

Katedra Automatyki i Biomechaniki P.Ł.
LABORATORIUM PODSTAW AUTOMATYKI

Ćwiczenie *A*: *Badanie podstawowych członów automatyki*

Cel ćwiczenia: Zapoznanie się z rodzajami i charakterystykami skokowymi podstawowych członów automatyki

(Treść na bazie skryptu, str. 117-128)

9. CZŁONY UKŁADÓW AUTOMATYKI

9.1. Wprowadzenie

Dowolny układ automatyki można podzielić na części według spełnianych przez nie funkcji w układzie, bądź według ich opisu matematycznego, czyli rodzaju równań różniczkowych. Przy pierwszym kryterium podziału mamy do czynienia z elementami funkcjonalnymi lub krótko elementami, spełniającymi w układzie określone funkcje, np. nastawianie, wzmacnianie, sumowanie itp. Według drugiego kryterium podziału rozróżniamy człony, których własności dynamiczne są opisane pewnymi typami równań różniczkowych. Tak więc członami tego samego rodzaju mogą być części układu automatyki o różnej budowie, działaniu i przeznaczeniu, lecz o tym samym opisie matematycznym, dającym zależność w postaci równań różniczkowych między wyodrębnionymi wielkościami wejściowymi i wyjściowymi. Człony automatyki mogą być jednowymiarowe i wielowymiarowe. Przedmiotem dalszych rozważań będą człony jednowymiarowe, posiadające tylko jedną wielkość wejściową i jedną wyjściową.

Człon automatyki na schematach blokowych układów przedstawia się w postaci prostokąta z zaznaczonym wejściem i wyjściem. Wewnątrz prostokąta wpisuje się przepustowość operatorową danego członu, uzyskaną przez uprzednie dokonanie transformacji Laplace'a równania dynamiki członu, przy zerowych warunkach początkowych. Przepustowość jest stosunkiem transformaty Laplace'a wielkości wyjściowej do transformaty wielkości wejściowej. Takie wyodrębnienie poszczególnych członów układu automatyki ułatwia nam zrozumienie, analizę i opis całego układu.

W zależności od tych najprostszych równań różniczkowych opisujących procesy fizyczne zachodzące w członie, rozróżniamy tzw. człony podstawowe: proporcjonalny, inercyjny, całkujący, różniczkujący i oscylacyjny. W ćwiczeniu będziemy badać charakterystyki skokowe dla tych 5 podstawowych członów. Charakterystyka skokowa to odpowiedź członu (lub układu) na skokowy sygnał wejściowy o postaci $x=x_0\mathbf{1}(t)$. Dla opisywanych członów elektrycznych ten sygnał wejściowy to po prostu skokowa zmiana napięcia wejściowego, np. od zera do pewnej ustalonej wartości. Odpowiedzi poszczególnych rodzajów członów na ten sam sygnał wejściowy będą jednak zupełnie różne, jak to dalej przedstawiono i co będzie można zaobserwować na oscyloskopie, badając człony.

9.2. Człon proporcjonalny

Członem proporcjonalnym jest człon, który spełnia następującą zależność

$$y = kx, \quad (9.1)$$

gdzie k - współczynnik wzmocnienia członu.

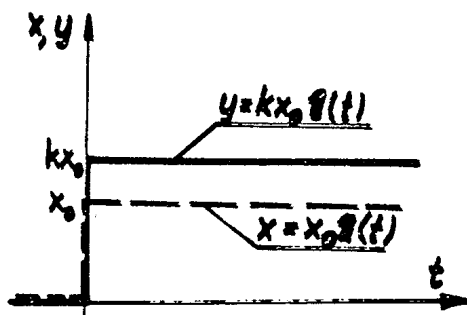
Równanie (9.1) jest równaniem algebraicznym, podobnie jak równanie zależności statycznej, co oznacza, że człon proporcjonalny jest członem bezinercyjnym, przekształca więc wielkość wejściową bez zniekształceń i opóźnień. Przepustowość operatorowa członu ma postać

$$G(s) = k. \quad (9.2)$$

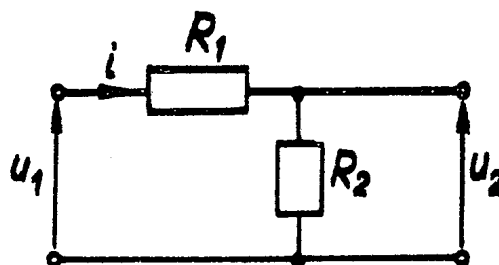
Odpowiedzią tego członu na funkcję skokową $x = x_0 \mathbf{1}(t)$ jest funkcja

$$y = kx_0 \mathbf{1}(t), \quad (9.3)$$

gdzie x_0 - dowolna stała.



Rys. 9.1



Rys. 9.2

Przebieg funkcji x jak i odpowiedzi y zwanej w tym przypadku charakterystyką skokową przedstawiono na rysunku 9.1. Przykładem członu proporcjonalnego elektrycznego jest układ przedstawiony schematycznie na rysunku 9.2. Wielkością wejściową jest napięcie U_1 , które w stanie ustalonym osiąga wartość U_{10} , a wielkością wyjściową jest napięcie U_2 , osiągające w stanie ustalonym wartość $U_{20} = U_{10}$.

Załóżmy przyrost wielkości wejściowej od stanu ustalonego o U_1 , który spowoduje przepływ prądu i . Można więc napisać na podstawie równań Kirchhoffa następujące zależności:

$$\begin{aligned}\Delta U_1 &= i(R_1 + R_2), \\ \Delta U_2 &= iR_2,\end{aligned}\tag{9.4}$$

z których po wyeliminowaniu wielkości i otrzymuje się zależność między przyrostami napięć

$$\Delta U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \Delta U_1\tag{9.5}$$

lub w postaci bezwymiarowej

$$y = kx,\tag{9.6}$$

gdzie:

$$y = \frac{\Delta U_2}{U_{20}}; \quad x = \frac{\Delta U_1}{U_{10}}; \quad k = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{U_{10}}{U_{20}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

W ćwiczeniu należy zarejestrować na oscyloskopie lub rejestratorze przebiegi wejścia i wyjścia dla różnych wartości oporności R_2 i porównać zarejestrowane przebiegi.

9.3. Człon inercyjny I rzędu

Człon inercyjny jest opisany równaniem różniczkowym

$$T \frac{dy}{dt} + y = kx,\tag{9.7}$$

gdzie: T - stała czasowa członu,

k - współczynnik wzmocnienia.

Przepustowość operatorowa członu wyraża się wzorem

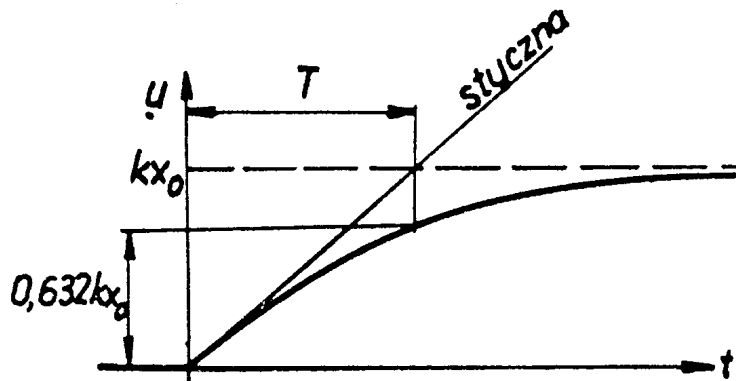
$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1}.\tag{9.8}$$

Odpowiedzią członu na funkcję skokową $x = x_0 \mathbf{1}(t)$ jest funkcja

$$y = kx_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).\tag{9.9}$$

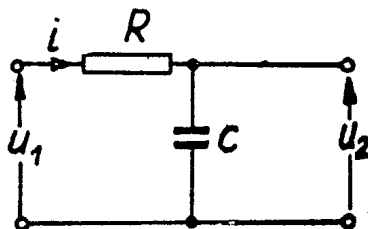
Przebieg tej funkcji, czyli charakterystykę skokową członu przedstawiono na rysunku 9.3, gdzie pokazano również wykreślony sposób wyznaczania stałej czasowej T . Przykładem członu inercyjnego I rzędu jest układ elektryczny pokazany na rysunku 9.4.

Wielkością wejściową jest napięcie U_1 , a wyjściową napięcie U_2 . Zakładając przyrost ΔU_1 napięcia na wejściu od stanu ustalonego U_{10} , uzyskuje się przyrost ΔU_2 na wyjściu członu od stanu ustalonego $U_{20} = U_{10}$.



Rys. 9.3

Stosując prawo Kirchhoffa otrzymuje się następujące równania na przyrosty napięć:



Rys. 9.4

$$\Delta U_1(t) = iR + \frac{1}{C} \int i dt, \quad (9.10)$$

$$\Delta U_2(t) = \frac{1}{C} \int i dt$$

lub w postaci bezwymiarowej po wprowadzeniu oznaczeń:

$$x = \frac{\Delta U_1}{U_{10}}; \quad y = \frac{\Delta U_2}{U_{20}}$$

będzie:

$$x(t) = \frac{1}{U_{10}} \left(iR + \frac{1}{C} \int i dt \right), \quad (9.11)$$

$$y(t) = \frac{1}{U_{20}} \left(\frac{1}{C} \int i dt \right).$$

Dokonując transformacji Laplace'a równań (9.11) przy zerowych warunkach początkowych, a następnie eliminując z nich wielkość prądu i otrzymuje się zależność w postaci operatorowej

$$Y(s) = \frac{1}{Ts + 1} X(s) \quad (9.12)$$

gdzie $T = RC$ jest stałą czasową członu, zaś współczynnik wzmocnienia członu $k = 1$. Tak więc przepustowość operatorowa członu z rysunku 9.4 ma postać

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}. \quad (9.13)$$

W ćwiczeniu należy zarejestrować kilka przebiegów wejścia i wyjścia przy różnych wartościach parametrów R i C , obserwując ich wpływ na kształt przebiegu odpowiedzi członu.

9.4. Człon całkujący

Człon całkujący jest opisany równaniem:

$$y = \frac{1}{T} \int x \, dt, \quad (9.14)$$

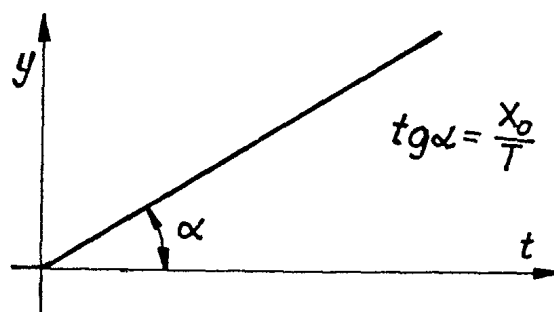
gdzie T jest stałą całkowania członu.

Przepustowość operatorowa członu ma postać

$$G(s) = \frac{1}{Ts}. \quad (9.15)$$

Odpowiedzią członu na funkcję skokową $x = x_0 \mathbb{1}(t)$ jest

$$y = \frac{x_0}{T} t. \quad (9.16)$$



Rys. 9.5

Charakterystykę skokową członu przedstawiono na rysunku 9.5. Z uwagi na trudności realizacji rzeczywistego członu całkującego w postaci

prostego układu elektrycznego, w którym wielkością wejściową i wyjściową byłoby napięcie, wykorzystano układ elektryczny taki, jak dla członu inercyjnego I rzędu, lecz o innych parametrach R i C.

Podstawmy dla członu inercyjnego z rysunku 9.4 warunek

$$T = RC \gg 1. \quad (9.17)$$

Wyrażenie (9.13) na przepustowość członu można wówczas napisać w postaci przybliżonej

$$G(s) = \frac{1}{T(s + \frac{1}{T})} \approx \frac{1}{Ts}, \quad (9.18)$$

a więc człon inercyjny przy dostatecznie dużej stałej czasowej $T \gg 1$ lub inaczej dla $\frac{t}{T} \ll 1$ może być z powodzeniem traktowany jako człon całkujący.

W przypadku badania członu podczas ćwiczenia należy, zwiększając stopniowo wartości parametrów R i C członu z rysunku 9.4, zarejestrować charakterystyki skokowe takiego członu, obserwując zmiany ich kształtu.

9.5. Człon różniczkujący I rzędu

Idealny człon różniczkujący I rzędu jest opisany równaniem

$$y = k \frac{dx}{dt}. \quad (9.19)$$

Widać, że sygnał wyjściowy y takiego członu jest proporcjonalny do pochodnej wejścia. Jednak takiego członu nie daje się w rzeczywistości zrealizować. Jego charakterystykę skokową zaznaczono na rysunku 9.6 linią przerywaną. Rzeczywisty człon różniczkujący dokonuje różniczkowanie wielkości wejściowej wykazując pewną inercyjność. Równanie takiego członu ma postać

$$T \frac{dy}{dt} + y = kT \frac{dx}{dt}. \quad (9.20)$$

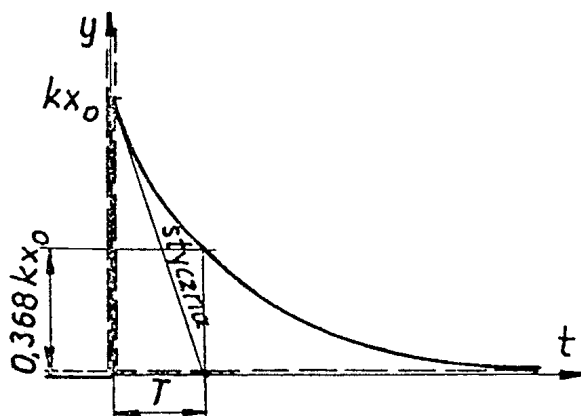
Przepustowość operatorowa wyraża się wzorem

$$G(s) = \frac{kTs}{Ts + 1}. \quad (9.21)$$

Odpowiedzią członu na funkcję skokową $x = x_0 \mathbb{1}(t)$ jest funkcja

$$y = kx_0 e^{-\frac{t}{T}}, \quad (9.22)$$

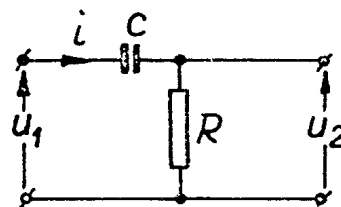
a jej wykres przedstawiono na rysunku 9.6, z zaznaczeniem parametrów członu: T - stałej czasowej wykreślonego sposobu jej wyznaczenia oraz k - współczynnika wzmocnienia.



Rys. 9.6

Schemat rzeczywistego członu różniczkującego I rzędu - elektrycznego pokazano na rysunku 9.7. Jest to jak widać inny sposób połączenia oporności R i pojemności C , niż to miało miejsce przy członie inercyjnym.

Zakładając przyrost wielkości wejściowej w stanie ustalonym U_{10} o ΔU_1 uzyskuje się przyrost napięcia na wyjściu poziomemu U_{20} o ΔU_2 , przy czym $U_{10} = U_{20}$. Pisząc równania Kirchhoffa dla przedstawionego obwodu elektrycznego otrzymuje się następujące równania na przyrosty napięć w zależności od parametrów R i C :



Rys. 9.7

$$\Delta U_1 = \frac{1}{C} \int i \, dt + iR, \quad (9.23)$$

$$\Delta U_2 = iR$$

lub w postaci bezwymiarowej:

$$x = \frac{1}{U_{10}} \left(\frac{1}{C} \int i \, dt + iR \right), \quad (9.24)$$

$$y = \frac{1}{U_{20}} iR,$$

gdzie:

$$x = \frac{\Delta U_1}{U_{10}}, \quad y = \frac{\Delta U_2}{U_{20}}.$$

Dokonując transformacji Laplace'a obu stron równań (9.24), a następnie eliminując z nich wielkość y otrzymuje się zależność na przepustowość operatorową rozpatrywanego członu

$$G(s) = \frac{kTs}{Ts + 1}, \quad (9.25)$$

gdzie:

$$k = \frac{U_{10}}{U_{20}} = 1; \quad T = RC.$$

Podczas obserwacji przebiegów odpowiedzi skokowej takiego członu należy zmieniać kolejno wartości parametrów R i C i obserwując ich wpływ na kształt charakterystyki skokowej członu.

9.6. Człon oscylacyjny

Człon oscylacyjny jest opisany równaniem różniczkowym

$$T_2^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = kx \quad (9.26)$$

lub w innej, częściej stosowanej postaci

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy}{dt} + y = kx, \quad (9.27)$$

gdzie: T - stała czasowa członu, przy czym $T = T_2$,
 ξ - współczynnik tłumienia, przy czym $\xi = \frac{T_1}{2T_2}$,
 k - współczynnik wzmocnienia.

Warunkiem powstania oscylacji jest zależność

$$\xi < 1. \quad (9.28)$$

Przepustowość operatorowa członu ma postać

$$G(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}. \quad (9.29)$$

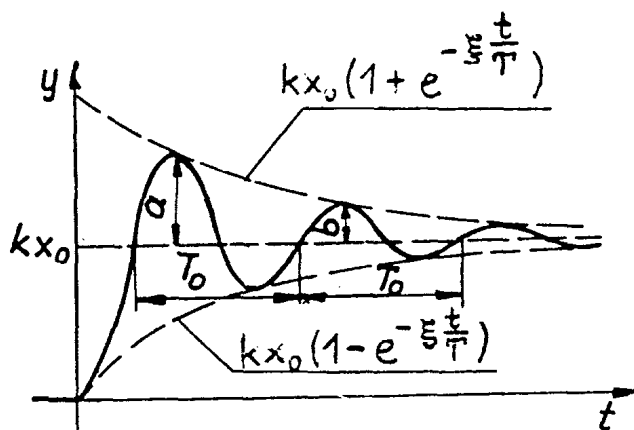
Odpowiedź członu oscylacyjnego na wymuszenie skokowe $x = x_0 \mathbb{1}(t)$ przy spełnionym warunku $\xi < 1$ ma postać

$$y = kx_0 \left[1 - \frac{e^{-\frac{\xi}{T}t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t - \beta\right) \right], \quad (9.30)$$

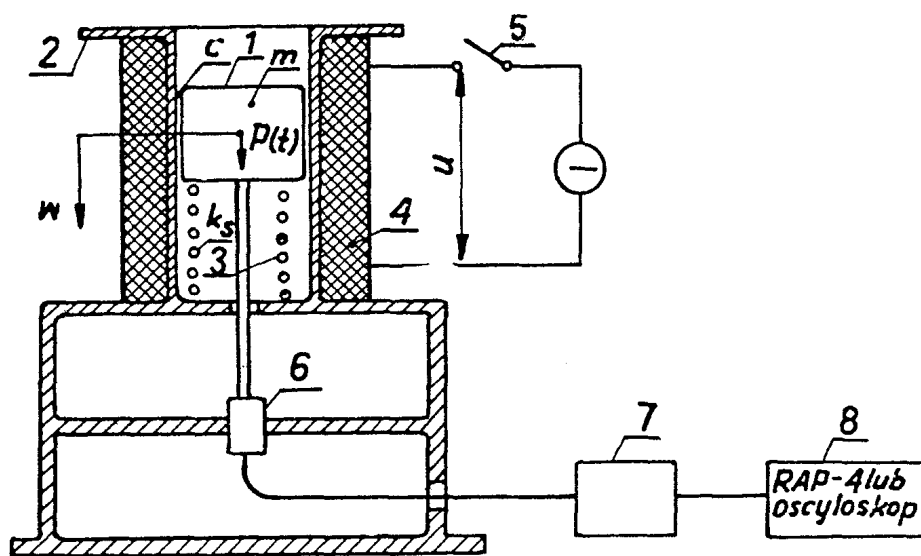
przy czym

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

a jej przebieg przedstawiono na rysunku 9.8.



Rys. 9.8



Rys. 9.9

Zachodzą przy tym zależności:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}} T, \quad (9.31)$$

$$\frac{b}{a} = e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

z których na podstawie zdjętej doświadczalnie charakterystyki skokowej członu można wyznaczyć jego parametry k , T , ξ . Przykładem członu oscylacyjnego jest mechaniczny układ drgający przedstawiony na rysunku 9.9. Wewnątrz winidurowego cylindra (2) porusza się tłok (1) o masie m wykonany z materiału ferromagnetycznego, podparty sprężyną (3) o sztywności k_s . Powierzchnia tłoka i cylindra są od siebie oddzielone warstwą oleju o współczynniku tłumienia viskozycznego c . Zewnętrzne uzwojenie (4) na cylindrze zasilane napięciem U włączonym włącznikiem (5) wytwarza siłę $P(t)$, wciągającą tłok i wywołującą jego ruch drgający wokół nowego położenia równowagi. Drgania te są mierzone czujnikiem (6) i poprzez układ wzmacniający (7) rejestrowane na rejestratorze (8) przebiegów szybkodziennych typu RAP-4 lub na oscyloskopie.

Wielkością wejściową członu jest siła wciągająca typu $P(t) = P_0 \uparrow(t)$, a wielkością wyjściową przemieszczenie w masy w .

Równanie różniczkowe członu można zapisać w postaci równania drgań tłumionych z wymuszeniem skokowym

$$m \frac{d^2 w}{dt^2} + c \frac{dw}{dt} + k_s w = P(t). \quad (9.32)$$

Po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych $x = \frac{P(t)}{P_{\max}}$ oraz $y = \frac{w}{w_{\max}}$ i przekształceniach, równanie to można zapisać w postaci operatorowej

$$(T_2^2 s^2 + T_1 s + 1)y = kx \quad (9.33)$$

lub

$$(Ts^2 + 2\xi Ts + 1)y = kx, \quad (9.34)$$

gdzie:

$$T = T_2 = \sqrt{\frac{m}{k_s}} = \frac{1}{\omega}$$

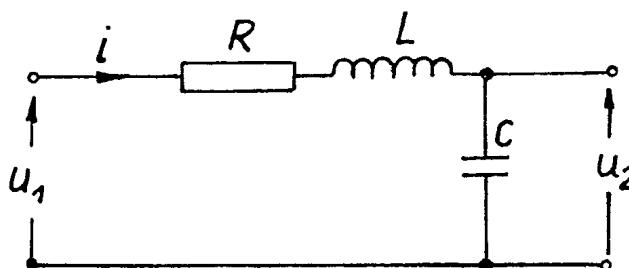
$$T_1 = \frac{c}{k_s} = \frac{2h}{\alpha^2},$$

$$\xi = \sqrt{\frac{c^2}{4k_s m}},$$

$$k = \frac{P_{\max}}{k_{s \max}},$$

gdzie α jest częstością kołową drgań własnych układu, zaś $h = \frac{c}{2m}$ współczynnikiem tłumienia względnego.

Można więc stwierdzić, że układ pokazany na rysunku 9.9 jest członem oscylacyjnym pod warunkiem, że $\xi < 1$ (tłumienie mniejsze od krytycznego).



Rys. 9.10

Przykładem elektrycznego członu oscylacyjnego jest oscylator elektryczny przedstawiony na rysunku 9.10. Jest to układ połączonych szeregowo oporności - R , indukcyjności - L i pojemności - C . Gdy na wejściu tego członu doprowadzi się napięcie U_{10} , to napięcie na wyjściu w stanie ustalonym osiągnie wartość $U_{20} = U_{10}$. Zależności na przyrosty napięć na wejściu ΔU_1 i wyjściu ΔU_2 mają postać:

$$\Delta U_1 = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt, \quad (9.35)$$

$$\Delta U_2 = \frac{1}{C} \int i dt.$$

Przekształcając układ (9.35) i wprowadzając bezwymiarowość $x = \frac{\Delta U_1}{U_{10}}$; $y = \frac{\Delta U_2}{U_{20}}$ otrzymuje się następujące wyrażenie na przepustowość operatorową członu

$$G(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}, \quad (9.36)$$

gdzie:

$$K = \frac{U_{10}}{U_{20}} = 1,$$

$$T = \sqrt{LC},$$

$$\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}};$$

musi przy tym zachodzić warunek $\xi < 1$.

W czasie badań należy zaobserwować charakterystyki skokowe omówionych członów oraz wpływ na nie takich parametrów jak R , L , C dla członu elektrycznego lub m , k , c dla członu mechanicznego.

LITERATURA

- [1] P a r s z e w s k i Z., R o s z k o w s k i M.: Podstawy automatyki dla mechaników. PWN, Warszawa 1976.
- [2] C h o r o w s k i B., W e r s z k o M.: Mechaniczne urządzenia automatyki. WNT, Warszawa 1968.
- [3] G i b s o n J. E.: Człony układów regulacji. WNT, Warszawa 1968.
- [4] Ż e ł a z n y M.: Podstawy automatyki. PWN, Warszawa 1970.