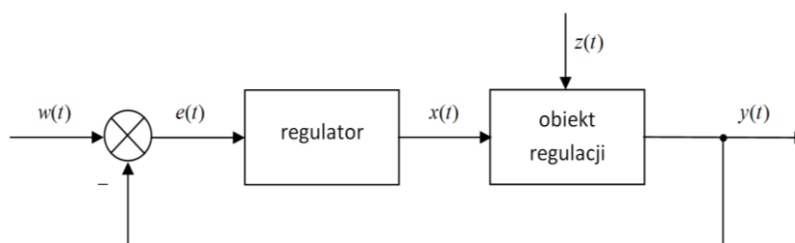


## Ćwiczenie J: *Badanie regulatora elektronicznego typu PID*

Cel ćwiczenia: Zapoznanie się z przykładem regulatora elektronicznego typu PID zbudowanego na wzmacniaczach operacyjnych, wyznaczenie parametrów i charakterystyk skokowych regulatora oraz porównanie działania całego układu dla różnych struktur regulatora.

### Wstęp

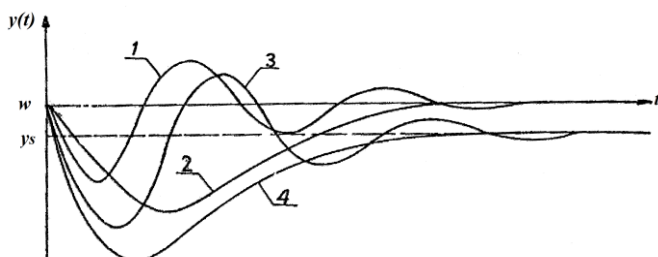
Regulator jest integralnym elementem każdego układu regulacji automatycznej. Na rysunku 1 przedstawiony został uproszczony schemat blokowy ukazujący ideę zasady działania regulacji automatycznej jednej wielkości regulowanej (tzw. **układ jednoobwodowy**).



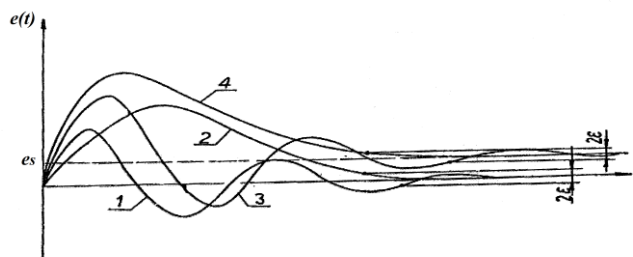
Rys. 1 Uproszczony schemat blokowy jednoobwodowego układu regulacji automatycznej.

Jego zadaniem jest wywieranie odpowiedniego wpływu na obiekt regulacji poprzez wytworzenie odpowiedniego sygnału  $x(t)$  w taki sposób, aby wielkość wyjściowa układu  $y(t)$  jak najlepiej odtwarzała przebieg wielkości zadającej  $w(t)$ , niezależnie od działającego zakłócenia  $z(t)$ . W zależności od rodzaju zastosowanego regulatora a także doboru jego nastaw, podczas regulacji różnych rodzajów obiektów w układach regulacji automatycznej (URA) wystąpić mogą różnego rodzaju przebiegi wielkości regulowanej  $y(t)$  i odpowiadające im przebiegi uchybu regulacji  $e(t) = w(t) - y(t)$ .

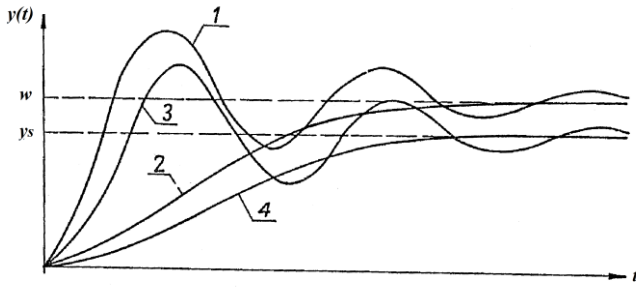
Rysunki 2 i 3 przedstawiają przebiegi czasowe wielkości wyjściowej i uchybu regulacji jako odpowiedzi układu regulacji na wymuszenie zakłócające  $z(t) = z_0 \cdot \mathbf{1}(t)$  ( $z_0 \in R, \mathbf{1}(t)$  - jednostkowa funkcja skokowa Heaveside'a), gdzie  $w$  oznacza wartość zadaną wielkości regulowanej,  $y_s$  oznacza wartość wielkości regulowanej w nowym stanie ustalonym po zakończeniu procesu regulacji,  $e_s = w - y_s$  oznacza uchyb statyczny, czyli wartość uchybu w nowym stanie ustalonym po zakończeniu procesu regulacji. Analogiczne przebiegi czasowe wielkości wyjściowej i uchybu regulacji jako odpowiedzi układu regulacji na wymuszenie zadające  $w(t) = w_0 \cdot \mathbf{1}(t)$  ( $w_0 \in R$ ) przedstawiono na rysunkach 4 i 5.



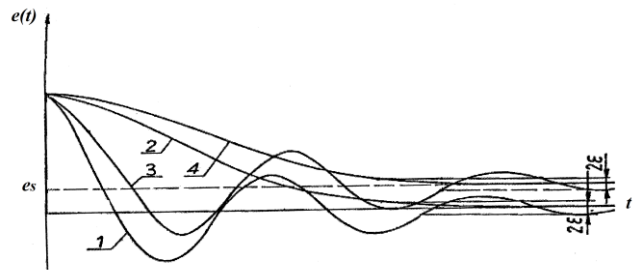
Rys. 2 Przebiegi wielkości wyjściowej.



Rys. 3 Przebiegi uchybu regulacji.



Rys. 4 Przebiegi wielkości wyjściowej.

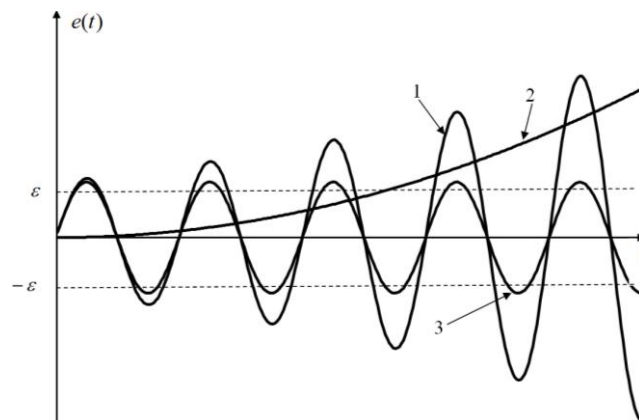


Rys. 5 Przebiegi uchybu regulacji.

Stateczne przebiegi charakteryzują się zmniejszeniem w czasie uchybu regulacji  $e(t)$ . W tym przypadku mogą zaistnieć dwa różne przypadki, a mianowicie:

- wartość uchybu statycznego  $e_s$  po zakończeniu procesu regulacji jest równa zero, a więc  $e_s = w - y_s = 0$ ; w tym przypadku mamy do czynienia z tzw. **regulacją astatyczną** (ten rodzaj regulacji pokazują krzywe 1 i 2 na rysunkach 3 i 5)
- wartość uchybu statycznego  $e_s$  po zakończeniu procesu regulacji jest różna od zera, a więc  $e_s = w - y_s \neq 0$ ; w tym przypadku mamy do czynienia z tzw. **regulacją statyczną** (ten rodzaj regulacji pokazują z kolei krzywe 3 i 4 na rysunkach 3 i 5).

Przy doborze nastaw regulatora URA należy dążyć do takiej sytuacji, kiedy uzyskujemy stateczne przebiegi wielkości regulowanej i odpowiadające im stateczne przebiegi uchybu regulacji. W przypadku niewłaściwego doboru tych nastaw dla danego obiektu regulacji w URA wystąpić mogą także niestateczne przebiegi tych wielkości. Przykłady niestatecznych przebiegów uchybu regulacji  $e(t)$  jako odpowiedzi na skokowe wymuszenie zakłócające  $z(t) = z_0 \cdot \mathbf{1}(t)$  przedstawiono na rysunku 6. Przebiegi te charakteryzują się narastaniem w czasie uchybu regulacji (krzywe 1 i 2) albo też niezaniżającymi oscylacjami uchybu o amplitudzie większej niż wymagana dokładność regulacji  $\varepsilon$  (krzywa 3).



Rys. 6. Niestateczne przebiegi uchybu regulacji.

W układach regulacji automatycznej oprócz uzyskiwania statecznych przebiegów uchybu regulacji, ważny jest również sposób realizacji wymaganej równowagi URA po wystąpieniu wymuszenia zakłócającego  $z(t)$  lub wymuszenia zadającego  $w(t)$ . Poniżej przedstawiono tzw. **wskaźniki jakości regulacji**, które wykorzystuje się właśnie do oceny wspomnianej jakości regulacji automatycznej. Wielkości te służą do porównania i scharakteryzowania przebiegów czasowych uchybu regulacji w różnych układach lub przy różnych nastawach regulatora w danym układzie regulacji.

1. **Uchyb statyczny**  $e_s$  - jest to różnica pomiędzy wartością zadaną  $w$  w wielkości regulowanej a wartością wielkości regulowanej  $y_s$  w nowym stanie ustalonym po zakończeniu procesu regulacji (inaczej wartość uchybu po zakończeniu procesu regulacji), co można wyrazić zależnością

$$e_s = w - y_s, \quad (1)$$

lub jako

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t). \quad (2)$$

2. **Maksymalny uchyb dynamiczny**  $e_{d \max}$  - jest to największa wartość jaką uchyb  $e(t)$  osiąga ponad nowy stan ustalony, czyli w stosunku do wartości uchybu statycznego  $e_{st}$

$$e_{d \max} = \max[e(t) - e_{st}]. \quad (3)$$

3. **Przeregulowanie**  $\chi$  - jest to stosunek wyrażony w procentach maksymalnego uchybu dynamicznego  $e_{d \max}$  do wartości uchybu statycznego  $e_{st}$

$$\chi = \frac{e_{d \max}}{e_{st}} 100\%, \quad (4)$$

który określa stopień zanikania oscylacji uchybu.

4. **Wskaźnik intensywności zaniku oscylacji**  $d$  (dla oscylacyjnych przebiegów uchybu) - jest to stosunek procentowy dwóch kolejnych wartości bezwzględnych uchybu mierzonych względem nowego stanu ustalonego

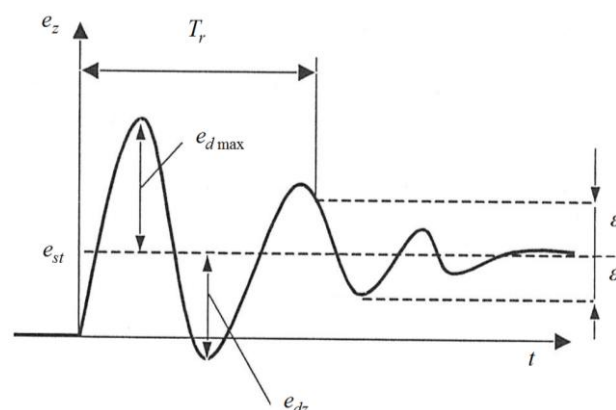
$$d = \left| \frac{e_{dz}}{e_{d \max}} \right| 100\%. \quad (5)$$

5. **Czas regulacji**  $T_r$  - jest to czas liczony od chwili wprowadzenia do układu zakłócenia  $z(t)$  lub wymuszenia zadającego  $w(t)$ , po upływie którego wartość bezwzględna uchybu dynamicznego jest mniejsza od pewnej wartości  $\varepsilon$  określającej zadaną dokładność regulacji

$$|e(t_r) - e_{st}| = \varepsilon. \quad (6)$$

6. **Ilość oscylacji**  $i_o$  (dla oscylacyjnych przebiegów uchybu) - jest to ilość oscylacji przebiegu uchybu w czasie regulacji  $T_r$ .

Wymienione powyżej wskaźniki jakości regulacji przedstawione zostały na rysunku 7.

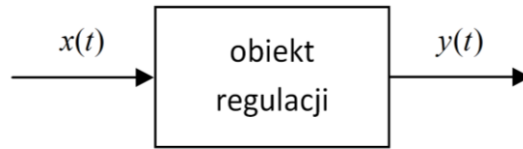


Rys. 7. Ilustracja wskaźników jakości regulacji.

## Rodzaje obiektów regulacji i regulatorów

### Rodzaje obiektów regulacji:

Na podstawie rysunku 1 można zauważyć, że przy braku zakłócenia  $z(t)$  obiekt regulacji może być przedstawiony w postaci bloku pokazanego na rysunku 8, gdzie  $x(t)$  jest wielkością wejściową obiektu regulacji a  $y(t)$  jest wielkością wyjściową obiektu regulacji.



Rys. 8. Schematyczne przedstawienie obiektu regulacji jako pojedynczego bloku.

Odpowiedź  $y(t)$  obiektu regulacji na skokowy sygnał wejściowy  $x(t) = x_o \cdot \mathbf{1}(t)$  nazywamy charakterystyką skokową obiektu regulacji. W ogólnym przypadku przebieg czasowy  $y(t)$  jest rozwiązaniem odpowiedniego równania różniczkowego (równania obiektu) na zadany sygnał wejściowy  $x(t)$ . Przy założeniu zerowych warunków początkowych odpowiedź układu  $y(t)$  wyznaczyć można w łatwiejszy sposób przy wykorzystaniu przekształceń Laplace'a, a mianowicie z zależności

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s) \cdot X(s)], \quad (7)$$

gdzie  $Y(s)$  jest transformatą Laplace'a sygnału wyjściowego  $y(t)$ ,  $X(s)$  jest transformatą Laplace'a sygnału wejściowego  $x(t)$ ,  $G(s)$  jest transmitancją operatorową obiektu w dziedzinie operatora Laplace'a  $s$  (transmitancja  $G(s)$  zdefiniowana jest jako stosunek transformaty  $Y(s)$  sygnału wyjściowego do transformaty  $X(s)$  sygnału wejściowego przy zerowych warunkach początkowych), a  $L^{-1}[\ ]$  oznacza przekształcenie odwrotne do przekształcenia Laplace'a (przekształcenia Laplace'a oznaczane jest jako  $L[\ ]$ ). Jako przykład rozważmy obiekt regulacji opisany równaniem różniczkowym

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \quad (8)$$

dla  $\xi < 1$  i wyznaczmy jego odpowiedź skokową, czyli odpowiedź na sygnał wejściowy  $x(t) = x_o \cdot \mathbf{1}(t)$ . Stosując przekształcenie Laplace'a do równania (8) i zakładając zerowe warunki początkowe mamy

$$T^2 s^2 Y(s) + 2\xi T s Y(s) + Y(s) = kX(s), \quad (9)$$

więc

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}. \quad (10)$$

Z kolei transformata  $X(s)$  sygnału wejściowego jest równa (na podstawie tablicy transformat)

$$X(s) = L[x_o \cdot \mathbf{1}(t)] = x_o L[\mathbf{1}(t)] = \frac{x_o}{s}. \quad (11)$$

Tak więc odpowiedź  $y(t)$  rozważanego obiektu wyznaczyć można z zależności

$$y(t) = L^{-1}[G(s) \cdot X(s)] = L^{-1}\left[\frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} \cdot \frac{x_0}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{kx_0}{s(T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1)}\right]. \quad (12)$$

Na podstawie tablic transformat Laplace'a funkcji możemy wyznaczyć  $y(t)$ , które będzie równe

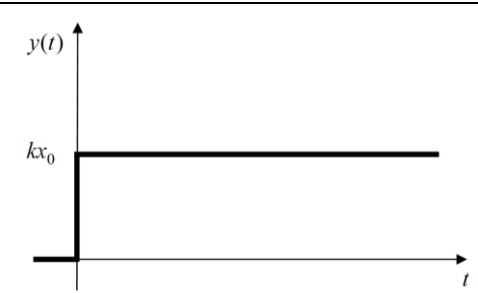
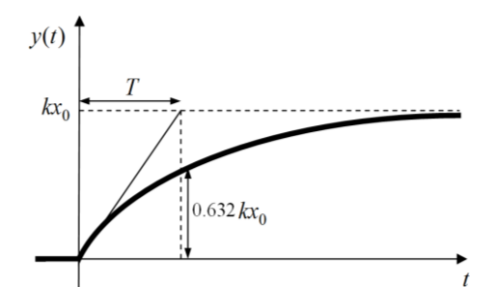
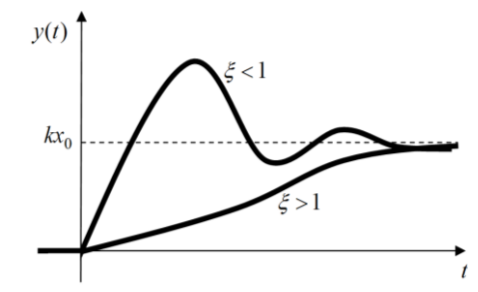
$$y(t) = kx_0 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T}t} \sin\left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{T} + \arctg \sqrt{\frac{1-\xi^2}{\xi}}\right) \right). \quad (13)$$

Na podstawie kryterium rodzaju charakterystyki skokowej wyróżnia się dwa zasadnicze rodzaje obiektów regulacji, a mianowicie:

- **obiekty statyczne** - charakterystyka skokowa tych obiektów charakteryzuje się przebiegiem posiadającym stan ustalony,
- **obiekty astatyczne** - charakterystyka skokowa tych obiektów charakteryzuje się narastaniem w czasie bez stanu ustalonego.

Ponadto w ramach przedstawionego podziału obiekty regulacji dzielą się w zależności od postaci opisujących je równań różniczkowych na: bezinercyjne, I-go rzędu, II-go rzędu itp. Podstawowe rodzaje obiektów wraz z odpowiednim równaniem różniczkowym obiektu, transmitancją operatorową  $G(p)$  obiektu jak i jego charakterystyką skokową ( $x(t) = x_0 \cdot \mathbf{1}(t)$ ) przedstawiono w tabeli 1.

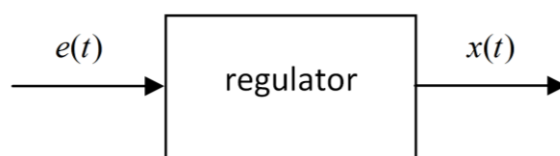
Tabela 1. Przykłady obiektów statycznych i astatycznych.

Nazwa obiektu	Równanie obiektu	Transmitancja operatorowa	Charakterystyka skokowa
Obiekty statyczne			
Bezinercyjny	$y(t) = kx(t)$	$G(p) = k$	
I-go rzędu	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$	$G(p) = \frac{k}{Tp+1}$	
II-go rzędu	$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$	$G(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1}$	

Obiekty astatyczne			
Bezinercyjny	$y(t) = k \int x(t) dt$	$G(p) = \frac{k}{p}$	
I-go rzędu	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \int x(t) dt$	$G(p) = \frac{k}{p(Tp+1)}$	
II-go rzędu	$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \int x(t) dt$	$G(p) = \frac{k}{p(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)}$	

### Rodzaje regulatorów:

Na podstawie rysunku 1 można zauważyć, że regulator może być przedstawiony w postaci bloku pokazanego na rysunku 9, gdzie  $e(t)$  jest wielkością wejściową regulatora, a  $x(t)$  jest wielkością wyjściową regulatora. Odpowiedź  $x(t)$  regulatora na skokowy sygnał wejściowy  $e(t) = e_0 \cdot \mathbf{1}(t)$  nazywamy charakterystyką skokową regulatora.



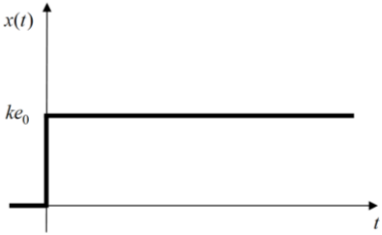
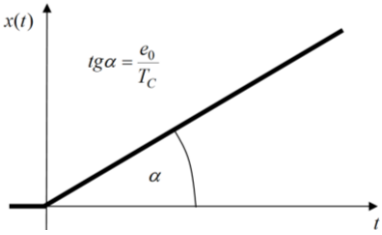
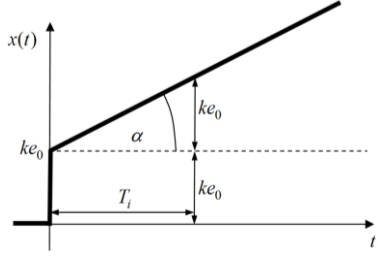
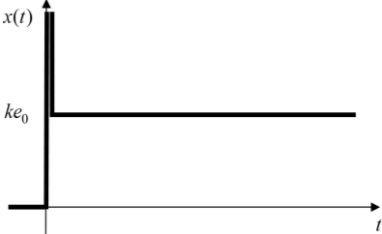
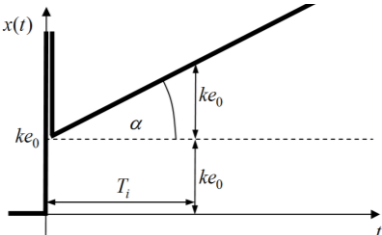
Rys. 9. Schematyczne przedstawienie regulatora jako pojedynczego bloku.

Podziału regulatorów dokonać można w różny sposób, w zależności od przyjętego kryterium podziału. Zasadniczym kryterium klasyfikacji regulatorów są ich własności dynamiczne, a więc sposób przetwarzania uchybu regulacji  $e(t)$  na wielkość  $x(t)$  działającą na obiekt regulacji. Dlatego też podziału regulatorów dokonujemy najczęściej na podstawie funkcji  $x(t) = f(e(t))$  będącej równaniem regulatora, według której regulator przekształca wielkość wejściową  $e(t)$  na wielkość wyjściową  $x(t)$ . Według tego kryterium wyróżnia się następujące rodzaje regulatorów idealnych:

- P - regulator proporcjonalny
- I - regulator całkujący
- PI - regulator proporcjonalno-całkujący
- PD - regulator proporcjonalno-różniczkujący
- PID - regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący

W tabeli 2 przedstawiono zestawienie wymienionych wyżej rodzajów regulatorów z odpowiednim równaniem różniczkowym regulatora, transmitancją operatorową  $G(p)$  regulatora jak i jego charakterystyką skokową ( $e(t) = e_0 \cdot \mathbf{1}(t)$ ).

Tabela 2. Rodzaje regulatorów idealnych

Nazwa regulatora	Równanie regulatora	Transmitancja operatorowa	Charakterystyka skokowa
P - proporcjonalny	$x(t) = ke(t)$	$G(p) = k$	
I - całkujący	$x(t) = \frac{1}{T_C} \int e(t) dt$	$G(p) = \frac{1}{T_C p}$	
PI - proporcjonalno-całkujący	$x(t) = k \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \right)$	$G(p) = k \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$	
PD - proporcjonalno-różniczkujący	$x(t) = k \left( e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$	$G(p) = k(1 + T_d p)$	
PID - proporcjonalno-całkująco-różniczkujący	$x(t) = k \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$	$G(p) = k \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$	

Przedstawione w tabeli 2 odpowiedzi skokowe regulatorów wyznaczyć można na podstawie przekształceń Laplace'a. W tabeli 2 przedstawiony został regulator różniczkujący idealny. W rzeczywistości regulator taki charakteryzuje się pewną inercją. Rozważmy dokładniej charakterystykę skokową regulatora różniczkującego rzeczywistego, którego transmitancja operatorowa ma postać

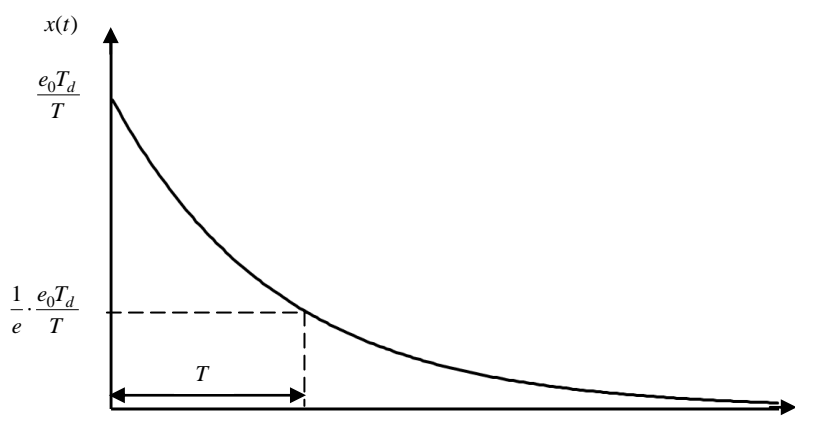
$$G(p) = \frac{T_d p}{T p + 1}. \quad (14)$$

Stąd  $G(s) = \frac{T_d s}{T s + 1}$ , a przyjmując skokowy sygnał wejściowy  $e(t) = e_0 \cdot \mathbf{1}(t)$  otrzymujemy transformatę

Laplace'a sygnału wejściowego równą  $E(s) = \frac{e_0}{s}$ . Odpowiedź skokowa rozważanego regulatora ma więc postać

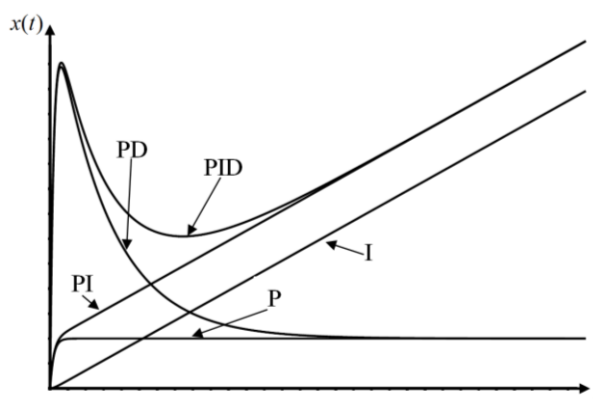
$$x(t) = L^{-1} \left[ \frac{T_d s}{T s + 1} \cdot \frac{e_0}{s} \right] = L^{-1} \left[ \frac{e_0 T_d}{T s + 1} \right] = \frac{e_0 T_d}{T} L^{-1} \left[ \frac{1}{s + 1/T} \right] = \frac{e_0 T_d}{T} e^{-\frac{t}{T}}. \quad (15)$$

Rysunek 10 przedstawia odpowiedź rozważanego regulatora na zadany sygnał wejściowy. Na podstawie wyznaczonej doświadczalnie charakterystyki wyznaczyć można stałą czasową  $T$ . Następnie na podstawie znajomości stałej czasowej  $T$  i amplitudy  $e_0$  sygnału wejściowego wyznaczyć można stałą czasową  $T_d$ .



Rys. 10. Odpowiedź skokowa rzeczywistego regulatora różniczkującego.

Przedstawione w tabeli 2 charakterystyki dotyczą regulatorów idealnych. W rzeczywistości jednak każdy regulator posiada pewną bezwładność spowodowaną występowaniem inercyjnych elementów składowych regulatora, a więc charakterystyki rzeczywiste będą różnić się od charakterystyk idealnych. Charakterystyki rzeczywiste wszystkich wymienionych wcześniej rodzajów regulatorów pokazano na rysunku 11.



Rys. 11. Charakterystyki skokowe regulatorów rzeczywistych.

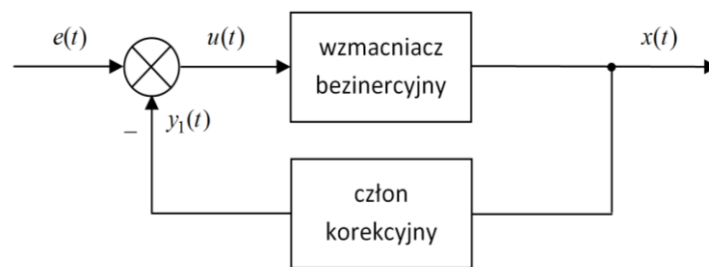


Poniżej przedstawiono cechy charakterystyczne poszczególnych rodzajów regulatorów:

- **Regulator P** daje regulację statyczną, a więc nie sprowadza do zera uchybu regulacji wywołanego trwałymi zakłóceniami. Stosowany jest do obiektów prostych o niedużym opóźnieniu i w miarę stałym obciążeniu.
- **Regulator I** sprowadza uchyb regulacji do zera, czyli daje regulację astatyczną. Ma silniejsze tendencje do niestateczności niż regulator P, a z obiektami astatycznymi daje układy niestateczne. Jest stosowany do obiektów statycznych o powolnych zmianach obciążenia.
- **Regulator PI** daje regulację astatyczną; działa dobrze przy powolnych zakłóceniach. Im większe wzmocnienie struktury P, a i im krótszy czas całkowania struktury I, tym dokładniej i szybciej działa regulator, jest jednak wówczas bliższy niestabilności. Stosowany jest do obiektów z większym opóźnieniem i znaczniejszymi, ale powolnymi zmianami obciążenia.
- **Regulator PD** daje regulację statyczną. Działanie różniczkujące powoduje szybką interwencję regulatora w przypadku pojawiającego się zakłócenia. Działa skuteczniej w przypadku zakłóceń szybkich i zapewnia lepszą regulację w zakresie szerszego pasma częstości zakłóceń niż regulator PI. Jest stosowany do regulacji obiektów o większych opóźnieniach, ale małych i szybkich zakłóceniach.
- **Regulator PID** daje regulację astatyczną i zwiększa stateczność pracy układu. Można stosować krótsze czasy całkowania niż przy regulacji PI bez obawy powstania oscylacji. Można więc szybciej likwidować wpływ zakłóceń o charakterze trwałym (np. zmiany obciążenia obiektu). Jest stosowany do obiektów o dużych i gwałtownych zmianach obciążenia.

### Podstawowe zasady dotyczące konstrukcji regulatorów

Rzeczywiste regulatory budowane są często w postaci bezinercyjnych wzmacniaczy o dużym współczynniku wzmocnienia (człon proporcjonalny) z pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego (człon korekcyjny). Taki podstawowy schemat blokowy regulatora przedstawiony jest na rysunku 12, gdzie  $G_W(p) = K_w \gg 1$  jest transmitancją bezinercyjnego wzmacniacza o dużym współczynniku wzmocnienia  $K_w$ , natomiast  $G_K(p)$  jest transmitancją operatorową elementu znajdującego się w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego (transmitancją członu korekcyjnego).



Rys. 12. Schemat blokowy ukazujący podstawową zasadę konstrukcji regulatorów.

Na podstawie powyższego schematu blokowego można zapisać następujące zależności:

$$\begin{cases} x(t) = G_W(p) \cdot u(t), \\ u(t) = e(t) - y_1(t), \\ y_1(t) = G_K(p) \cdot x(t). \end{cases} \quad (16)$$

Wstawiając trzecie z tych równań do równania drugiego, a następnie wstawiając uzyskane w ten sposób równanie drugie do równania pierwszego otrzymujemy

$$x(t) = G_W(p) \cdot (e(t) - G_K(p) \cdot x(t)). \quad (17)$$

Na podstawie uzyskanej zależności (17) równanie operatorowe regulatora ma postać

$$G_W(p) \cdot e(t) = (1 + G_W(p) \cdot G_K(p)) \cdot x(t), \quad (18)$$

a transmitancja operatorowa regulatora jest równa

$$G_R(p) = \frac{x(t)}{e(t)} = \frac{G_W(p)}{1 + G_W(p)G_K(p)} = \frac{K_w}{1 + K_w G_K(p)}. \quad (19)$$

Jeśli  $K_w \gg 1$ , wówczas

$$G_R(p) = \frac{1}{\frac{1}{K_w} + G_K(p)} \approx \frac{1}{G_K(p)}. \quad (20)$$

Stąd można wnioskować, że transmitancja operatorowa  $G_R(p)$  regulatora równa jest w przybliżeniu odwrotności transmitancji operatorowej  $G_K(p)$  elementu znajdującego się w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego (członu korekcyjnego).

**Przykład 1:** Znaleźć transmitancję operatorową  $G_R(p)$  regulatora zbudowanego w oparciu o bezinercyjny wzmacniacz o dużym wzmocnieniu pracującego w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego, w której umieszczono człon inercyjny I-go rzędu.

*Rozwiązanie:*

Dla podanych założeń transmitancję operatorową  $G_R(p)$  regulatora można przybliżyć odwrotnością transmitancji członu inercyjnego o transmitancji  $G_K(p) = \frac{k}{Tp+1}$ ,  $k, T = \text{const.}$ , zatem

$$G_R(p) \approx \frac{1}{G_K(p)} = \frac{1}{k}(Tp+1). \quad (21)$$

Otrzymaliśmy więc regulator o działaniu proporcjonalno-różniczkującym (regulator typu PD).

**Przykład 2:** Znaleźć transmitancję operatorową  $G_K(p)$  elementu ujemnego sprzężenia zwrotnego (członu korekcyjnego) bezinercyjnego wzmacniacza taką, aby zbudowany regulator miał własności regulatora typu PI.

*Rozwiązanie:*

Chcemy, aby transmitancja operatorowa  $G_R(p)$  regulatora była równa

$$G_R(p) = k \left( \frac{1}{T_i p} + 1 \right). \quad (22)$$

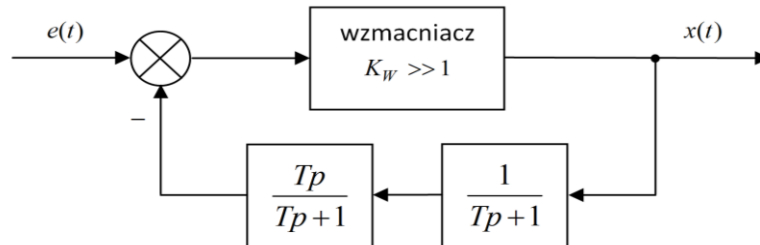
Ponieważ  $G_R(p) = 1/G_K(p)$ , to

$$G_K(p) = \frac{1}{G_W(p)} = \frac{T_i p}{k(T_i p + 1)}. \quad (23)$$

Otrzymana transmitancja operatorowa  $G_K(p)$  odpowiada więc transmitancji operatorowej rzeczywistego członu różniczkującego (członu różniczkującego z inercją). Stąd wniosek, że aby zbudować regulator typu PI należy bezinercyjny wzmacniacz o dużym sprzężeniu zwrotnym obciążyć pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego, w której znajduje się rzeczywisty człon różniczkujący.

**Przykład 3:**

Wyznaczyć transmitancję operatorową regulatora przedstawionego w postaci schematu blokowego na rysunku 13.



Rys. 13. Schemat blokowy regulatora.

*Rozwiązanie:*

Transmitancja operatorowa członu znajdującego się w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego (członu korekcyjnego) bezinercyjnego wzmacniacza jest równa

$$G_K(p) = \frac{1}{Tp+1} \cdot \frac{T_d p}{Tp+1} = \frac{T_d p}{T^2 p^2 + 2Tp + 1}, \quad (24)$$

zatem przybliżona transmitancja operatorowa całego regulatora ma postać

$$G_R(p) = \frac{T^2 p^2 + 2Tp + 1}{T_d p} = \frac{T^2 p}{T_d} + \frac{2T}{T_d} + \frac{1}{T_d p}. \quad (25)$$

Przyjmując oznaczenia  $\frac{2T}{T_d} = k$ ,  $\frac{T}{2} = T_D$  i  $2T = T_C$ , wzór na transmitancję operatorową  $G_R(p)$  regulatora możemy zapisać w postaci

$$G_R(p) = k \left( 1 + \frac{1}{T_C p} + T_D p \right), \quad (26)$$

a zatem otrzymany regulator ma właściwości idealnego regulatora typu PID.

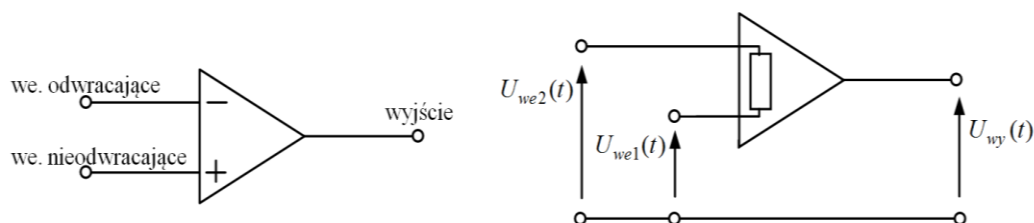
Regulatory elektroniczne wykorzystujące wzmacniacze operacyjne

W układach elektrycznych pełniących rolę regulatorów wykorzystuje się często wzmacniacze operacyjne będące wzmacniaczami prądu stałego pracującymi w pętli sprzężenia zwrotnego. Element znajdujący się w pętli tego sprzężenia decyduje o charakterystyce i właściwościach całego układu.

Wzmacniaczami operacyjnymi określano początkowo wzmacniacze stosowane w elektronicznych maszynach analogowych do wykonywania operacji matematycznych (dodawania, odejmowania, mnożenia, logarytmowania, całkowania, różniczkowania itp.) na sygnałach wejściowych. Po wprowadzeniu w elektronice technologii układów scalonych pojęcie wzmacniacza operacyjnego nabrało znacznie

szerszego znaczenia i obecnie oznacza wzmacniacz o dużym wzmocnieniu, przeważnie o sprzężeniu bezpośrednim, przeznaczony do pracy z zewnętrznym obwodem sprzężenia zwrotnego.

Wzmacniacze operacyjne należą obecnie do rozpowszechnionych analogowych układów elektronicznych i budowane są w postaci monolitycznych układów scalonych. Do najbardziej popularnych układów pracujących w oparciu o wzmacniacze operacyjne należą m.in. bezinercyjny wzmacniacz odwracający i nieodwracający, wtórnik napięciowy, wzmacniacz różnicowy, wzmacniacz sumujący, przetwornik prądu na napięcie, przetwornik napięcia na prąd, wzmacniacz całkujący, wzmacniacz różniczkujący, ogranicznik amplitudy, prostownik czynny, generator funkcyjny, układ logarytmujący, wzmacniacz antylogarytmujący (realizujący funkcję wykładniczą), inwerter, komparator napięć, różnego rodzaju filtry i inne. Jednym z bardziej rozpowszechnionych wzmacniaczy operacyjnych jest wzmacniacz oznaczony symbolem  $\mu A741$  firmy Fairchild Semiconductor Corporation (USA). Rysunek 14 przedstawia w sposób uproszczony symbol takiego wzmacniacza operacyjnego i jego schemat zastępczy.

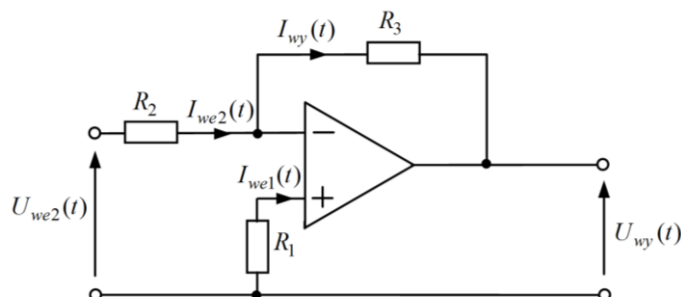


Rys. 14. Symbol wzmacniacza operacyjnego i jego schemat zastępczy.

Układ ten posiada dwa wejścia (odwracające - oznaczone znakiem "-" i nieodwracające - oznaczone znakiem "+") oraz jedno wyjście. Przy doprowadzeniu takiego samego sygnału do obu wejść jednocześnie sygnał wyjściowy powinien być równy zero. Idealny wzmacniacz operacyjny powinien charakteryzować się następujących właściwościami:

- nieskończenie dużym wzmocnieniem napięciowym
- nieskończenie dużą impedancją wejściową każdego z wejść
- nieskończenie dużą impedancją międzywejściową
- zerową impedancją wyjściową
- nieskończenie szerokim pasmem przenoszonych częstotliwości
- zerową wartością napięcia wyjściowego przy równości napięć na wejściach odwracającym i nieodwracającym,
- niewrażliwością na zmiany temperatury.

Rozważmy teraz dokładniej działanie takiego wzmacniacza operacyjnego pracującego w układzie sztywnego ujemnego sprzężenia zwrotnego (w torze sprzężenia znajduje się człon proporcjonalny). Jest to podstawowy układ pracy wzmacniacza operacyjnego i przedstawiony został na rysunku 15.



Rys. 15. Schemat układu wzmacniacza operacyjnego pracującego w układzie sztywnego ujemnego sprzężenia zwrotnego.

Rozpatrując działanie takiego układu należy wyjść z podstawowej zależności obowiązującej dla wzmacniacza operacyjnego, a mianowicie

$$U_{wy}(t) = K_u (U_{we1}(t) - U_{we2}(t)), \quad (27)$$

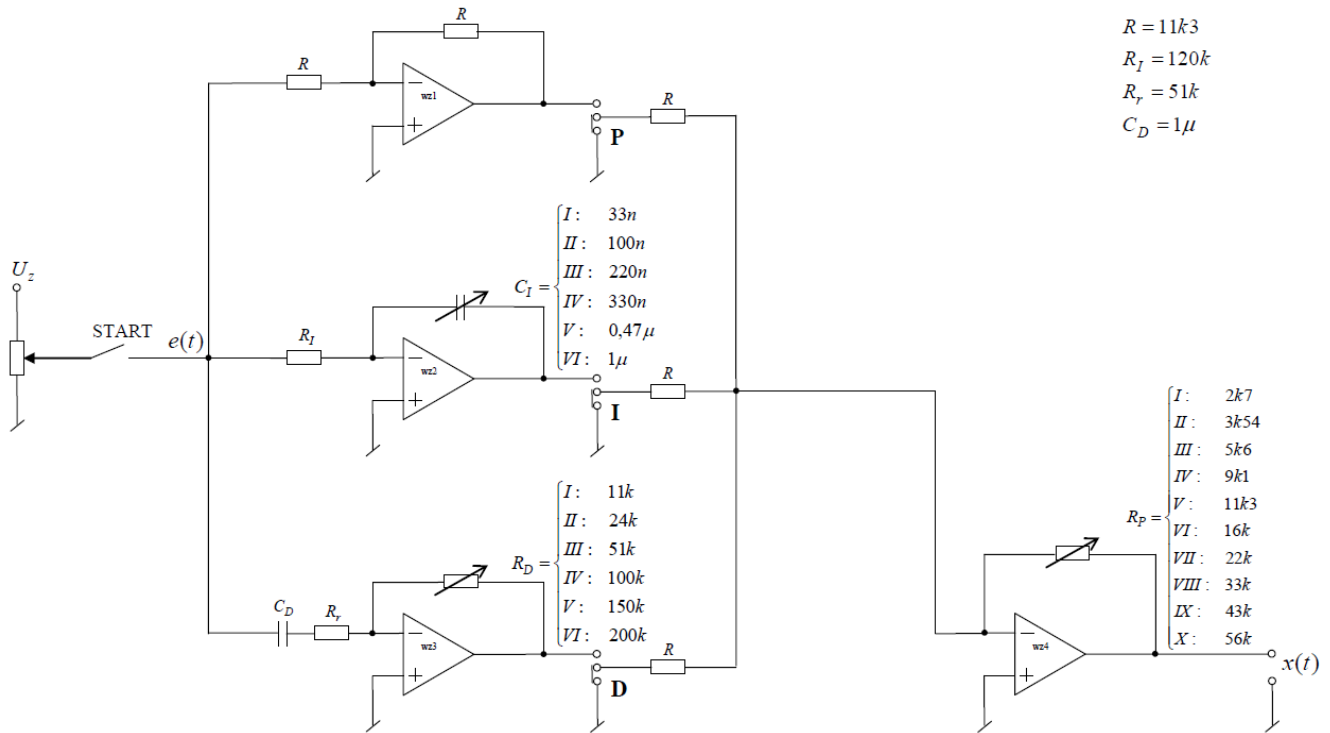
oznaczającej, że napięcie wyjściowe  $U_{wy}(t)$  wzmacniacza jest proporcjonalne do różnicy napięć  $U_{we1}(t)$  i  $U_{we2}(t)$  podawanych odpowiednio na wejście nieodwracające i odwracające, a współczynnikiem proporcjonalności jest wzmocnienie napięciowe  $K_u$  wzmacniacza. Przyjmując jak dla wzmacniacza idealnego nieskończenie duże wzmocnienie  $K_u$ , z zależności (27) otrzymujemy

$$U_{we1}(t) - U_{we2}(t) = \frac{U_{wy}(t)}{K_u} \rightarrow 0. \quad (28)$$

Z kolei zakładając nieskończenie duże impedancje międzywejściową i wejściową każdego z wejść, prąd  $I_{we1}(t)$  na wejściu nieodwracającym jest równy zeru, nie ma spadku napięcia na rezystancji  $R_1$  i potencjał wejścia nieodwracającego jest równy potencjałowi masy. Podobnie potencjał wejścia odwracającego (równy potencjałowi wejścia nieodwracającego powiększonego o różnicę  $U_{we1}(t) - U_{we2}(t)$ , która na podstawie zależności jest równa zeru) również jest równy zeru. Potencjał wejścia odwracającego nazywany jest punktem masy pozornej albo masą pozorną. Z uwagi na nieskończenie duże wartości impedancji wejściowych cały prąd wejściowy  $I_{we2}(t)$  zależny od rezystancji  $R_2$  płynie także przez rezystancję  $R_3$  ( $I_{we2}(t) = I_{wy}(t)$ ). Należy pamiętać jeszcze, że w rozważanej konfiguracji odwracającej napięcie wyjściowe  $U_{wy}(t)$  będzie przesunięte w fazie w stosunku do napięcia wejściowego  $U_{we2}(t)$  o  $180^\circ$ . Własności te występujące w układzie odwracającym (równość prądu  $I_{we2}(t)$  na wejściu odwracającym i prądu  $I_{wy}(t)$  na wyjściu wzmacniacza jak i odwracanie fazy sygnału wejściowego) zostaną wykorzystane i uwzględnione w dalszej części opracowania do wyznaczenia transmitancji operatorowych poszczególnych struktur regulatora elektronicznego zbudowanego na wzmacniaczach operacyjnych.

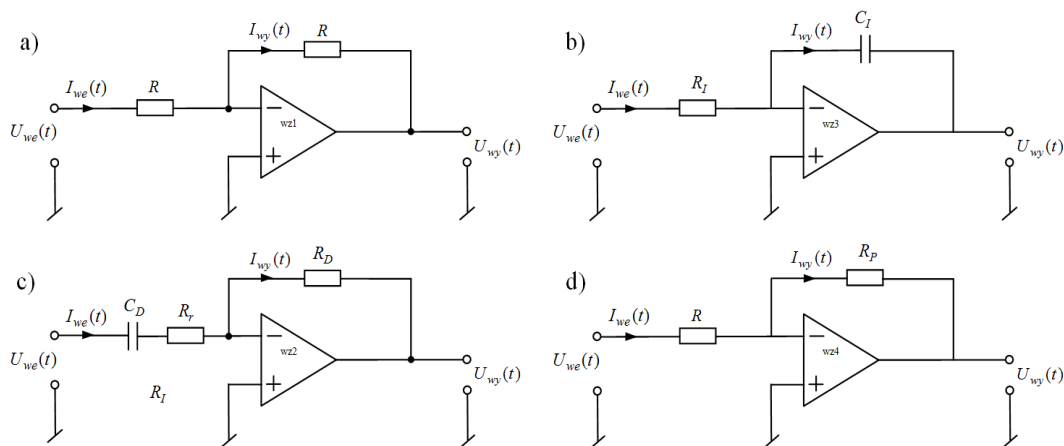
### Budowa elektronicznego regulatora typu PID

Rysunek 16 przedstawia schemat ideowy elektronicznego regulatora PID zbudowanego w oparciu o wzmacniacze operacyjne wykorzystywanego w ćwiczeniu do regulacji prędkości obrotowej silnika prądu stałego. Do badania samego regulatora elektronicznego uchybem regulacji  $e(t)$  jest spadek napięcia na potencjometrze. Sygnał ten podawany jest do regulatora poprzez załączenie przycisku START. Na przedstawionym schemacie ideowym wyraźnie wyróżnić można cztery układy wzmacniaczy operacyjnych (wz1, wz2, wz3 i wz4) z różnymi elementami w torze ujemnego sprzężenia zwrotnego. Przepływ sygnału wejściowego (uchybu regulacji  $e(t)$ ) przez poszczególne fragmenty układu uzależniony jest od położenia (włączony/wyłączony) przycisków oznaczonych literami odpowiednio P, I oraz D. Ponadto inne odpowiednie przełączniki wielopozycyjne pozwalają na skokową zmianę wartości rezystancji i wartości pojemności w poszczególnych fragmentach obwodu, przez co dokonuje się odpowiednich ustawień tzw. **nastaw regulatora**.



Rys. 16. Schemat ideowy regulatora PID zbudowanego w oparciu o wzmacniacze operacyjne.

Na rysunku 17 rozważono dokładniej poszczególne struktury składowe regulatora.



Rys. 17. Poszczególne struktury regulatora elektronicznego typu PID: a) struktura proporcjonalna; b) struktura całkująca; c) struktura różniczkująca; d) struktura proporcjonalna.

W układzie z rysunku 17a sygnał wejściowy doprowadzany jest do wejścia odwracającego wzmacniacza  $wz1$  przez rezystor  $R$ . Na wejście odwracające tego wzmacniacza podawana jest również część sygnału wyjściowego przez taki sam rezystor  $R$  pełniący rolę pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego. Wykorzystując założenia dotyczące równości prądu wejściowego i wyjściowego w konfiguracji odwracającej możemy zapisać

$$\frac{U_{we}(t)}{R} = -\frac{U_{wy}(t)}{R}, \quad (29)$$

a zatem transmitancja operatorowa tego układu jest równa

$$G(p) = \frac{U_{wy}(t)}{U_{we}(t)} = -\frac{R}{R} = -1. \quad (30)$$

Przedstawiona struktura zapewnia zatem działanie proporcjonalne ze stałym współczynnikiem równym  $-1$ . Przy takiej konfiguracji rezystancja wejściowa wzmacniacza jest równa  $R$ . Zastosowanie ujemnego sprzężenia zwrotnego powoduje natomiast dalsze zmniejszenie rezystancji wyjściowej wzmacniacza. W przedstawionym układzie trudno jest zapewnić jednocześnie dużą rezystancję wejściową i duże wzmocnienie wzmacniacza, co stanowi wadę przedstawionego rozwiązania.

W układzie przedstawionym na rysunku 17b sygnał wejściowy doprowadzany jest do wejścia odwracającego wzmacniacza wz2 przez rezystor  $R_I$ . Na wejście odwracające tego wzmacniacza podawana jest również część sygnału wyjściowego przez kondensator  $C_I$  znajdujący się w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego. Wykorzystując założenia dotyczące równości prądu wejściowego i wyjściowego w konfiguracji odwracającej możemy zapisać

$$\frac{U_{we}(t)}{R} = -C_I \frac{dU_{wy}(t)}{dt}, \quad (31)$$

lub w postaci operatorowej

$$\frac{U_{we}(t)}{R} = -C_I p U_{wy}(t). \quad (32)$$

Stąd transmitancja tej struktury jest równa

$$G(p) = \frac{U_{wy}(t)}{U_{we}(t)} = -\frac{1}{R_I C_I p} = -\frac{1}{T_I p}, \quad (33)$$

gdzie  $T_I = R_I C_I$  jest stałą czasową całkowania. W rzeczywistych układach tego typu wzmocnienie wejścia odwracającego jak i szerokość pasma przenoszenia wzmacniacza mają skończone wartości. Jest to źródłem pewnych błędów podczas całkowania sygnału wejściowego. W przypadku krótkiego czasu całkowania błąd polega na opóźnieniu odpowiedzi układu o pewien czas spowodowanym ograniczoną szerokością pasma przenoszenia wzmacniacza (układ z opóźnieniem czasowym). Z kolei przy długim czasie całkowania napięcie wyjściowe zaczyna wzrastać wykładniczo (a nie liniowo) z pewną stałą czasową całkowania asymptotycznie zbliżając się do wartości napięcia naładowanego kondensatora. Podsumowując, aby uzyskać wystarczająco dobrą liniowość przebiegu wyjściowego, całkowanie należy przerwać po czasie stosunkowo krótkim (w odniesieniu do stałej czasowej całkowania) i przy amplitudzie znacznie mniejszej niż napięcie całkowicie naładowanego kondensatora.

Rozważany układ posiada jednak dość poważną wadę. Mianowicie dla małych częstości sygnału wejściowego reaktancja  $X_{C_I}$  pojemności  $C_I$  jest bardzo duża ( $X_{C_I} = 1/\omega C_I$ ), więc wzmacniacz praktycznie nie posiada ujemnego sprzężenia zwrotnego. Wówczas jego wzmocnienie jest bardzo duże, co może prowadzić do utraty stabilności jego działania, na przykład w wyniku istnienia różnego rodzaju sprzężeń pasożytniczych między poszczególnymi elementami układu. W praktyce równolegle do kondensatora  $C_I$  włącza się jeszcze rezystor, który zapewnia ujemne sprzężenie zwrotne i ogranicza wzmocnienie wzmacniacza dla małych częstości sygnału wejściowego. Przedstawiona struktura całkująca regulatora zbudowanego w oparciu o wzmacniacz operacyjny jest układem całkującym, zwanym również **integratorem Millera**.

W przedstawionym na rys. 17c układzie sygnał wejściowy doprowadzany jest do wejścia odwracającego wzmacniacza wz3 przez szeregowe połączenie kondensatora  $C_D$  i rezystora  $R_r$ . Z kolei w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego wzmacniacza znajduje się rezystor  $R_D$ . Wykorzystując założenia do-

tyczące równości prądu wejściowego i wyjściowego ( $I_{we}(t) = I_{wy}(t) = I(t)$ ) w konfiguracji odwracającej, możemy zapisać

$$\frac{U_{wy}(t)}{U_{we}(t)} = - \frac{R_D I(t)}{\frac{1}{C_D} \int_0^t I(\tau) d\tau + R_r I(t)}, \quad (34)$$

lub w postaci operatorowej

$$\frac{U_{wy}(t)}{U_{we}(t)} = - \frac{R_D I(t)}{\frac{1}{C_D} \frac{1}{p} I(t) + R_r I(t)} = - \frac{R_D}{\frac{1}{C_D} \frac{1}{p} + R_r}. \quad (35)$$

Zatem transmitancja operatorowa tej struktury jest równa

$$G(p) = \frac{U_{wy}(t)}{U_{we}(t)} = - \frac{C_D R_D p}{C_D R_r p + 1} = - \frac{T_D p}{T p + 1}, \quad (36)$$

gdzie  $T = C_D R_r$  i  $T_D = C_D R_D$  są stałymi czasowymi. W przedstawionym układzie zastosowano na wejściu rezystor  $R_r$ , który dla dużych częstotliwości ogranicza duże wzmocnienie wzmacniacza spowodowane występowaniem na wejściu kondensatora  $C_D$ , który dla dużych częstotliwości ma małą impedancję. Zastosowany rezystor  $R_r$  w praktyce ogranicza więc możliwość niestabilnej pracy układu. Utrata stabilności może pojawić się również w wyniku przesunięcia fazy sygnału przez elementy w torze wejściowym ( $R_r$  i  $C_D$ ). W wielu układach stosuje się więc jeszcze jeden kondensator włączony równolegle do rezystora znajdującego się w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego, który wprowadza dodatkowe przesunięcie fazy poprawiając w ten sposób stabilność układu.

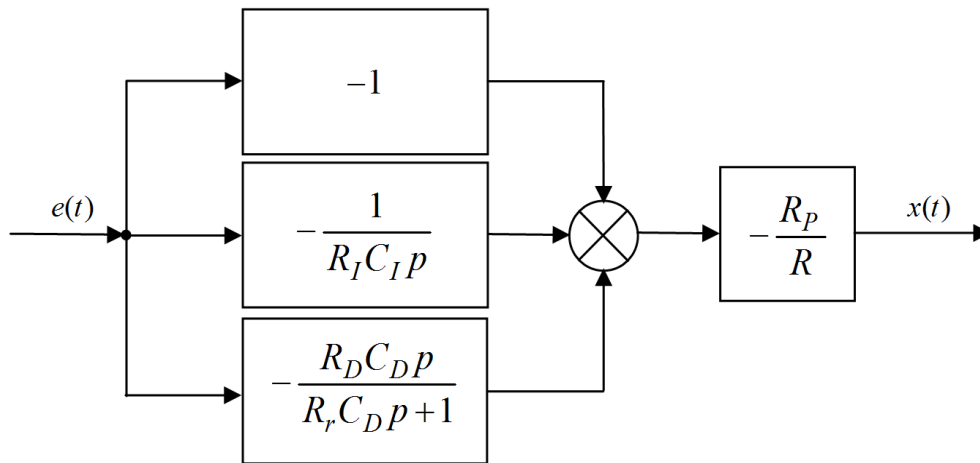
Rysunek 17d przedstawia schemat układu ze wzmacniaczem wz4 pracującym w układzie sztywnego ujemnego sprzężenia zwrotnego. Rozważany układ pod względem budowy i zasady działania jest identyczny jak układ na rys. 17a. W tym układzie w obwodzie sprzężenia zwrotnego znajduje się rezystor o rezystancji  $R_p$ , więc transmitancja operatorowa tego układu jest równa

$$G_p(p) = \frac{U_{wy}(t)}{U_{we}(t)} = - \frac{R_p}{R}. \quad (37)$$

Wzmacniacz operacyjny wz4 pełni również rolę sumatora w układzie. Przyjmując założenia idealnego wzmacniacza operacyjnego pracującego w konfiguracji odwracającej prąd wyjściowy wzmacniacza wz4 płynący przez rezystor  $R_p$  jest równy co do wartości sumie prądów wyjściowych wzmacniaczy wz1, wz2 i wz3 płynących przez rezystory  $R$ . Przyjmując jednakowe wartości rezystorów  $R$  na wyjściach wzmacniaczy wz1, wz2 i wz3 uzyskano więc sumowanie ich napięć wyjściowych.

Rysunek 18 przedstawia schemat blokowy rozważanego regulatora elektronicznego z zaznaczeniem transmitancji operatorowych poszczególnych fragmentów układu.





Rys. 18. Schemat regulatora z zaznaczeniem poszczególnych struktur i ich transmitancji operatorowych.

Podstawowe zasady algebry schematów blokowych pozwalają wyznaczyć transmitancję zastępczą  $G_R(p)$  całego regulatora, która jest równa

$$G_R(p) = \frac{R_P}{R} \left( 1 + \frac{1}{R_I C_I p} + \frac{R_D C_D p}{R_r C_D p + 1} \right). \quad (38)$$

### Przebieg ćwiczenia

1. Wyznaczanie współczynników wzmocnienia  $K_P$  struktury proporcjonalnej P regulatora
2. Wyznaczanie stałych czasowych całkowania  $T_I$  struktury całkującej I regulatora
3. Wyznaczanie stałych czasowych  $T$  i  $T_D$  struktury różniczkującej D regulatora
4. Wyznaczanie odpowiedzi skokowych różnych kombinacji struktur regulatora PID dla wybranych nastaw
5. Porównanie działania układu dla różnych struktur regulatora
6. Wyznaczanie przebiegów wielkości wyjściowej i odpowiadających im przebiegów uchybu regulacji jako odpowiedzi na zakłócenie skokowe
7. Wyznaczanie przebiegów wielkości wyjściowej i odpowiadających im przebiegów uchybu regulacji jako odpowiedzi na wymuszenie skokowe

### Literatura

1. *Podstawy Automatyki – Teoria i Przykłady*. J. Awrejcewicz, W. Wodzicki. Wydawnictwo PŁ, Łódź 2001.
2. *Zbiór Zadań z Podstaw Automatyki*. Praca zbiorowa pod red. M. Roszkowskiego. Wydawnictwo PŁ, Łódź 1988.
3. *Laboratorium Teorii Maszyn, Drgan Mechanicznych i Podstaw Automatyki*. Praca zbiorowa pod red. M. Roszkowskiego. Wydawnictwo PŁ, Łódź 1988.