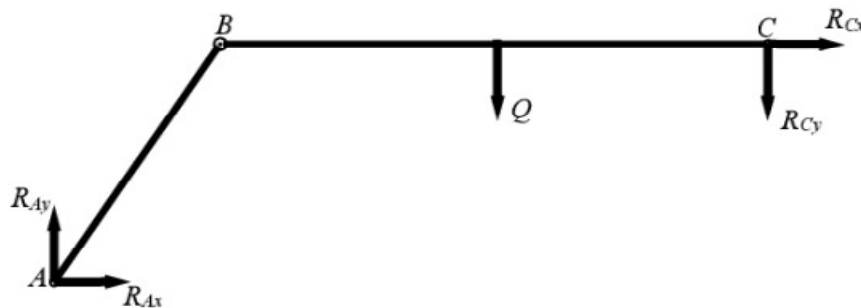


Rysunek 2. Dwa uwolnione od więzów podukłady.

Układ sześciu równań liniowych (4-5) można rozwiązać względem sześciu poszukiwanych reakcji:

$$\begin{cases} R_{Ax} = \frac{Q \cdot l_{1x}}{2 \cdot l_{1y}} \\ R_{Ay} = \frac{Q}{2} \\ R_{Bx} = -\frac{Q \cdot l_{1x}}{2 \cdot l_{1y}} \\ R_{By} = \frac{Q}{2} \\ R_{Cx} = -\frac{Q \cdot l_{1x}}{2 \cdot l_{1y}} \\ R_{Cy} = -\frac{Q}{2} \end{cases} \quad (6)$$

Przedstawiony przypadek można rozwiązać również inaczej - zależnie od tego, jakich wielkości poszukujemy. Jeśli na przykład należy wyznaczyć reakcję w podporze A, można uwolnić od więzów cały układ złożony z obu ciał sztywnych (zob. rys. 3).



Rysunek 3. Schemat całego układu po uwolnieniu od więzów.

Równanie sumy momentów wszystkich sił względem punktu C wynosi wtedy:

$$\sum M_{iC}: -R_{Ay} \cdot (l_2 + l_{1x}) + R_{Ax} \cdot l_{1y} + Q \cdot \frac{l_2}{2} = 0 \quad (7)$$

Następnie można uwolnić od więzów lewą część układu (zob. rys. 2a) i zapisać równanie sumy momentów sił względem punktu B :

$$\sum M_{iB}: R_{Ax} \cdot l_{1y} - R_{Ay} \cdot l_{1x} = 0 \quad (8)$$

Rozwiązując układ dwóch równań (7-8) względem dwóch poszukiwanych niewiadomych otrzymuje się

$$\begin{cases} R_{Ax} = \frac{Q \cdot l_{1x}}{2 \cdot l_{1y}} \\ R_{Ay} = \frac{Q}{2} \end{cases} \quad (9)$$

Poszukując reakcji w podporze C , można postąpić analogicznie, tzn. uwolnić cały układ od więzów (rys. 3) oraz prawy podukład (rys. 2b) i zapisać odpowiednie równania:

$$\begin{cases} \sum M_{iA}: -R_{Cx} \cdot l_{1y} - R_{Cy} \cdot (l_2 + l_{1x}) - Q \cdot \left(\frac{l_2}{2} + l_{1x}\right) = 0 \\ \sum M_{iB}: -R_{Cy} \cdot l_2 - Q \cdot \frac{l_2}{2} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

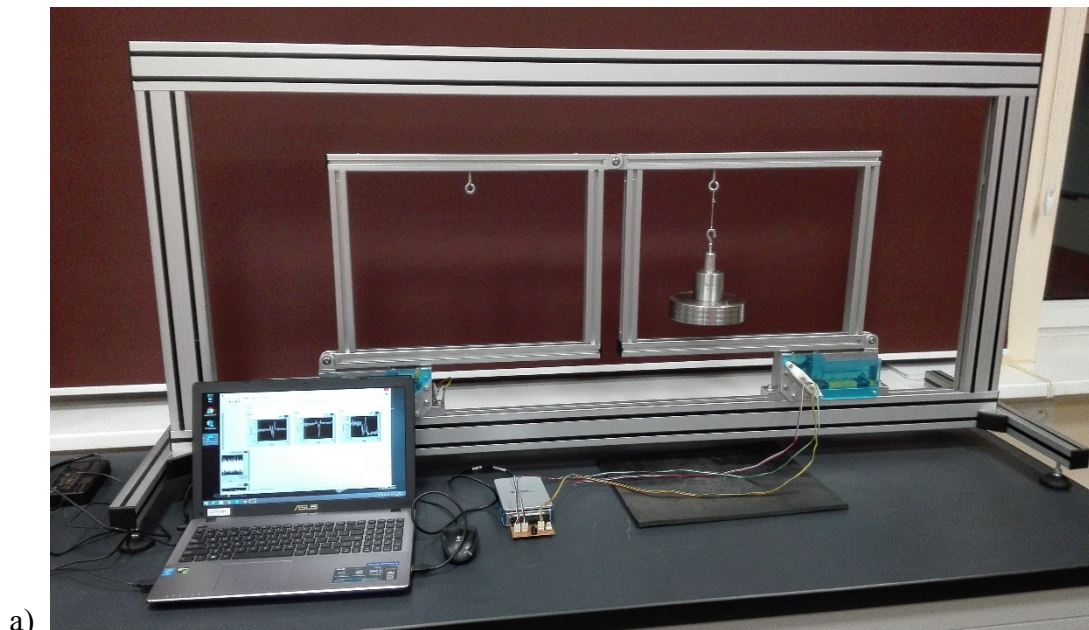
Po ich rozwiązaniu otrzymuje się poszukiwane składowe reakcji

$$\begin{cases} R_{Cx} = -\frac{Q \cdot l_{1x}}{2 \cdot l_{1y}} \\ R_{Cy} = -\frac{Q}{2} \end{cases} \quad (11)$$

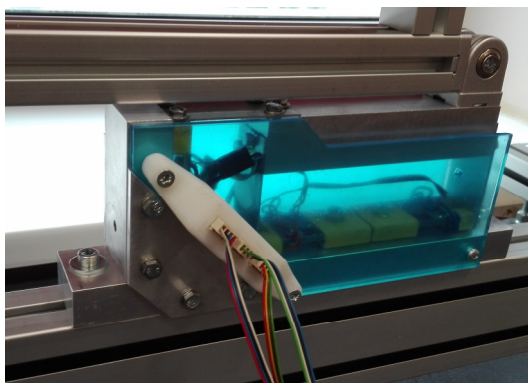
Odpowiednio dobierając uwalniane podukłady i równania równowagi można znacznie ułatwić wyznaczenie poszukiwanych niewiadomych.

2 Stanowisko laboratoryjne

Podczas ćwiczenia laboratoryjnego wykorzystane zostanie stanowisko przedstawione na rysunku 4, służące do doświadczalnego badania reakcji podporowych w konstrukcjach płaskich złożonych z belek, ram, płyt i prętów. Stanowisko składa się z ramy zewnętrznej zbudowanej z profili aluminiowych 40x80 mm o długościach odpowiednio $L_1=1660$ mm i $L_2=600$ mm. Rama zewnętrzna jest wyposażona w podstawę złożoną z profili 40x40mm oraz czterech zestawów nóg dających możliwość poziomowania stanowiska. W dowolnym miejscu po wewnętrznej stronie ramy zewnętrznej montowane są czujniki płaskiego stanu obciążenia (rys. 1b). Na czujnikach opiera się natomiast wewnętrzna konstrukcja płaska, będąca obiektem badań. Konstrukcję tę można złożyć na różne sposoby przy użyciu obustronnie nagwintowanych profili aluminiowych 30x30 mm oraz przegubów przedstawionych na rysunku 5, wyposażonych dodatkowo w zestaw wpustów rowkowych, elementów łączeniowych (śrub, haczyków) i linek. Obciążenie realizowane jest poprzez specjalne odważniki.



a)

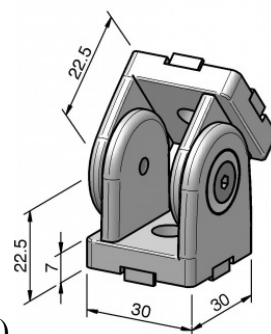


b)

Rysunek 4. Widok stanowiska z przykładową konfiguracją konstrukcji płaskiej (a) oraz czujnik płaskiego stanu obciążenia (b).



a)



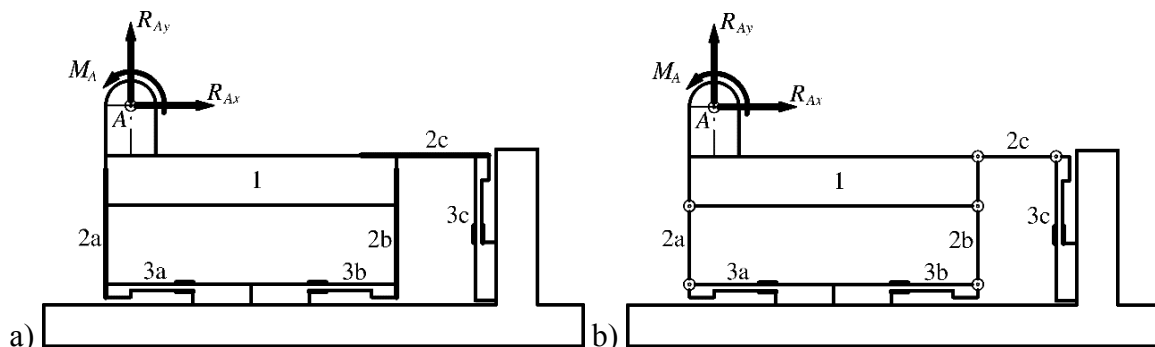
b)

Rysunek 5. Elementy badanej konstrukcji płaskiej (a) połączone przegubem (b).

Rysunek 6a przedstawia schemat zastosowanego czujnika, który składa się z belki 1, do której przykładane jest obciążenie oraz trzech cienkich blaszek 2 przenoszących obciążenie na belki pomiarowe 3 z naklejonymi tensometrami. Wszystkie elementy czujnika są połączone na sztywno, co sprawia, że konstrukcja jest statycznie niewyznaczalna.

Kształt czujnika wynika z konstrukcji przedstawionej na rysunku 7b, gdzie przy braku tarcia w przegubach, mierzone wielkości reakcji zredukowane do osi przegubu A – dwie składowe

siły R_{Ax} i R_{Ay} , oraz moment M_A - można wyznaczyć statycznie na podstawie sił w trzech prętach 2 mierzonych przy pomocy zginanych belek pomiarowych 3. Siły tarcia w przegubach rzeczywistych znacznie obniżają dokładność pomiarów, dlatego zostały one usztywnione, a pręty wykonane jako możliwie smukłe blaszki, tak aby przynosiły głównie siły wzdłużne. Charakterystyka statycznie niewyznaczalnego czujnika została zbadana doświadczalnie.



Rysunek 6. Schemat czujnika w wersji zrealizowanej (a) i statycznie wyznaczalnej (b).

Siły oraz moment reakcji przenoszone przez czujnik można zapisać jako następujące funkcje

$$R_{Ax} = R_{Ax}(u_1, u_2, u_3), \quad R_{Ay} = R_{Ay}(u_1, u_2, u_3), \quad M_A = M_A(u_1, u_2, u_3), \quad (12)$$

gdzie u_1, u_2, u_3 są napięciami na mostkach tensometrycznych naklejonych na poszczególne belki pomiarowe 3. Natomiast zakładając liniowość czujnika można zapisać:

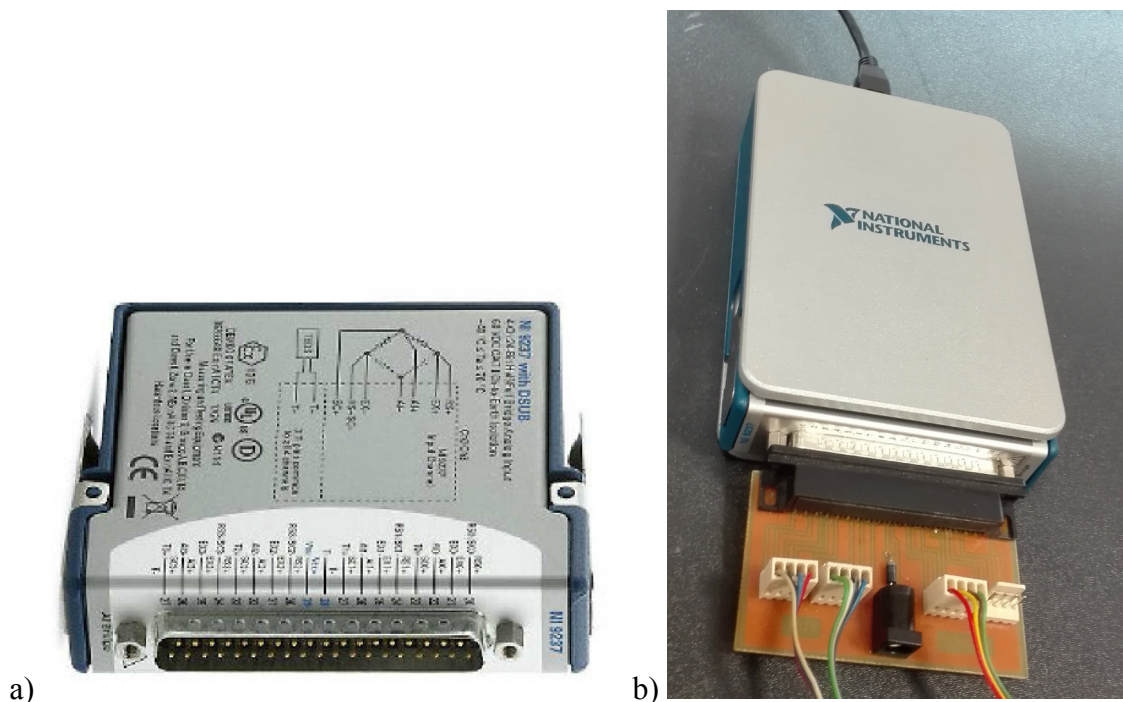
$$\begin{aligned} R_{Ax} &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3, \\ R_{Ay} &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3, \\ M_A &= a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3, \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie a_{ij} stanowią stałe (charakterystykę) czujnika i zostały wyznaczone doświadczalnie. Podczas badania czujnik był obciążany w różny, ale z góry znany sposób (co do wartości przyłożonej siły oraz linii jej działania). Wykonano w ten sposób serię pomiarów napięć na mostkach tensometrycznych u_1, u_2 i u_3 odpowiadających poszczególnym obciążeniom. Na podstawie danych pomiarowych, wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów, wyznaczono stałe a_{ij} czujnika. Tak zbadana charakterystyka wykorzystywana jest do pomiaru reakcji w podporze przy użyciu programu stworzonego w środowisku LabView. W celu zwiększenia dokładności pomiaru statycznego, jest on uśredniany w pewnym przedziale czasu.

W badanym układzie zastosowane zostały tensometry foliowe TF-5/350 firmy „Tenmex”. Każda z trzech zginanych belek czujnika wyposażona jest w układ pełnego mostka tensometrycznego Wheatstone’a (cztery tensometry – po dwa z każdej strony belki). Założeniem konstrukcyjnym podczas projektowania belek pomiarowych były ich niewielkie rozmiary – 40mm ich długości ulega podczas pomiaru ugięciu, a zakres uzyskiwanego sygnału pomiarowego przewidywany był na ok. kilkadziesiąt mikrowoltów. Podstawowym czynnikiem decydującym

o wyborze pełnego mostka było czterokrotne wzmocnienie sygnału pomiarowego w stosunku do zastosowania pojedynczego tensometru. Innym istotnym czynnikiem była eliminacja w tego typu układzie wpływu rozciągania belki pomiarowej na uzyskiwany sygnał.

Elementem umożliwiającym pobieranie sygnałów pomiarowych z tensometrów i przekazywanie ich do komputera PC jest przedstawiona na rysunku 7a karta pomiarowa (wzmacniacz) firmy National Instruments NI 9237. Jest ona wyposażona w dodatkową kartę przejściową i umieszczona w module komunikacyjnym USB pokazanym na rysunku 7b. Obróbka sygnałów pomiarowych odbywa się w programie stworzonym w środowisku LabView.



Rysunek 7. Karta pomiarowa (wzmacniacz tensometryczny) NI 9237 (a) oraz karta zamontowana w module USB wraz z kartą przejściową (b).

Przedstawiony sposób pomiaru reakcji w podporach jest pomiarem względnym. W chwili uruchomienia pomiaru w programie LabView wskazania czujnika są zerowane. Należy tego dokonać po zmontowaniu konstrukcji, ale przed założeniem obciążenia. W ten sposób ciężar własny konstrukcji nie jest uwzględniany w pomiarze i może być ona traktowana jako lekka.

3 Przebieg ćwiczenia

Zadaniem studentów jest zbadanie reakcji podporowych w zadanej przez prowadzącego konstrukcji płaskiej (złożonej z belek, płyt i prętów) wraz z odpowiednim obciążeniem.

W ramach ćwiczenia należy wykonać następujące czynności:

1. Dokonać pomiarów długości konstrukcji i narysować jej schemat.
2. Zgodnie z instrukcjami prowadzącego ćwiczenie podłączyć kartę pomiarową do wybranego czujnika oraz do komputera.
3. Uruchomić program komputerowy.
4. Uruchomić pomiar, gdy układ nie jest obciążony.

5. Obciążyć układ zadaną siłą (obciążnikiem zawieszonym na linie) i nanieść obciążenie na schemat.
6. Odczytać składowe reakcje w wybranej podporze.
7. Zdjąć obciążenie i powtórzyć czynności 4-6 pięciokrotnie dla trzech różnych wartości obciążenia zadanych przez prowadzącego.
8. Wyznaczyć odpowiednie reakcje podporowe analitycznie (należy narysować odpowiednie schematy i zapisać równania w sprawozdaniu).
9. Porównać wyznaczone doświadczalnie uśrednione pomiary składowych reakcji z wynikami uzyskanymi teoretycznie.
10. Zapisać wnioski.

4 Wymagania wstępne

Do przystąpienia do wykonywania ćwiczenia niezbędna jest znajomość informacji zawartych w rozdziałach 1 i 2 instrukcji oraz umiejętność analitycznego wyznaczania reakcji w płaskich konstrukcjach złożonych.

Literatura

1. Jan Awrejcewicz: Mechanika. WNT, Warszawa 2007.
2. Michał E. Niezgodziński, Tadeusz Niezgodziński: Zbiór zadań z mechaniki ogólnej. PWN, Warszawa 2003.